



Département de Mathématiques et de Statistique
Trimestre : Hiver 2003

Projet de fin d'études

MAT-19517

Modélisation d'une population de plancton

Travail présenté à :
M. Daniel Le Roux
Coordonnateur du cours

Par : Annie Turcotte
00 214 981

Lundi, le 7 avril 2003.

Table des matières

Introduction	3
1. Le plancton	3
Le phytoplancton et le zooplancton	3
Importance du plancton	4
2. Modèles prédateur-proie	5
Équations de Lotka-Volterra	5
Modèle plus réaliste	7
3. Phénomène de diffusion	8
4. Équations représentant le plancton	9
5. La méthode des éléments finis	12
Éléments finis	12
Problèmes non linéaires et instationnaires	13
Maillage et éléments	13
6. Application aux équations représentant le plancton	15
7. Résultats	17
Conclusion	19
Bibliographie	20

Introduction

Le sujet du présent travail provient d'une partie d'un article intitulé « Spatiotemporal Complexity of Plankton and Fish Dynamics », paru dans la revue SIAM Review. Il y est montré que la distribution du zooplancton et du phytoplancton peut être décrite à l'aide d'un modèle mathématique relativement simple.

L'abondance du plancton varie non seulement dans l'espace, mais aussi dans le temps. Les amas irréguliers de plancton observés dans l'océan, de même que les formes de spirales à différentes échelles, sont causés, selon une explication suggérée¹, par la turbulence des eaux marines. Une autre explication relie cette distribution particulière à l'inhomogénéité de la température de l'eau dans les océans.

Cependant, les équations présentées dans ce travail modélisent plutôt la relation prédateur-proie présente dans le plancton. Les expérimentations montrent des structures semblables à celles qu'on croyait causées par la turbulence marine dans les mers et les océans. Elles sont donc causées aussi par les interactions entre le phytoplancton et le zooplancton et non pas uniquement par des phénomènes physiques.

1. Le plancton

Le phytoplancton et le zooplancton

Avant de pouvoir modéliser et pour bien comprendre le modèle décrivant l'évolution d'une population de plancton, il convient de savoir ce qu'est le plancton, et en quoi peut-on distinguer le prédateur de la proie.

Le mot plancton provient du grec *plagkton* (ou *planctos*) qui signifie « errant ». Il désigne l'ensemble des micro-organismes flottants passivement près de la surface des océans, des étangs et des lacs.

On distingue deux principaux constituants dans le plancton : le phytoplancton et le zooplancton.

La première catégorie, le phytoplancton, est la partie végétale du plancton. Il est constitué d'algues microscopiques dont le principal mode de nutrition est par photosynthèse, comme tous les végétaux. Leur taille varie d'un peu moins de 5 micromètres (μm) jusqu'à 1 millimètre (mm).

On retrouve principalement deux grands groupes dans le phytoplancton : les Diatomées (ou *Bacillariophytes*) et les Dinoflagellés (ou *Pyrrhophytes*). Les membres du premier groupe abondent dans le plancton d'eau douce ou salée; un seau d'eau recueillie à la surface de la mer peut contenir des millions de ces algues microscopiques. On distingue ces organismes unicellulaires de ceux des autres groupes par leur paroi unique en son

¹ Siam Review, Vol. 44, No. 3, p. 314.

genre, semblable au verre, et composée de 2 parties imbriquées l'une dans l'autre. On a recensé environ 10 000 espèces de Diatomées.

Les membres du deuxième groupe ont en commun leur forme un peu particulière. Leur nom de Dinoflagellés provient du grec *dinos* qui signifie « tourbillon » en grec. Cela est dû au fait qu'ils possèdent 2 flagelles, perpendiculairement situées, leur permettant de faire des vrilles. On en a recensé environ 1100 espèces. Ce sont des organismes unicellulaires, dont certains vivent en colonies.

On retrouve également d'autres groupes de moindre importance. Citons notamment les Coccolithophorides, de dimensions très restreintes mais extrêmement abondants dans les eaux tropicales et subtropicales; on retrouve des densités allant jusqu'à 30 millions d'individus au litre, selon les saisons.

Le zooplancton, la partie animale du plancton, est beaucoup plus varié que le phytoplancton. Il comprend des représentants de toutes les tailles, de 5 µm à quelques millimètres. Les plus petites espèces sont unicellulaires et constituent le nanoplancton animal. Elles se nourrissent de cellules végétales appartenant au phytoplancton. Vient ensuite le microplancton, composé d'organismes pluricellulaires dont la taille est comprise entre 50 µm et 1 mm. Cette subdivision comprend les Copépodes, qui forment la majorité (de 50 à 90 %, dépendant de la région et des saisons) du zooplancton. Certains sont herbivores, se nourrissant de diatomées, et d'autres, carnivores, mangent des Copépodes plus petits. Quelques uns d'entre eux absorbent quotidiennement jusqu'à 60 % de leur poids. Il existe aussi des espèces constituant le plancton dont la taille excède 1mm. On les classe dans le mésoplancton et le macroplancton. Cette dernière catégorie comprend le krill, la nourriture de base des baleines.

L'importance du plancton

Le plancton est donc constitué de différents organismes de tailles et formes variées. C'est cette variété qui en fait un élément si important pour notre planète et la vie qu'elle abrite dans ses océans et sur la terre et cela, pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, on a vu que le phytoplancton se nourrissait par photosynthèse. Ce processus transforme de l'énergie solaire en énergie chimique. Des molécules organiques, d'eau et d'oxygène sont produites à partir de CO₂, d'eau et d'énergie lumineuse. Une bonne partie de l'oxygène présente dans l'atmosphère est produite de cette façon par le phytoplancton.

Cependant, l'importance du plancton vient surtout du fait qu'il forme la base de l'alimentation d'une foule d'organismes marins, des plus petits poissons aux grands cétacés. Les essaims de zooplancton dans les mers sont les plus grands agrégats de protéines connus. Ces zones de fortes densités attirent des bancs de poissons, qui eux intéressent les pêcheurs.

