

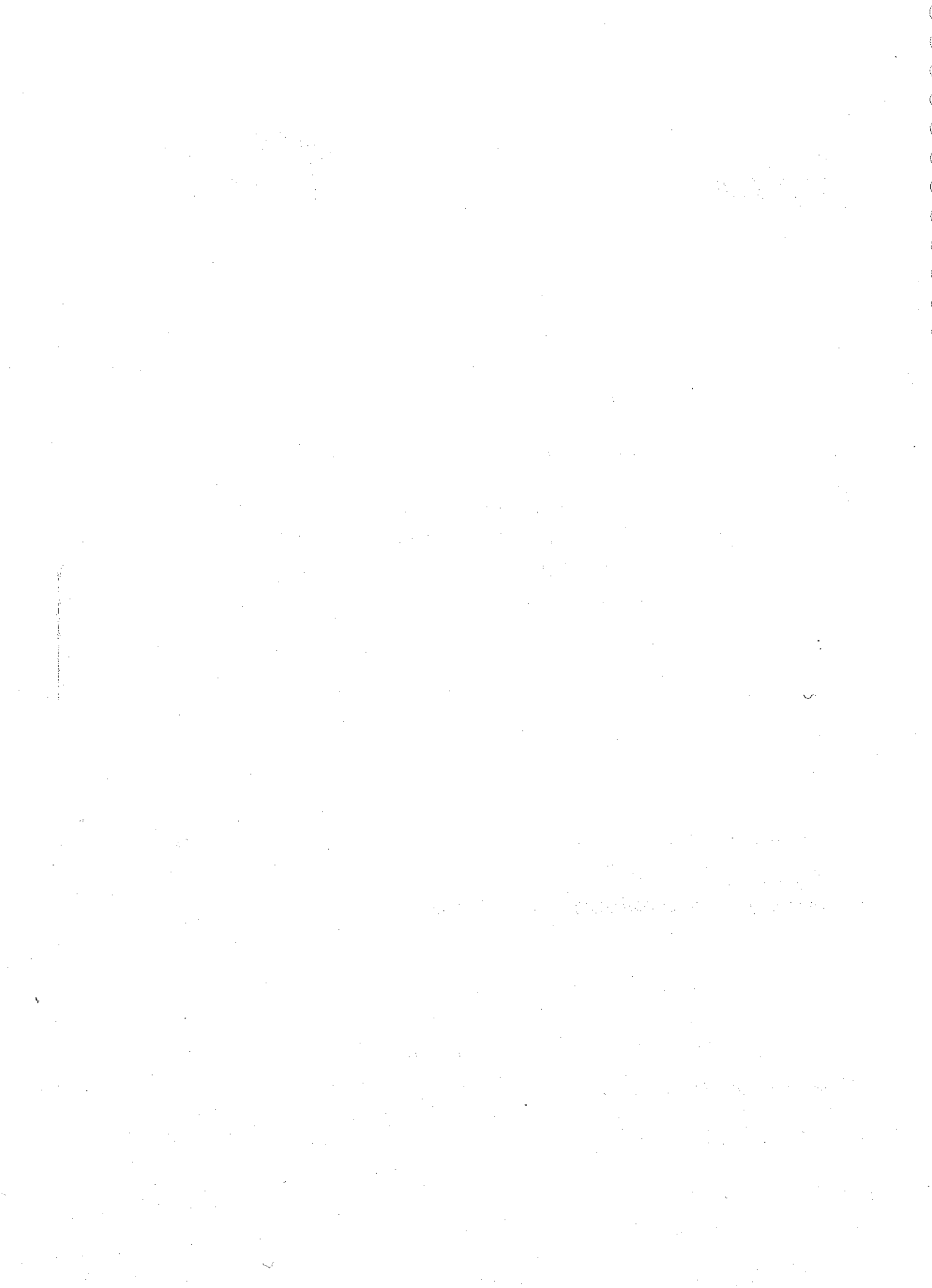
*Implantation  
d'un modèle de turbulence :  
Le modèle de Spalart-Allmaras*

RAPPORT DE STAGE DE :

**Sylvain Roy**

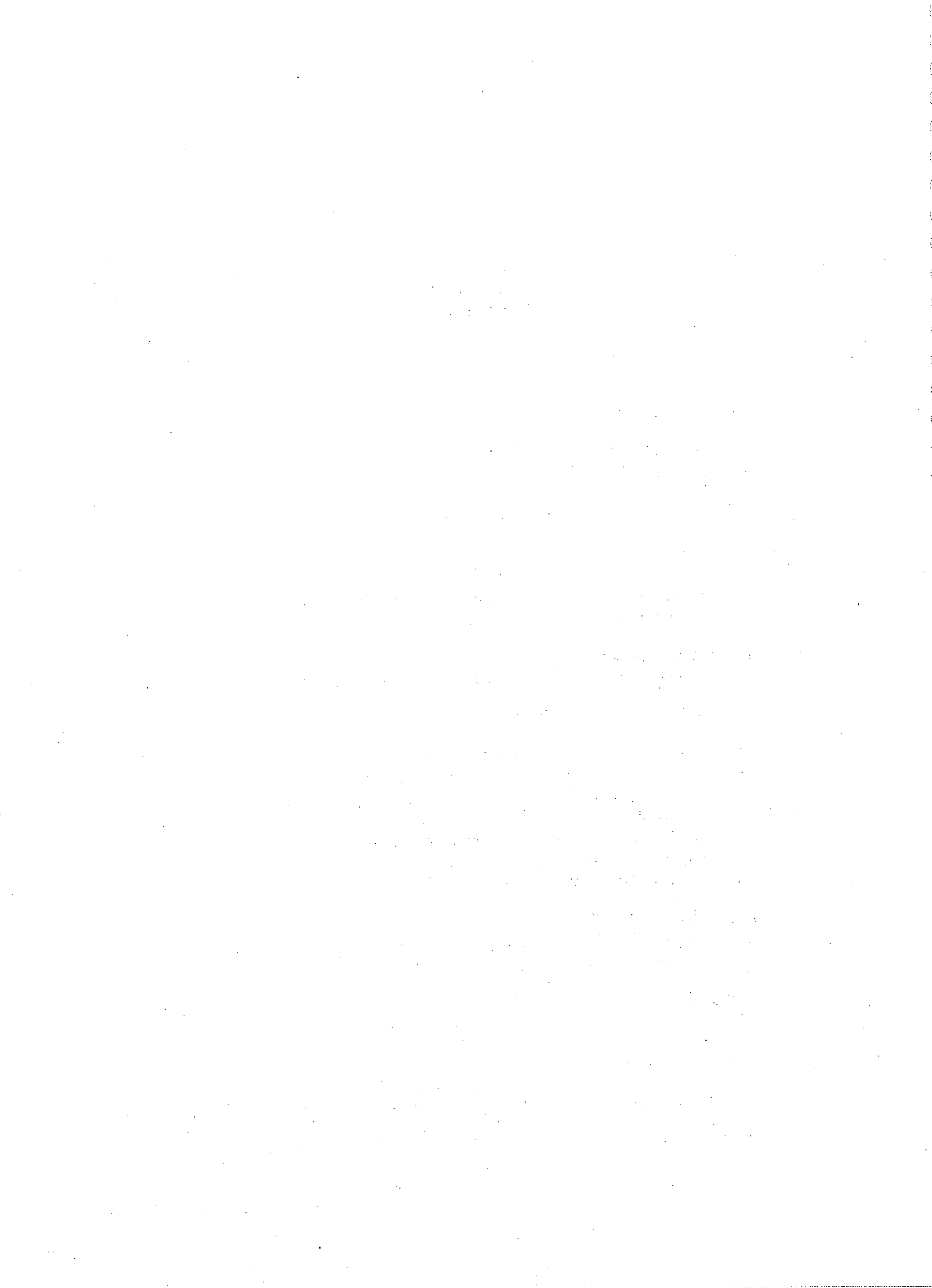
Département de mathématiques et de statistique

GIREF-rap avril 2004



# Un modèle de turbulence : le modèle de Spalart-Allmaras

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Les équations de Navier-Stokes</b>	<b>4</b>
2.1	Les fluides incompressibles . . . . .	4
2.2	La viscosité . . . . .	5
2.3	Les équations de Navier-Stokes pour les fluides newtoniens incompressibles .	7
<b>3</b>	<b>La turbulence</b>	<b>8</b>
3.1	Les écoulements laminaires et turbulents . . . . .	9
3.2	La détermination du mouvement d'un fluide dans un écoulement turbulent .	10
3.3	La force de cisaillement turbulente . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Adimensionalisation</b>	<b>13</b>
4.1	Adimensionalisation des équations de Navier-Stokes . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Le modèle de Spalart-Allmaras</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Formulation variationnelle et linéarisation</b>	<b>15</b>
6.1	Les grandes lignes de la méthode des élément finis . . . . .	15
6.2	La méthode de Ritz . . . . .	16
6.3	Linéarisation . . . . .	17
6.4	Problème stationnaire versus problème instationnaire . . . . .	18
6.5	Le modèle de Spalart-Allmaras . . . . .	18
6.6	Les équations de Navier-Stokes . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Comparaison des résultats</b>	<b>21</b>
7.1	Le logiciel FLUENT . . . . .	21
7.2	Résultats . . . . .	21
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>25</b>



# 1 Introduction

Depuis fort longtemps, les scientifiques se sont intéressés au mouvement de l'air et de l'eau, les deux fluides les plus courants. Que ce soit pour expliquer la trajectoire des boulets de canon ou pour mettre au point des avions plus performants, ces scientifiques poursuivaient un but commun : mieux comprendre les fluides et leurs mouvements. Il y environ 170 ans, un dénommé Claude Louis Henri Navier, énonce les équations de Navier-Stokes, à la base de la mécanique des fluides.

La mécanique des fluides est la discipline qui s'intéresse au comportement des liquides et des gaz au repos ou bien en mouvement. Celle-ci englobe une vaste gamme de problèmes de mécanique passant des capillaires sanguins à l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion. Grâce à elle, on peut expliquer pourquoi la surface trouée d'une balle de golf lui confère une meilleure portée, pourquoi la forme aérodynamique des ailes d'avion et leur surface douce lui assure un vol plus stable.

Depuis l'acrédition des équations de Navier-Stokes, les mécaniciens des fluides s'intéressent de plus en plus à une force qui est impliquée dans les équations de Navier-Stokes, la force associée à la turbulence dans les fluides. De nombreux modèles ont déjà été élaborés dans le but de cerner celle-ci. Il y a 10 ans, en 1994, Spalart et Allmaras, deux physiciens du Boeing Commercial Airplane group à Seattle, publient un modèle fort intéressant de turbulence à une équation. Aujourd'hui, ce modèle est utilisé par de nombreux chercheurs à travers le monde, la plupart du temps en utilisant des logiciels basés sur la méthode des volumes finis.