Il devint donc important, vu la corrélation entre le zooplancton et l'abondance du poisson, de pouvoir localiser les zones de forte densité et détecter leur concentration. Depuis plus d'une centaine d'années, les systèmes de plancton sont étudiés, combinant l'observation en milieu naturel, l'expérimentation en laboratoire et la modélisation mathématique.

Le premier à s'intéresser aux modèles mathématiques de plancton fut Fleming, qui décrivit par une simple équation différentielle ordinaire le contrôle de l'expansion du phytoplancton par le zooplancton. Plusieurs autres approches furent utilisées par la suite, notamment par l'application des équations de Lotka-Volterra, qui décrivent la relation prédateur-proie entre le zooplancton et le phytoplancton.

2. Modèles prédateur-proie

Les équations de Lotka-Volterra

Avant de s'attaquer aux modèles prédateur-proie plus complexes, il pourrait être utile de bien comprendre les plus simples. L'un des premiers modèles à être proposé le fut par Volterra² en 1926, qui expliquait ainsi l'oscillation de la population des prédateurs et des proies. Si $P(t)$ est la population des prédateurs au temps t et $N(t)$ celle des proies, alors

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(a - bP) \\ \frac{dP}{dt} &= P(cN - d) \end{aligned} \tag{1}$$

où a est le taux de croissance des proies et d le taux de mortalité des prédateurs. Les constantes b et c représentent quant à elles le taux moyen de rencontres fatales pour la proie entre les deux espèces.

Le modèle précédent (1) est connu sous le nom de Lotka-Volterra, puisque Lotka a obtenu les mêmes équations qu'il a par contre appliquées à une réaction chimique, où N et P représentent les concentrations des deux composants chimiques.

Il peut être utile d'écrire le système (1) avec des variables et des paramètres sans dimension. Le but d'un tel changement de variables est de simplifier l'expression : en groupant les variables et les paramètres d'une manière significative, leur nombre se trouve à être réduit, et de plus, les unités se sont simplifiées. Il y a plusieurs manières de le faire, dans le cas présent, nous avons considéré les variables sans dimension suivantes :

$$u(\tau) = \frac{cN(t)}{d} \quad v(\tau) = \frac{bP(t)}{a} \quad \tau = at \quad \alpha = \frac{d}{a}$$

² Murray J. D., *Mathematical Biology*, p.63-65.

Nous obtenons alors le système adimensionnel

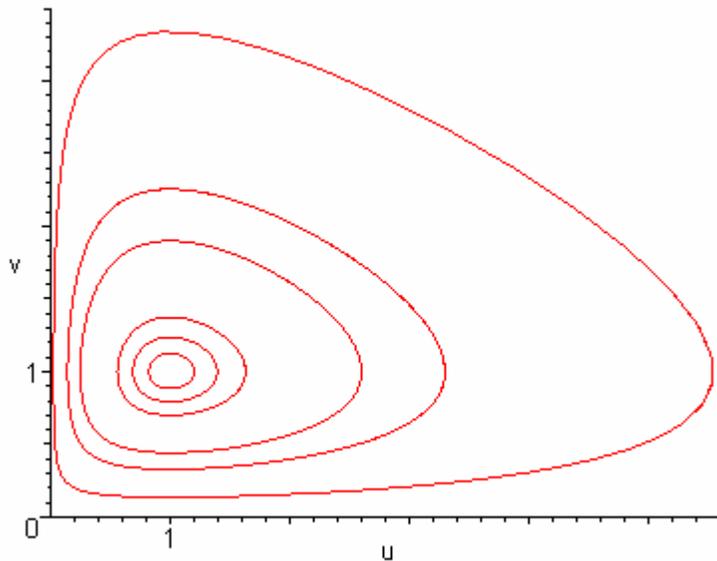
$$\frac{du}{d\tau} = u(1-v) \quad \frac{dv}{d\tau} = \alpha v(u-1) \quad (2)$$

On voit que $u(1-v) = \alpha v(u-1) = 0$ si $u = v = 0$ ou $u = v = 1$. Le système (2) possède donc 2 points d'équilibre. La solution au point (0,0) n'est cependant pas intéressante puisqu'elle correspond à l'extermination totale des deux espèces. Les valeurs propres de la matrice jacobienne associée au système (2) et évaluée en $u = v = 1$ sont $i\sqrt{\alpha}$ et $-i\sqrt{\alpha}$, toutes deux complexes dont la partie réelle est nulle. On sait alors que toutes les solutions autres que le point d'équilibre (1,1) sont périodiques.

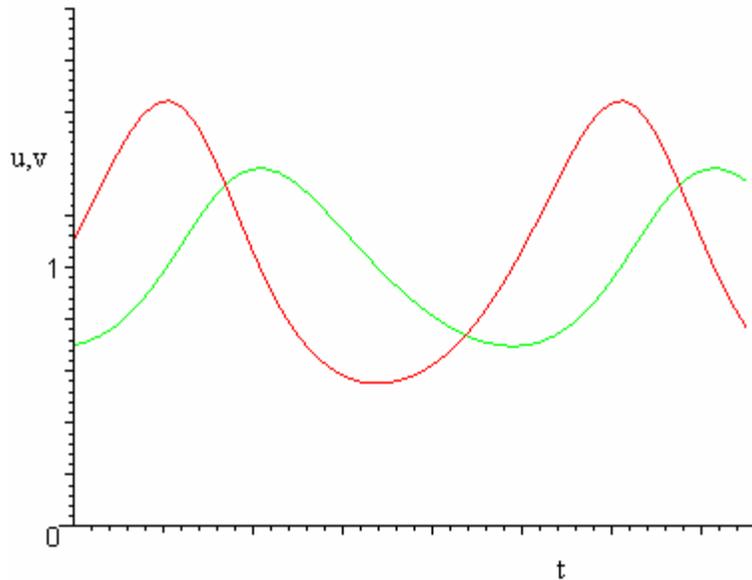
Nous pouvons aussi tracer le plan de phase, en intégrant directement

$$\frac{dv}{du} = \alpha \frac{v(u-1)}{u(1-v)}$$

Nous obtenons des trajectoires fermées, typiques des solutions périodiques.



Une solution périodique du système est donnée par le graphique suivant :



Bien que le modèle de Lotka-Volterra décrive le comportement cyclique des populations, souvent observé dans les interactions prédateur-proie, il n'en demeure pas moins qu'il n'est pas tout à fait réaliste. En effet, les équations (2) suggèrent qu'en l'absence de prédateur (c'est-à-dire $v = 0$), la population des proies croît exponentiellement, ce qui ne tient pas compte de la capacité du milieu à supporter la population des proies. De plus, le modèle de Lotka-Volterra n'est pas considéré comme un bon modèle mathématique, car il n'est pas « robuste » (ou structurellement stable, en termes techniques). En effet, une petite perturbation du système d'équations conduira généralement à un système qualitativement différent ayant un foyer stable (ou instable) au lieu d'un centre comme c'est le cas pour les équations de Lotka-Volterra.

Modèle plus réaliste

Pour pallier aux lacunes du modèle de Lotka-Volterra, un modèle plus réaliste devrait contenir une trajectoire qui soit un cycle limite, c'est-à-dire une trajectoire close et isolée. Ainsi une perturbation n'affecterait le cycle que pendant un certain temps, après quoi il reviendrait à la solution de départ.

De plus, pour être plus près de la réalité, la croissance des proies doit être logistique, c'est-à-dire qu'elle doit tendre vers une population d'équilibre, qui dépend du milieu et de l'espèce en question. Il en est de même pour les prédateurs : peu importe l'abondance de la nourriture, ils n'en consomment pas plus qu'ils ont besoin, la prédation est donc limitée.

Un exemple de ce type de modèle³ est donné par

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N \left[r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{kP}{N+D} \right] \\ \frac{dP}{dt} &= P \left[s \left(1 - \frac{hP}{N} \right) \right]\end{aligned}\tag{3}$$

Transformons les équations (3) en un système adimensionnel en considérant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}u(\tau) &= \frac{N(t)}{K} & v(\tau) &= \frac{hP(t)}{K} & \tau &= rt \\ a &= \frac{k}{hr} & b &= \frac{s}{r} & d &= \frac{D}{K}\end{aligned}$$

Le système (3) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u(1-u) - \frac{auv}{u+d} \\ \frac{dv}{d\tau} &= bv \left(1 - \frac{v}{u} \right)\end{aligned}\tag{4}$$

On peut montrer⁴ que le système (4) n'a qu'un seul point d'équilibre (u^* , v^*) situé dans le premier quadrant, lorsque $u^* = v^*$ et $u^* = \frac{(1-a-d) + \{(1-a-d)^2 + 4d\}^{1/2}}{2}$.

Ce point d'équilibre peut être stable ou instable dépendamment de la valeur des paramètres a, b et d choisis. Lorsque les paramètres engendrent un point d'équilibre instable, un cycle limite apparaît et les solutions sont cycliques.

3. Phénomène de diffusion

Lorsqu'on est en présence de particules ayant chacune un mouvement aléatoire, et qu'au plan macroscopique, il en résulte un mouvement régulier ou une forme régulière de l'ensemble des particules, on dit qu'on est en présence d'un phénomène de diffusion. Il peut s'agir de molécules chimiques, de bactéries ou, comme dans le sujet de ce travail, d'organismes tels que le plancton.

³ Murray J. D., *Mathematical Biology*, p.70-78.

⁴ Voir Murray J. D., *Mathematical Biology*, p.73.

On peut calculer le coefficient de diffusion D , d'unité (longueur)²/temps. Il mesure l'efficacité avec laquelle les particules se dispersent, passant d'une forte concentration à une faible. Ce coefficient dépend de la nature des particules ainsi que du milieu dans lequel elles se propagent.

4. Équations représentant le plancton

Plusieurs phénomènes entrent en jeu pour former la structure spatiotemporelle de la population du plancton. Il faut tout d'abord tenir compte du déplacement des organismes, dû à la diffusion. À plus grande échelle, la croissance des populations de plancton et l'interaction entre le phytoplancton et le zooplancton contribue aussi à former cette structure. Modéliser une telle situation nécessite donc l'utilisation d'équations de réaction-diffusion.

Soit $u(\mathbf{r},t)$, la fonction représentant l'abondance du phytoplancton selon le temps t et la position donnée par le vecteur \mathbf{r} et $v(\mathbf{r},t)$, celle décrivant la situation du zooplancton. En supposant que les facteurs environnementaux tels que la température, la salinité de l'eau et l'intensité de l'ensoleillement soient stables et uniformes, on peut décrire l'évolution d'une communauté aquatique de plancton par un système d'équations de réaction-diffusion de la forme suivante⁵ :

$$\begin{aligned} u_t &= D\nabla^2 u + \frac{\alpha}{b}u(b-u) - \gamma \frac{u}{u+H}v \\ v_t &= D\nabla^2 v + \kappa\gamma \frac{u}{u+H}v - \mu v \end{aligned} \tag{5}$$

On reconnaît le terme de diffusion dans la première partie de chacune des deux équations de (5). D est le coefficient de diffusion que l'on considère égal pour les deux groupes de plancton, ce qui est conforme à ce qu'on observe dans la nature. b , H , α , κ , μ et γ sont des constantes positives qui représentent différents facteurs biologiques : respectivement le taux de croissance maximal des proies, le coefficient d'utilisation de la nourriture, le taux de mortalité du prédateur, la population maximale des proies que peut supporter le milieu et, finalement, le niveau de demi saturation des proies.