Or, depuis 1996, le groupe interdisciplinaire de recherche en éléments finis (GIREF) développe un logiciel de calculs d'éléments finis : MEF++. Celui-ci a été créé dans le but de servir d'outil de recherche dans le domaine de la modélisation numérique. Il s'agit d'un programme d'éléments finis très général pouvant résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles fortement couplées. Il résulte des efforts conjoints de plusieurs membres du GIREF. Son objectif principal est le développement conjoint d'outils de modélisation numérique principalement par la méthode des éléments finis. Les membres du Projet MEF++ ont ainsi accès à une banque très vaste d'outils et d'applications pouvant servir à la recherche universitaire ou pour l'enseignement.

Jusqu'à aujourd'hui, bien que MEF++ soit très polyvalent, les mécaniciens des fluides n'avaient pas accès à des modèles de turbulences. C'est dans le but de combler ce manque que le présent projet a vu le jour. L'objectif sera d'implanter dans le code de MEF++ le modèle de Spalart-Allmaras à une équation.

Étant donné que ce modèle s'intéresse au calcul d'une force impliquée dans les équations de Navier-Stokes (celle associée à la turbulence), celui-ci sera combiné aux équations de Navier-Stokes. On traitera donc, dans ce travail, essentiellement de fluides newtoniens incompressibles.

## 2 Les équations de Navier-Stokes

Énoncé en 1821 par Claude Louis Henri Navier, les équations de Navier-Stokes décrivent le mouvement des fluides. À cette époque, celles-ci n'étaient pas très bien comprises, en fait Navier s'était tout simplement basé sur les équations d'Euler auxquelles il a pris en compte les forces intermoléculaires. Étant donné que Navier n'était pas à ce moment en mesure de comprendre toute la physique du problème (il n'avait aucune intuition sur la contrainte de cisaillement des fluides) on ne lui accordera pas le crédit de cette découverte. Il faudra attendre les travaux de Georges Gabriel Stokes en 1845 avant de bien saisir le concept de contrainte de cisaillement. La résolution de ces équations fait partie d'un des sept problèmes du millénaire, problèmes énoncés en 2000 pour faire suite à la fameuse conférence de Hilbert qui avait lieu 100 ans plus tôt. En fait, bien que l'on puisse approcher la solution aussi près que l'on veut, il n'existe toujours pas de solution analytique à ces équations. Pour cette raison, la résolution de ces équations nous conduit à la résolution de problèmes de dimensions infinies. On peut toutefois estimer les solutions de ceux-ci en ramenant les problèmes à des dimensions finies. Pour ce faire, on va calculer une solution sur un domaine de calculs discrétisé par des méthodes comme celle des éléments finis ou des volumes finis.

### 2.1 Les fluides incompressibles

Qu'est-ce qu'un fluide? Qualitativement, tous et chacun ont une petite idée de ce que peut être un fluide : c'est un peu comme différencier un solide d'un fluide. L'un est facilement déformable et l'autre ne l'est pas.

On peut définir un **fluide** comme une substance qui, par l'action d'une force d'intensité quelconque se déforme de façon continue. Le métal, par exemple, n'est pas un fluide, car celui-ci ne se déformera pas de façon continue : lorsqu'il atteindra sa limite d'élasticité il rompra d'un coup sec. L'eau et l'air sont de bons exemples de fluides.

De par leur nature, les fluides sont très sensibles aux variations de pression. En effet, comme toute force aussi faible soit elle déforme le fluide, une variation de pression aura automatiquement un effet sur celui-ci. C'est pourquoi il est essentiel de bien comprendre comment ces variations vont agir sur les différents fluides.

Les fluides peuvent être divisés en deux grandes catégories : les fluides compressibles comme l'air qui sous l'action d'une pression va modifier son volume et les fluides incompressibles, ceux qui, comme l'eau, conserveront leur volume initial lors de l'application d'une pression. Bref, un **fluide incompressible** est un fluide dont la densité  $\rho$  constante ne varie pas dans le temps et dans l'espace. C'est-à-dire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

ou encore

$$\nabla \rho = 0$$

Or, l'équation de continuité nous dit que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho U)$$

où  $U$  représente la vitesse du fluide. Comme

$$\nabla \cdot (\rho U) = \rho \nabla \cdot U + U \cdot \nabla \rho = \rho \nabla \cdot U$$

on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot U$$

alors

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\rho} * 0 = 0 = -\nabla \cdot U$$

Ainsi, la condition se ramène à :

$$\nabla \cdot U = 0$$

## 2.2 La viscosité

Pour bien caractériser le mouvement des fluides, on a vu que la densité de celui-ci jouait un rôle important dans l'identification du type de fluide auquel on s'intéresse. Une autre caractéristique des fluides s'avère essentielle à la compréhension du mouvement dans les fluides: la viscosité de celui-ci. Afin de mieux comprendre le concept de viscosité, regardons comment celle-ci est calculée. Imaginez un fluide disposé entre deux plaques (voir figure 1). En appliquant une force  $P$  sur la plaque du haut et en gardant fixe celle du bas, on déplace la plaque du haut d'une petite distance  $\delta a$  (la droite  $AB$  sera déplacée vers la droite  $AB'$  d'un angle  $\delta\beta$ ). Afin de résister à la force qui lui est appliquée, le fluide générera une force de cisaillement  $\tau$  à la limite entre la plaque du haut et le fluide pour former un équilibre entre les forces ( $P = \tau A$  où  $A$  représente l'aire de la plaque).