Considérons les variables adimensionnelles

$$\tilde{u} = u/b \quad \tilde{v} = v\gamma/\alpha b \quad \tilde{t} = at \quad \tilde{r} = r(\alpha/D)^{1/2}$$

⁵ Le modèle présenté dans cette section est tiré de l'article paru dans la revue SIAM.

ainsi que les paramètres adimensionnels suivants :

$$h = H/b \quad m = \mu/\alpha \quad k = \kappa\gamma/\alpha$$

Le système d'équations (5) devient donc, en utilisant ces dernières quantités :

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla^2 u + u(1-u) - \frac{u}{u+h}v \\ v_t &= \nabla^2 v + k \frac{u}{u+h}v - mv \end{aligned} \tag{6}$$

Notons que les tildes sont omis et qu'il en sera ainsi à partir d'ici. Analysons tout d'abord la stabilité du système sans les termes de diffusion, c'est-à-dire du système :

$$\begin{aligned} u_t &= u(1-u) - \frac{u}{u+h}v \\ v_t &= k \frac{u}{u+h}v - mv \end{aligned} \tag{7}$$

Ce système possède 3 points d'équilibre : un au point (0,0) qui représente l'extinction totale des deux espèces, un autre au point (1,0) qui représente l'extinction du zooplancton, et finalement, au point (u^*, v^*) où coexistent le zooplancton et le phytoplancton. u^* et v^* sont donnés par

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{rh}{1-r} \\ v^* &= (1-u^*)(h+u^*) \end{aligned} \tag{8}$$

où $r = m/k$. Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice jacobienne J associée au système (7) évaluée au point (u^*, v^*) sont données par les racines de $\lambda^2 - \lambda \text{tr}(J) + \det(J) = 0$. Pour que la solution (u^*, v^*) soit asymptotiquement stable, il faut que $\text{Re}(\lambda) < 0$ pour les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice jacobienne.

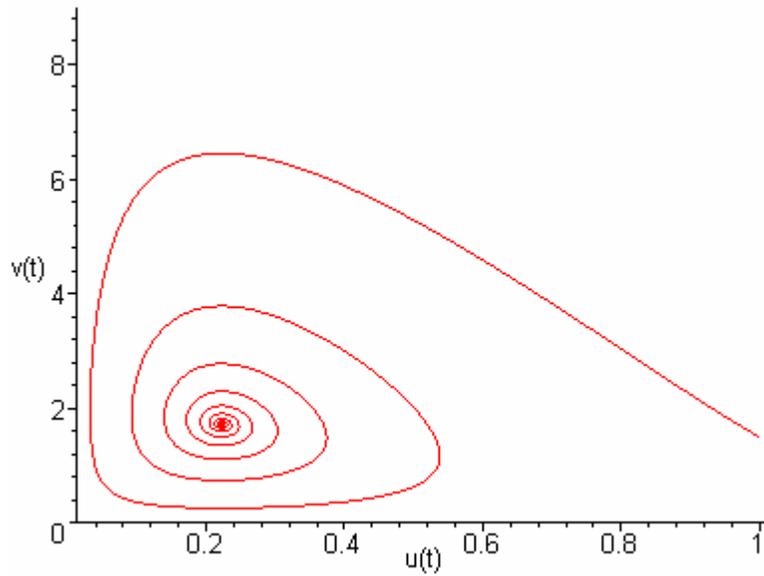
On a que le déterminant de J est positif si et seulement si $h < \frac{1-r}{r}$, alors, dans ce cas, (u^*, v^*) est stable si et seulement si la trace de J est négative. On trouve donc que la solution (u^*, v^*) est un foyer stable si

$$\frac{1-r}{1+r} < h < \frac{1-r}{r} \tag{9}$$

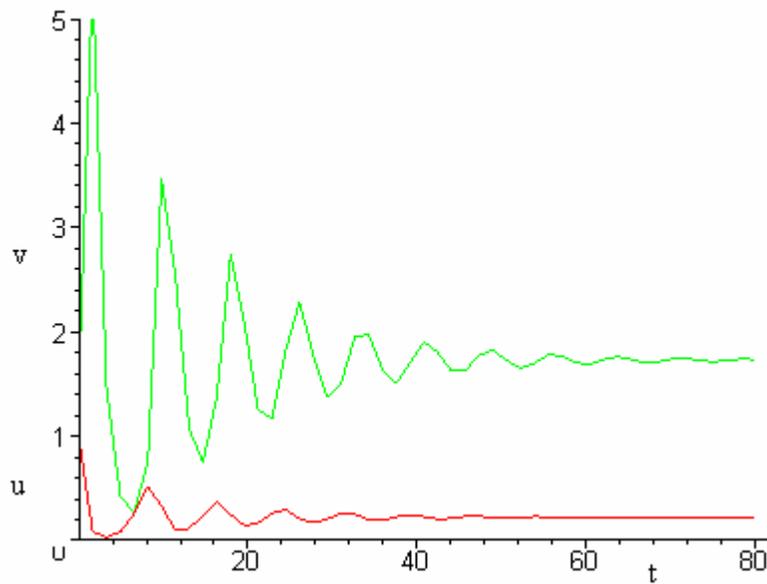
Le point d'équilibre (u^*, v^*) est par contre instable si

$$0 < h < \frac{1-r}{1+r} \quad (10)$$

Pour illustrer la première situation (9), prenons par exemple, $h = 2$, $k = 10$ et $m = 1$ (donc $r = 0.1$). On voit bien dans le plan de phase la trajectoire d'une solution tendant vers le point d'équilibre stable. Le graphique de u et v (respectivement en rouge et en vert) en fonction de t montre que les solutions tendent vers u^* et v^* . Avec ce choix de paramètres, $u^* = 2/9$ et $v^* = 140/81$.

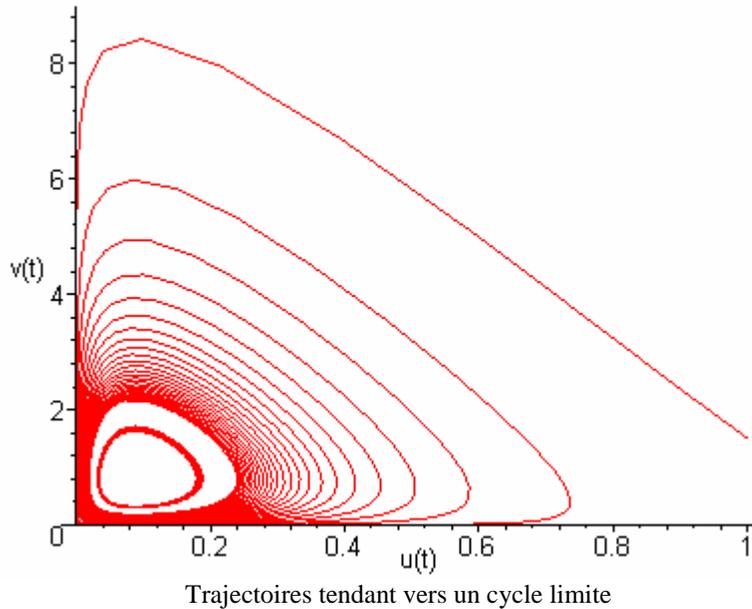


Plan de phase pour un point d'équilibre stable



Solution tendant vers le point d'équilibre

Dans le cas où le point d'équilibre est instable (10), avec par exemple $h= 0.8$, $k = 10$ et $m=1$, on obtient des trajectoires qui tendent vers un cycle limite. Deux trajectoires différentes sont illustrées dans le graphique suivant : la première ($u(0) = 1$ et $v(0) = 1.5$) tend vers le cycle limite par l'extérieur, la seconde trajectoire ($u(0) = 0.1$ et $v(0) = 1.7$) s'éloigne du point d'équilibre $(u^*, v^*) = (4/45, 328/405)$ mais reste confinée à l'intérieur du cycle limite.



5. La méthode des éléments finis

Formulation variationnelle

L'une des méthodes numériques pour résoudre des équations aux dérivées partielles les plus répandues est la méthode des éléments finis. Avec cette méthode, on ne résout pas directement l'équation aux dérivées partielles, mais plutôt ce qu'on appelle la formulation variationnelle. Cette dernière est obtenue en multipliant l'équation différentielle par une fonction test $w(x)$ et en intégrant sur le domaine Ω . En appliquant le théorème de la divergence, on obtient la formulation variationnelle, une expression de la forme $a(u,w) = l(w)$. On peut montrer que toute solution $u(x)$ de la formulation variationnelle est solution de l'équation de départ.

Si $a(u,w)$ est une forme bilinéaire, continue et coercive, et $l(w)$ continue et linéaire, le théorème de Lax-Milgram⁶ nous assure alors de l'existence d'une solution unique u telle que $a(u,w) = l(w)$ pour tout $w(x)$ dans l'espace fonctionnel approprié.

⁶ Voir notes de cours de A. Fortin et A. Garon.

Problèmes non linéaires et instationnaires

Lorsque le problème n'est pas linéaire, on ne peut plus appliquer le théorème de Lax-Milgram. La stratégie pour résoudre une équation non linéaire est de passer par une séquence de problèmes linéaires. La méthode de Newton est d'un grand secours. On remplace tout d'abord la solution cherchée u par $u_0 + \delta u$, où u_0 est une approximation initiale et δu la correction, l'inconnue du nouveau problème. On peut maintenant linéariser le système en faisant un développement de Taylor autour de u_0 des parties non linéaires de l'équation. On est maintenant en mesure de trouver δu par la méthode des éléments finis. On pose ensuite $u_1 = u_0 + \delta u$, et on recommence, jusqu'à ce que δu soit suffisamment petite.

Concernant les problèmes instationnaires, la stratégie est de remplacer la dérivée par rapport au temps par une formule de différences finies. On fixe tout d'abord un pas de temps Δt , la solution au temps 0 étant connue. Plusieurs schémas existent, celui utilisé dans le cas présent est le schéma de Gear. Il s'agit de poser, au temps $t_{n+2} = (n+2)\Delta t$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+2}) = \frac{3u^{n+2} - 4u^{n+1} + u^n}{2\Delta t} + o(\Delta t^2)$$

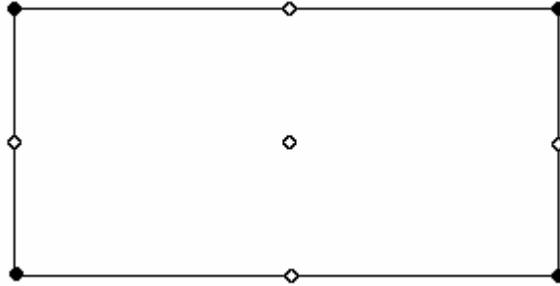
Dans ce schéma, u^{n+1} et u^n sont connues par les étapes précédentes. u^0 est la solution initiale, et u^1 est généralement calculée avec une autre méthode à un pas. On recherche donc u^{n+2} .

Maillage et éléments

Une autre caractéristique de la méthode des éléments finis est qu'on approxime la fonction cherchée non pas sur le domaine entier, mais sur des formes géométriques simples nommées éléments, généralement des triangles ou des quadrilatères (d'où le nom de méthode des éléments finis) qui recouvrent le domaine. On identifie ensuite sur chaque élément les nœuds géométriques, qui permettent de définir la géométrie de l'élément en question, ainsi que les nœuds de calculs (qui comprennent les nœuds géométriques), puis on associe à chaque nœud une ou plusieurs inconnues que l'on nomme degré de liberté. Une fonction d'interpolation, qui sera construite élément par élément, est ensuite associée à chaque degré de liberté. Comme on s'est assuré de la continuité des fonctions à la frontière entre deux éléments, on peut assembler les résultats obtenus pour chaque élément et obtenir ainsi une approximation assez juste.

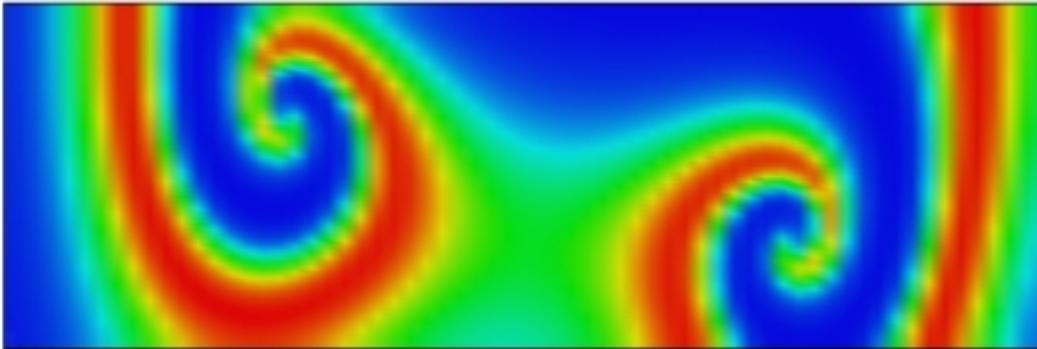
Par exemple, dans un maillage qui sera considéré plus loin, on a découpé le domaine, un rectangle de longueur L_x et de largeur L_y , en 16 384 éléments, chaque élément étant un rectangle de longueur $L_x/128$ et de largeur $L_y/128$. Chaque élément possède 4 nœuds géométriques (en noir sur le schéma) qui définissent sa géométrie. Dans le cas présent, il

Il y a au total 9 nœuds, comprenant les nœuds de calculs. Comme on associe 2 degrés de liberté à chaque nœud, on obtient en tout 132 098 inconnues à calculer à chaque itération de la méthode de Newton et pour chaque pas de temps. Il a fallu près de 48 heures pour calculer toutes ces inconnues...