Si on observe le mouvement de la plaque du haut, on remarquera que celle-ci, après que l'équilibre entre les forces ait été atteint, se déplacera à vitesse constante  $u_0$ . De plus, les particules de fluide en contact avec la plaque du haut voyagera à cette même vitesse  $u_0$  tandis que celles en contact avec la plaque du bas auront une vitesse nulle. Ici, on a considéré que le fluide collait aux parois solides. En fait, cette condition est satisfaite pour tous les

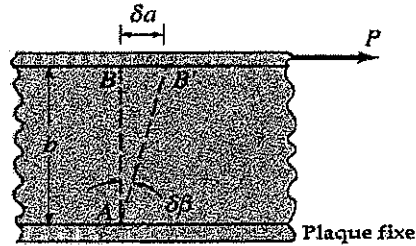


Figure 1: Fluide coincé entre deux plaques solides

fluides visqueux. Prenons maintenant un petit intervalle de temps  $\delta t$ . Soient  $\delta\beta$  l'angle de rotation de la droite imaginaire  $AB$ ,  $\delta a$  le déplacement de la plaque et  $b$  la distance entre les plaques, alors on a

$$\delta\beta \approx \tan \delta\beta = \frac{\delta a}{b}$$

Comme  $\delta a = u_0 \delta t$ , il suit que

$$\delta\beta = \frac{u_0 \delta t}{b}$$

On appellera le **taux de variation de la contrainte de cisaillement**  $\dot{\gamma}(U)$  le taux de changement de  $\delta\beta$ .

$$\dot{\gamma}(U) = \frac{\delta\beta}{\delta t}$$

Dans notre cas,

$$\dot{\gamma}(U) = \frac{u_0}{b} = \frac{dU}{dy}$$

Maintenant, que peut-on dire de la vitesse des particules entre les plaques? En fait, cela dépend du fluide. Pour la majorité des fluides communs comme l'eau, l'huile et l'air, la force de cisaillement  $\tau$  sera proportionnelle au taux de variation de la contrainte de cisaillement. On appelle ces fluides des **fluides newtoniens**. On ne discutera pas ici des autres fluides, dits non-newtoniens. On définit la **viscosité**  $\mu$  comme étant la constante de proportionnalité entre la force de cisaillement et le taux de variation de la contrainte de cisaillement.

$$\tau = -2\mu\dot{\gamma}(U) \tag{1}$$



### 2.3 Les équations de Navier-Stokes pour les fluides newtoniens incompressibles

Comme nous l'avons vu, lorsqu'un fluide est incompressible, la divergence de la vitesse  $U$  doit être nulle. C'est-à-dire :

$$\nabla \cdot U = 0$$

De plus, selon la seconde loi de Newton appliquée aux fluides, une force  $F$  engendre une variation de la quantité de mouvements  $Q$ . Donc

$$F = \frac{dQ}{dt}$$

ou encore

$$\frac{F}{V} = \frac{1}{V} \frac{dQ}{dt}$$

où  $V$  est le volume du fluide. Comme  $Q = mU$  où  $m$  est la masse du fluide et que la densité  $\rho$  du fluide est constante, alors

$$\frac{F}{V} = \frac{m}{V} \frac{DU}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U$$

Voyons maintenant l'interprétation du terme de gauche de 2.3. Il s'agit ici de représenter les forces qui agissent à l'intérieur du fluide. On a vu que la force de cisaillement était donnée par l'équation 1 ainsi, la force générée par le cisaillement  $F_{cisail}$  peut-être définie comme suit.

$$\frac{F_{cisail}}{A} = \tau = -2\mu\dot{\gamma}(U)$$

En trois dimensions, la force de cisaillement doit être calculée composante par composante et ce, en évaluant, pour chacune d'elle, le taux de variation de la contrainte de cisaillement dans chacune des directions  $x_i$ . Ainsi, pour un fluide incompressible, la force de cisaillement prend la forme du tenseur suivant :

$$\tau_{ij} = -2\mu\dot{\gamma}_{ij}$$

où

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Les composantes de la force de cisaillement par unité de volume sont alors données par

$$\frac{F_i}{V} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

ou encore

$$\frac{F_{cisail}}{V} = -\nabla \cdot (-2\mu \dot{\gamma}(U))$$

Une autre force qui joue un rôle important dans la déformation des fluides : la pression. En fait, chaque particule de fluide réagit à la pression  $P$  qu'on lui applique en produisant la même force, mais en sens contraire. On a donc

$$\frac{F_{pression}}{V} = -\nabla P$$

D'autres forces, comme la gravité, peuvent aussi avoir des effets sur le fluide. On exprimera celles-ci par

$$\mathcal{F} = \frac{F_{autres}}{V}$$

L'équation 2.3 devient alors

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \cdot \nabla U = -\nabla P - \nabla \cdot (-2\mu \dot{\gamma}(U)) + \mathcal{F}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \cdot (-2\mu \dot{\gamma}(U)) + \frac{\mathcal{F}}{\rho} \quad (2)$$

où  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

### 3 La turbulence

La turbulence est un mécanisme très important dans la nature. C'est ce que l'on pourrait appeler un mélangeur naturel. En effet, la turbulence dans les fluides a un effet homogénéisateur. On peut remarquer ce phénomène dans la vie de tous les jours. Par exemple, lorsque l'on ajoute du lait dans un café, sans même agiter celui-ci, il prendra une couleur beige homogène. La nature ici tente de diminuer les variations dues aux différences de température entre le lait et le café. Afin de dissiper la chaleur du café le plus rapidement possible à travers le lait, la turbulence formera des remous dans le café. C'est le même phénomène qui se produit lorsqu'une aile d'avion fend l'air ou bien lorsque le profil de vitesse d'un écoulement s'aplanit dans un tuyau.