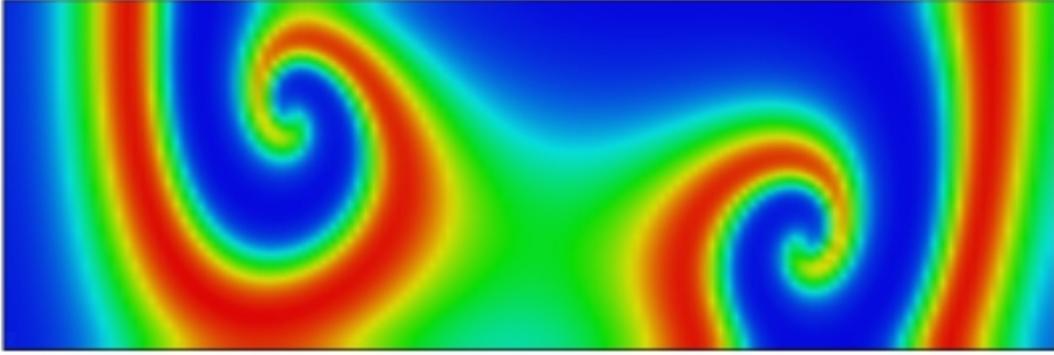


Exemple d'élément : un rectangle

Pour montrer l'efficacité des maillages plus fins, comparons les solutions d'un problème au même pas de temps, mais calculées avec un maillage différent. La première image a été calculée avec un maillage 4096 éléments, soit 64 par 64 éléments. La seconde a été obtenue avec un maillage deux fois plus fin : on a divisé chaque arête du premier maillage en deux. On obtient donc quatre fois plus d'éléments, c'est-à-dire 16 384 éléments. On voit que la solution calculée avec un maillage plus fin est plus précise.



Solution calculée avec un maillage de 64 éléments par 64.



La même solution calculée cette fois avec un maillage de 128 éléments par 128.

6. Application aux équations représentant le plancton

En dimension 2, le système (6) représentant l'évolution du plancton dans le temps et l'espace devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} &= \nabla^2 u + u(1-u) - \frac{u}{u+h} v \\ \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} &= \nabla^2 v + k \frac{u}{u+h} v - mv\end{aligned}\tag{11}$$

On suppose ici que la distribution verticale est homogène et que les facteurs environnementaux sont stables et uniformes. On suppose de plus qu'aux frontières du domaine, le flux de matériel est nul, c'est-à-dire que $\partial u / \partial \vec{n} = 0$ et $\partial v / \partial \vec{n} = 0$, où \vec{n} est le vecteur normal à la frontière Γ du domaine. Cette dernière supposition est en fait une condition aux limites de type Neumann.

Le système d'équations (11) peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned}u_t - \nabla^2 u &= f_1(u, v) \\ v_t - \nabla^2 v &= f_2(u, v)\end{aligned}\tag{12}$$

On a ici un cas non linéaire, à cause des expressions $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$ qui font intervenir des termes en u et v , et instationnaire. On peut donc écrire une formulation dite quasi-variationnelle, toujours en multipliant chaque équation de (12) par des fonctions tests w et en intégrant sur le domaine Ω . L'application du théorème de la divergence donne :

$$\int_{\Omega} u_t w_1 dV - \int_{\Gamma} w_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_1 dV = \int_{\Omega} w_1 f_1(u, v) dV \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} v_t w_2 dV - \int_{\Gamma} w_2 \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} ds + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w_2 dV = \int_{\Omega} w_2 f_2(u, v) dV$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} = 0$ par hypothèse, on obtient la formulation quasi-variationnelle

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t w_1 dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_1 dV &= \int_{\Omega} w_1 f_1(u, v) dV \\ \int_{\Omega} v_t w_2 dV + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w_2 dV &= \int_{\Omega} w_2 f_2(u, v) dV \end{aligned} \quad (14)$$

On commence par appliquer le schéma de Gear sur u_t et v_t dans (14), c'est-à-dire qu'on remplace u_t et v_t par la formule de différences finies. On doit aussi remplacer u par u^{n+2} et v par v^{n+2} dans les autres termes de la formulation quasi-variationnelle. Pour chaque pas de temps, on a un système non linéaire à résoudre. Ensuite, par Newton, on pose $u_{k+1}^{n+2} = u_k^{n+2} + \delta u$ et $v_{k+1}^{n+2} = v_k^{n+2} + \delta v$. On cherche donc la solution au pas de temps $(n+2)\Delta t$ et à l'itération $k+1$ de la méthode de Newton. On remplace alors $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$ par leur développement de Taylor respectifs, et en regroupant les termes connus et inconnus du même côté de l'égalité, on obtient une forme que l'on peut résoudre avec la méthode des éléments finis :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{3\delta u w_1}{2\Delta t} dV + \int_{\Omega} \nabla \delta u \cdot \nabla w_1 dV - \int_{\Omega} w_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(u_k^{n+2}, v_k^{n+2}) \delta u + \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_k^{n+2}, v_k^{n+2}) \delta v \right) dV \\ &= - \left[\int_{\Omega} \frac{3u_k^{n+2} - 4u^{n+1} + u^n}{2\Delta t} w_1 dV + \int_{\Omega} \nabla u_k^{n+2} \cdot \nabla w_1 dV - \int_{\Omega} w_1 f_1(u_k^{n+2}, v_k^{n+2}) dV \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{3\delta v w_2}{2\Delta t} dV + \int_{\Omega} \nabla \delta v \cdot \nabla w_2 dV - \int_{\Omega} w_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}(u_k^{n+2}, v_k^{n+2}) \delta u + \frac{\partial f_2}{\partial v}(u_k^{n+2}, v_k^{n+2}) \delta v \right) dV \\ &= - \left[\int_{\Omega} \frac{3v_k^{n+2} - 4v^{n+1} + v^n}{2\Delta t} w_2 dV + \int_{\Omega} \nabla v_k^{n+2} \cdot \nabla w_2 dV - \int_{\Omega} w_2 f_2(u_k^{n+2}, v_k^{n+2}) dV \right] \end{aligned}$$