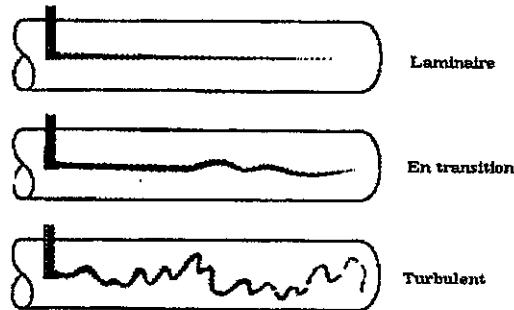


Figure 2: Types d'écoulement

### 3.1 Les écoulements laminaires et turbulents

Un écoulement de fluide peut être soit laminaire, soit turbulent ou encore en transition entre ces deux états. Le premier à faire la différence entre ces deux états est Osborne Reynolds (1842-1912), un scientifique britannique. Il remarque que lorsqu'on injecte du colorant dans un écoulement de débit assez faible (voir figure 2), celui-ci produira une belle ligne droite tout au long de l'écoulement. Lorsque l'on augmente le débit, la ligne commence à osciller en espace et en temps et ce de façon intermittente. Si le débit est suffisamment augmenté, la belle ligne droite que l'on avait initialement devient totalement irrégulière et évolue à travers le temps de façon chaotique. Ces trois états sont respectivement l'état laminaire, l'état de transition et l'état turbulent.

Cette définition qualitative des types d'écoulements n'est probablement pas suffisante pour la plupart. Or, il existe un critère quantitatif qui permet de mieux discerner l'état de l'écoulement : le nombre de Reynolds.

Le **nombre de Reynolds** est une quantité adimensionnelle qui représente le ratio entre l'inertie et la viscosité de l'écoulement. On définit celui-ci comme suit :

$$Re = \frac{\rho U l}{\nu}$$

Ici,  $\rho$  et  $\nu$  représente respectivement la densité et la viscosité du fluide.  $U$  est une vitesse caractéristique tandis que  $l$  est une longueur de référence. Pour un écoulement dans un tuyau, par exemple,  $l$  représenterait le diamètre du tuyau. Pour un écoulement autour d'une aile d'avion, on prendrait plutôt la largeur de l'aile.

De manière générale, on ne peut pas vraiment définir la limite entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent. Toutefois, pour vous donner un ordre de grandeur, on dira que, dans un tuyau, l'écoulement sera laminaire jusqu'à environ  $Re = 2100$  et turbulent à partir de  $Re = 4000$ . Entre ces deux valeurs, l'état de l'écoulement oscillera entre laminaire

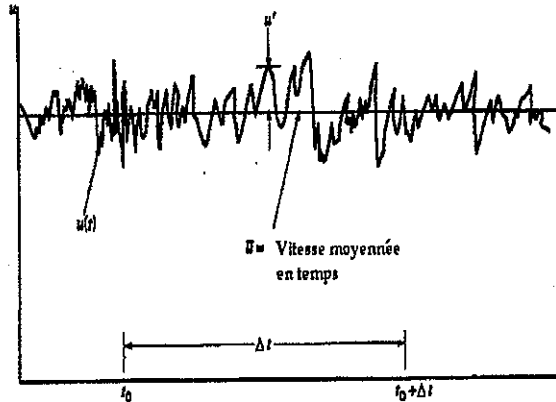


Figure 3: La nature chaotique de la composante en x de la vitesse

et turbulent. Pour une aile d'avion, la transition se ferait à des nombres de Reynolds de l'ordre de 500 000.

### 3.2 La détermination du mouvement d'un fluide dans un écoulement turbulent

De part sa nature chaotique, le mouvement dans un écoulement turbulent est très difficilement représentable ou même estimable à l'échelle moléculaire. En fait, il est impossible de prédire le mouvement d'un écoulement turbulent à travers le temps. Toutefois, il nous est possible d'estimer la vitesse moyenne  $\bar{U}$  des particules sur un petit intervalle de temps  $\Delta t$  (voir figure 3).

Posons  $U_i = U_i(x_1, x_2, x_3, t)$  la  $i$ -ième composante de la vitesse instantanée. Alors la moyenne de la vitesse  $\bar{U}_i$  sur un intervalle  $\Delta t$  sera donnée par :

$$\bar{U}_i = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} U_i(x_1, x_2, x_3, t) dt$$

Ici, on prendra  $\Delta t$  beaucoup plus grand que la période de la plus grande fluctuation. Soit  $U'$  la portion oscillante de  $U$ , alors

$$U = \bar{U} + U'$$

ou encore

$$U' = U - \bar{U}$$

Nécessairement,  $\overline{U'} = 0$ , car

$$\overline{U'} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (U - \bar{U}) dt = \frac{1}{\Delta t} (\Delta t \bar{U} - \Delta t \bar{U})$$

Toutefois, comme  $(U')^2 \geq 0$  alors,

$$\overline{(U')^2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (U')^2 dt > 0$$