Ayant trouvé la valeur de δu et δv , on pose $u_{k+1}^{n+2} = u_k^{n+2} + \delta u$ et $v_{k+1}^{n+2} = v_k^{n+2} + \delta v$ qui sont maintenant tous connus, et on recommence en posant $u_{k+2}^{n+2} = u_{k+1}^{n+2} + \delta u$ et $v_{k+2}^{n+2} = v_{k+1}^{n+2} + \delta v$,

et ainsi de suite tant que δu et δv ne sont pas suffisamment petits; on passe alors au pas de temps suivant.

7. Résultats

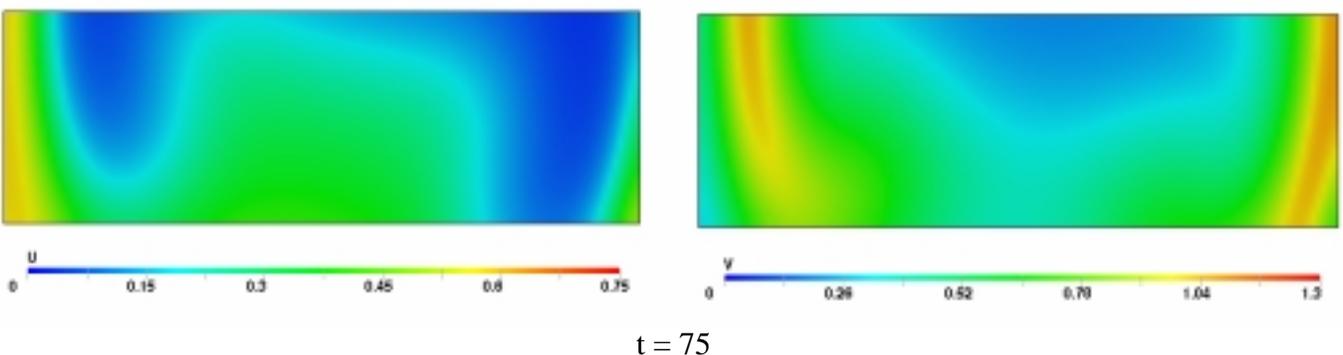
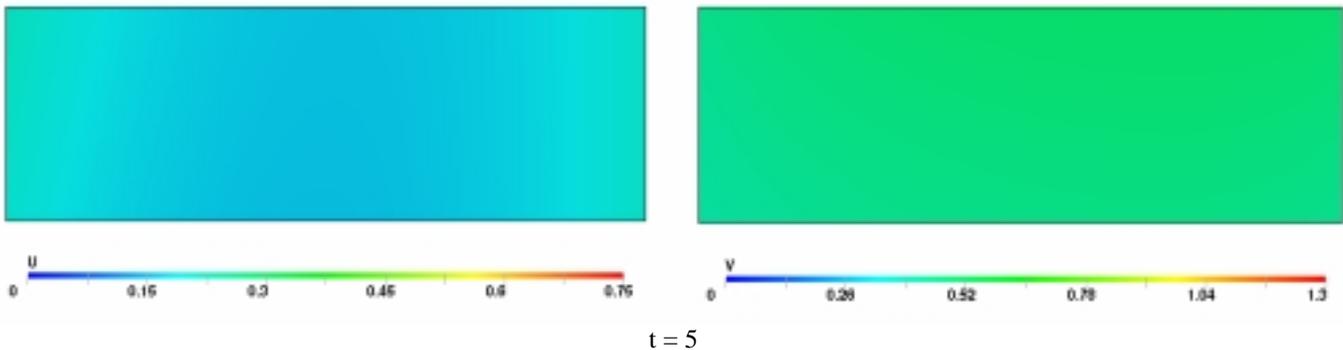
La distribution initiale qu'on a utilisée dans l'expérimentation est donnée par :

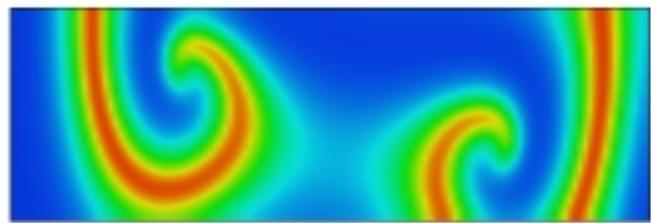
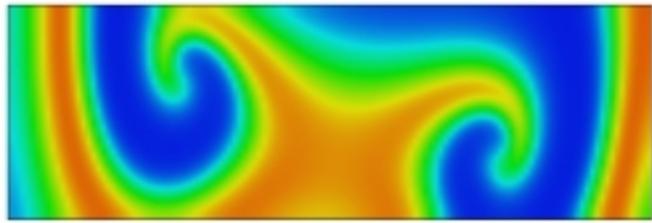
$$u(x,y,0) = u^* - \varepsilon_1(x - 0.1y - 225)(x - 0.1y - 675)$$

$$v(x,y,0) = v^* - \varepsilon_2(x - 450) - \varepsilon_3(y - 150)$$

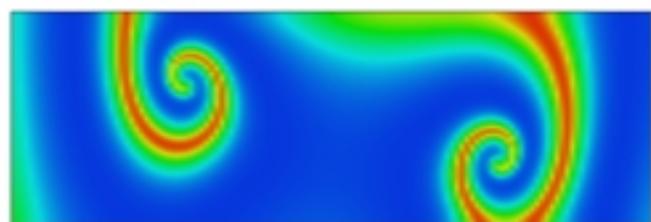
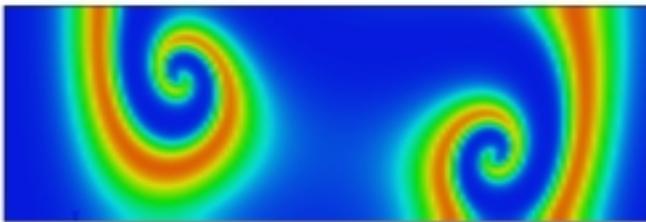
où $\varepsilon_1 = 2 \cdot 10^{-7}$, $\varepsilon_2 = 3 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_3 = 1.2 \cdot 10^{-4}$. Ces équations représentent le cas où tous les organismes sont concentrés en une bande presque verticale au centre du rectangle. Les paramètres h , k et m valent respectivement 0.4, 2 et 0.6. Le domaine sur lequel on a travaillé est un rectangle de dimension 900 par 300.

On montre ici les résultats pour les variables u et v , qui représente respectivement la distribution du phytoplancton et du zooplancton, à différents temps. À $t = 5$, la distribution n'a pas beaucoup évolué et ressemble beaucoup à la distribution initiale. Au temps 75, une forme commence à émerger. À $t = 125$, on voit le début de spirales, qui s'accroissent à $t = 175$ et $t = 275$. On voit ensuite, à $t = 375$, le début de la destruction des spirales par leur centre et l'apparition d'une structure irrégulière qui, comme le montre la solution au temps 600, s'accroît. Elle finira par recouvrir tout le domaine.

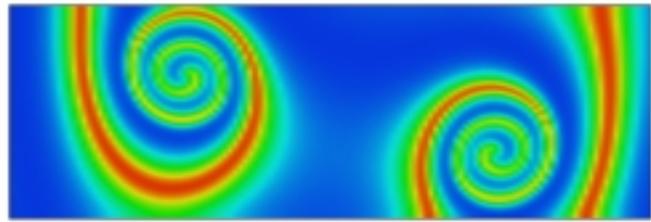
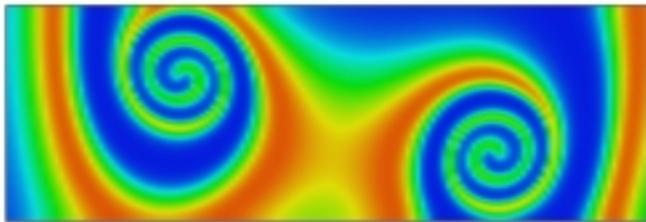




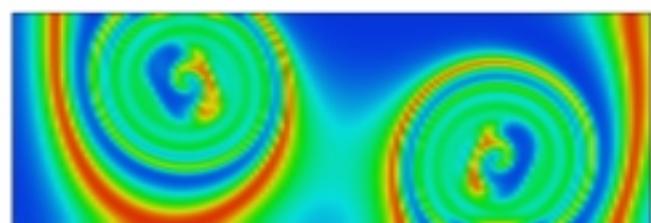
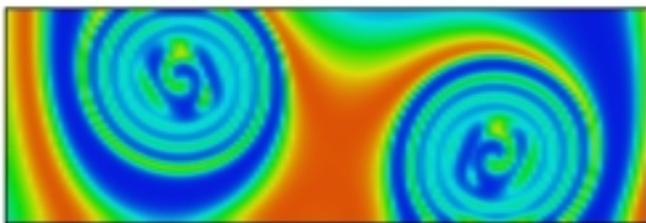
$t = 125$



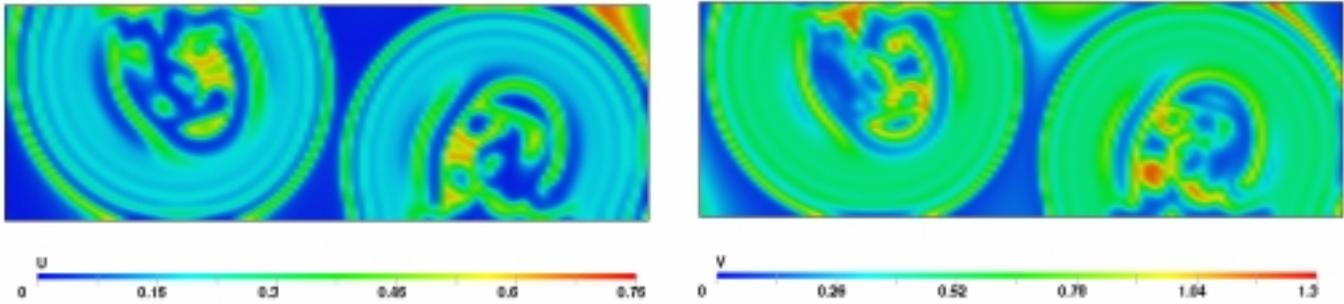
$t = 175$



$t = 275$



$t = 375$



$t = 600$

Conclusion

En modifiant les équations de Lotka-Volterra, l'un des modèles les plus simples, on arrive à un modèle plus complexe qui décrit mieux les mouvements de population du plancton. Bien que le modèle présenté dans ce travail soit près de la réalité, plusieurs facteurs environnementaux ont été négligés. Pour obtenir un modèle encore plus réaliste, on devra tenir compte d'encore plus de facteurs, complexifiant davantage les équations. Puisque la puissance des ordinateurs va en augmentant, il deviendra plus facile de résoudre numériquement des problèmes de plus en plus complexes, et de plus en plus réalistes, aidant ainsi la compréhension de nos océans.

BIBLIOGRAPHIE

Arrowsmith D. K., Place C. M., *Dynamical Systems*, Chapman & Hall, London, 1992.

Bougis P., *Écologie du plancton marin*, tomes I et II, Masson et C^{ie} Éditeurs, Paris, 1974.

Ehrhardt J.-P., Seguin G., *Le plancton : composition, écologie, pollution*, Éditions Gauthier-Villars, Paris, 1978.

Fortin A., Garon A., *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, notes de cours.

Medvinski A. B., Petrovskii S.V., Tikhonova I.A., Malchow H., Li B-L, *Spatiotemporal Complexity of Plankton and Fish Dynamics*, SIAM Review, Vol. 44, No. 3, pp. 311-370, 2002.

Murray J. D., *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, 1989.