Étant donné que le niveau de turbulence va varier d'un écoulement à un autre, il serait important de se doter d'un critère de mesure de l'intensité de la turbulence. On définira l'intensité de la turbulence ( $\vartheta$ ) par

$$\vartheta = \frac{\sqrt{\overline{(U')^2}}}{\bar{U}} = \frac{[\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (U')^2 dt]^{1/2}}{\bar{U}}$$

Ici, on devra faire attention au choix de  $\Delta t$ , car certains écoulements, comme l'écoulement du sang dans les artères aurait des périodes de fluctuations très courtes : de l'ordre de 10, 100 ou même 1000 cycles par seconde. Il serait facile de prendre le même intervalle de temps pour décrire des écoulements comme le courant du Gulf Stream qui traverse l'océan Atlantique. Toutefois, ici, on ne pourrait pas avoir une bonne représentation de l'intensité de la turbulence, car les périodes de fluctuations de ces écoulements sont beaucoup trop grandes. Pour bien quantifier l'intensité de la turbulence, on aura à prendre un  $\Delta t$  de l'ordre des heures et peut-être même des jours.

### 3.3 La force de cisaillement turbulente

Nous avons vu que la force de cisaillement laminaire ( $\tau = -2\mu\dot{\gamma}(U)$ ) était directement proportionnelle au taux de variations de la contrainte de cisaillement qui elle dépend de la vitesse. On aurait tendance, dans le cas turbulent, à remplacer la vitesse  $U$  par la vitesse moyennée dans le temps  $\bar{U}$ . Toutefois, les simulations numériques ainsi que les études théoriques ont montré que cette approche menait à des résultats complètement erronés. On peut facilement trouver une explication physique à ce comportement en observant comment la force de cisaillement est produite dans le cas laminaire et dans le cas turbulent.

Dans un écoulement turbulent, le ratio énergie cinétique - viscosité moléculaire prend des valeurs beaucoup plus importantes. Ainsi, le caractère aléatoire du mouvement des

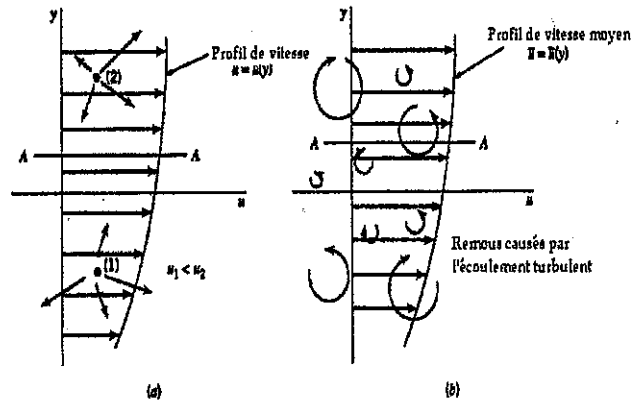


Figure 4: a) Écoulement laminaire b) Écoulement turbulent

particules de fluides prend le dessus sur les forces de cohésion intermoléculaire. Prenons l'exemple d'un écoulement laminaire comme à la figure 4 a) et soit un plan A - A coupant celui-ci. Le caractère aléatoire des particules du fluide engendre un échange de masse entre le fluide du haut et celui du bas. Comme l'énergie cinétique moyenne des particules du fluide du bas est moindre que celle des particules du fluide du haut, un échange de particules de bas en haut à pour effet de diminuer l'énergie cinétique moyenne du fluide du haut. La viscosité a pour effet de réduire cet échange. Si maintenant l'écoulement devient turbulent, alors le transfert de masse prend beaucoup plus d'importance. De plus, celui-ci se fait de manière beaucoup moins ordonnée, car la viscosité moléculaire n'est pas assez puissante pour le contrôler parfaitement bien. Ceci engendre la formation de remous (voir 4 b)), ce que l'on associe souvent à  $U'$ . Soit  $v'$  le coefficient de transfert de masse dû aux remous, on définira le nouveau taux de variation de la contrainte de cisaillement par:

$$\tau = -2\mu\dot{\gamma}(U) - \rho\overline{U'v'} = \tau_{lam} + \tau_{turb} \quad (3)$$

Remarquons que pour un écoulement laminaire  $U' = v' = 0$ , donc  $\overline{U'v'} = 0$  et l'équation 3 est réduite au taux de variation laminaire de la contrainte de cisaillement  $\tau_{lam}$ . Prenons note que pour un écoulement turbulent,  $\tau_{turb} = -\rho\overline{U'v'}$  est positif. Comme on est incapable de déterminer  $U'$  et  $v'$  avec précision, on choisira plutôt de définir  $\tau_{turb}$  par

$$\tau_{turb} = -2\nu_T\dot{\gamma}(U)$$

où on appellera  $\nu_T$  le paramètre de viscosité turbulente. Il faut noter ici que le paramètre de viscosité turbulente est fonction de la vitesse, de la distance à une paroi solide et de

plusieurs autres paramètres. C'est celui-ci qui sera déterminé par la résolution du modèle de Spalart-Allmaras. Pour plus d'informations, veuillez consulter [4].

## 4 Adimensionalisation

À travers le monde, de nombreuses unités de mesure sont utilisées. Par exemple, les américains ont conservé le système de mesures britanniques et mesurent la masse des objets en livres tandis que l'on applique le système métrique, on évalue la masse en kilogrammes. Afin d'éviter les confusions dans la conversion des unités de mesure, il est préférable de travailler avec des équations sans dimension. De cette manière, si on travaille sur un problème dont la géométrie est de dimension 1 par 50, on obtiendra les mêmes résultats peu importe le système de mesure utilisé. C'est pourquoi, les équations seront adimensionalisées.

### 4.1 Adimensionalisation des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont données par :

$$\nabla \cdot U = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \cdot (-2\nu\dot{\gamma}(U)) + \frac{\mathcal{F}}{\rho}$$

Nous avons vu que le nombre de Reynolds était exprimé par

$$Re = \frac{\rho U l}{\nu}$$

où  $\rho$  est la densité,  $U$  la vitesse,  $l$  une longueur faisant référence à la géométrie et  $\nu$  la viscosité. Reprenons cette longueur  $l$  et posons  $k = \rho l^3$  et  $s$  l'unité de mesure du temps. Posons aussi

$$U_* = \frac{s}{l} U$$

$$t_* = \frac{1}{s} t$$

et

$$P_* = \frac{k s^2}{l^3} P$$

Les équations de Navier-Stokes en fonction de  $U_*$ ,  $t_*$  et  $P_*$  s'expriment alors de la manière suivante si l'on suppose  $\mathcal{F}$  nulle :

$$s \nabla \cdot U_* = 0$$

$$\frac{s^2}{l} \frac{\partial U_*}{\partial t_*} + \frac{s^2}{l} U_* \cdot \nabla U_* = -\frac{k s^2}{l^4} \frac{\nabla P_*}{\rho} - s^2 \nabla \cdot (-2\nu \dot{\gamma}(U_*))$$

Comme  $k = \rho l^3$ , si on divise la première équation par  $s$  et la seconde par  $\frac{s^2}{l}$  les équations deviennent adimensionnelles et s'expriment comme suit :

$$\nabla \cdot U_* = 0$$

$$\frac{\partial U_*}{\partial t_*} + U_* \cdot \nabla U_* = -\nabla P_* - \frac{1}{Re} \nabla \cdot (-2\dot{\gamma}(U_*))$$

Dans le cas d'écoulement turbulent on doit ajouter le terme de la force de cisaillement turbulente. Or, lorsque l'on parle de viscosité turbulente  $\nu_T$ , on parle généralement d'une valeur adimensionnelle, car les modèles que l'on utilise pour la calculer sont adimensionnels. Le modèle de Spalart-Allmaras, dont on discutera dans la section suivante, renvoie lui aussi une valeur adimensionnelle de  $\nu_T$ . Ainsi, le terme de turbulence prendra la forme  $\nabla \cdot (-2\nu_T \dot{\gamma}(U))$ . Les équations de Navier-Stokes adimensionalisées et munies du terme de turbulence s'exprimeront donc comme suit:

$$\nabla \cdot U_* = 0$$

$$\frac{\partial U_*}{\partial t_*} + U_* \cdot \nabla U_* = -\nabla P_* - \frac{1}{Re} \nabla \cdot (-2\dot{\gamma}(U_*)) - \nabla \cdot (-2\nu_T \dot{\gamma}(U))$$

## 5 Le modèle de Spalart-Allmaras

Depuis sa publication, en 1994, le modèle de Spalart-Allmaras fait l'objet de nombreux travaux en mécanique des fluides. On l'utilise afin de déterminer la viscosité turbulente  $\nu_T$  nécessaire à la résolution des équations de Navier-Stokes pour des écoulements turbulents. Le modèle à une équation s'énonce comme suit en fonction d'une nouvelle variable de viscosité turbulente  $\tilde{\nu}$  :

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t}}_{\text{Changement local}} + \underbrace{U \cdot \nabla \tilde{\nu}}_{\text{Convection}} = \underbrace{c_{b1} \tilde{S}_\nu \tilde{\nu}}_{\text{Production}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma} \{ \nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] + c_{b2} |\nabla \tilde{\nu}|^2 \}}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{c_{w1} f_w \left[ \frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2}_{\text{Destruction}}$$



Les termes de droite représentent les changements locaux et convectifs dans le transport de la variable  $\tilde{v}$ ; parmi les termes de gauche on retrouve le terme de production, les termes de diffusion et le terme de destruction. Comme le terme de destruction est inversement proportionnel à la distance minimale aux parois solides  $d$ , on imposera comme condition aux limites sur les parois  $\tilde{v} = 0$ . Le terme de production inclut le terme  $\widetilde{S}_\nu$  qui exprime la valeur absolue de la vorticité (le rotationnel de la vitesse)  $S_\nu$  additionnée d'une correction près des parois. Les autres termes sont donnés par :

$$\nu_T = \tilde{v} f_{v1}, \quad \widetilde{S}_\nu = S_\nu + \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad S_\nu = |\omega|, \quad \chi = \frac{\tilde{v}}{\nu}$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}}$$

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{v}}{\widetilde{S}_\nu \kappa^2 d^2}$$

où  $\kappa = 0.41$ ,  $\sigma = 2/3$ ,  $c_{b1} = 0.1355$ ,  $c_{b2} = 0.622$ ,  $c_{v1} = 7.1$ ,  $c_{w1} = c_{b1}/3\kappa^2 + (1 + c_{b2}/\sigma)$ ,  $c_{w2} = 0.3$  et  $c_{w3} = 2.\omega$  représente la vorticité, c'est-à-dire :

$$\omega = \frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}$$

Pour avoir plus d'informations sur le modèle, on peut consulter ([3]).

## 6 Formulation variationnelle et linéarisation

### 6.1 Les grandes lignes de la méthode des éléments finis

Lorsque l'on résout un problème par la méthode des éléments finis, la première étape est de discrétiser le domaine de calcul.   partir de la géométrie du problème, on découpe le domaine de calcul en plusieurs petites sections : les éléments. En général, on prend des formes simples pour ceux-ci. En deux dimensions par exemple, on prend des triangles et des quadrangles. On forme ainsi ce que l'on appelle un maillage. Un fois le maillage construit, on détermine les noeuds de calculs : les points du maillage sur lesquels sera évaluée la solution.

Ensuite, on ramène notre problème sous la forme d'un problème variationnel. C'est-à-dire sous la forme

$$a(u, w) = l(w)$$

où  $a$  et  $l$  sont respectivement une forme bilinéaire et linéaire,  $u$  est l'inconnu et  $w$  des fonctions tests. Pour ce faire, on multiplie nos équations par ces fonctions tests. Puis, on intègre celles-ci sur chacun des éléments du maillage. Ensuite, à l'aide de la méthode des éléments finis, on discrétise le problème variationnel. C'est-à-dire qu'on transforme le problème en dimension finie  $N$  où  $N$  est le nombre de noeuds de calculs. La solution  $u$  prend alors la forme d'un vecteur de dimension  $N$  et nous est fournie par la résolution du système linéaire  $Au = F$  engendré par la même méthode. La résolution d'un tel système peut se faire de plusieurs manières que ce soit par des méthodes directes comme la méthode LU ou par des méthodes itératives comme le gradient conjugué.

Dans notre cas, la résolution sera faite par la méthode de Newton.

## 6.2 La méthode des éléments finis

Soit un problème variationnel :

Trouver une fonction  $u \in V$  telle que :

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V$$

où  $u$  vérifie les conditions limites essentielles homogènes.

On se donne  $N$  fonctions  $\phi_j \in V, j = 1, 2, \dots, N$  appelées fonctions d'interpolation de Ritz (on pourrait utiliser les fonctions d'interpolation de Lagrange) vérifiant elles aussi les conditions essentielles homogènes. Puis on suppose que :

$$u(x) \approx u^N(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$$

On obtient ainsi un problème de dimension finie  $N$  où les  $N$  coefficients  $u_j$  sont à déterminer. Les fonctions  $\phi_j$  forment alors un sous-espace de dimension  $N$  de  $V$  qu'on notera  $V^N$ . Le problème devient alors le suivant :

Trouver  $u^N \in V^N$  telle que :

$$a(u^N, w^N) = l(w^N) \quad \forall w^N \in V^N$$

La bilinéarité permet d'écrire :

$$\sum_{j=1}^N u_j a(\phi_j, w^N) = l(w^N) \quad \forall w^N \in V^N$$

Comme le problème de départ est linéaire, on peut maintenant construire un système linéaire. Soit donc  $N$  nouvelles fonctions  $\tilde{\phi}_i, i = 1, 2, \dots, N$  dans  $V^N$ . Comme l'équation précédente est vraie pour toute fonction  $w^N \in V^N$ , elle est valide pour chacune des fonctions  $\tilde{\phi}_i$  et on a :

$$\sum_{j=1}^N u_j a(\phi_j, \tilde{\phi}_i) = l(\tilde{\phi}_i) \quad 1 \leq i \leq N$$

qui est un système linéaire  $N \times N$  de la forme :

$$AU = F$$

où la matrice  $A$  et les vecteurs  $U$  et  $F$  ont pour coefficients :

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1, \tilde{\phi}_1) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_1) & \dots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_1) \\ a(\phi_1, \tilde{\phi}_2) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_2) & \dots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_1, \tilde{\phi}_N) & a(\phi_2, \tilde{\phi}_N) & \dots & a(\phi_N, \tilde{\phi}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\tilde{\phi}_1) \\ l(\tilde{\phi}_2) \\ \vdots \\ l(\tilde{\phi}_N) \end{bmatrix}$$

Si les fonctions  $\phi_i$  et  $\tilde{\phi}_i$  sont bien choisis, la matrice  $A$  est alors inversible et on peut dès lors déterminer les inconnus  $u_i$  pour ainsi obtenir une approximation  $u^N(x)$  de la fonction  $u$ . Un choix naturel est de prendre  $\tilde{\phi}_i = \phi_i$ . C'est ce que l'on appelle la méthode de Ritz.

### 6.3 Linéarisation

La méthode des éléments finis ramène le problème sous la forme d'un système linéaire. C'est pourquoi on doit linéariser nos équations. Pour ce faire, on utilise le théorème bien connu du développement de Taylor au premier ordre.

#### Théorème de Taylor:

Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  et soit une fonction  $f$  dans  $C^{(k+1)}(\mathcal{U})$ . Supposons  $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$  où  $a, h \in \mathbb{R}^n$ . Alors,

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha f(a) \frac{h^\alpha}{\alpha!} + R_k(a, h)$$

où

$$|R_k(a, h)| \leq \max_{x \in [a, a+h]} \left( \sum_{|\alpha|=k+1} \left| \partial^\alpha \frac{f(x)}{\alpha!} \right| \right) \|h\|^{k+1}$$

et  $\alpha$  et un multi-indice. C'est-à-dire un n-tuplet  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  dans  $\mathfrak{R}^n$  où les  $\alpha_i$  sont non-négatifs et tel que

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n;$$

$$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!;$$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n};$$

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n};$$

#### 6.4 Problème stationnaire versus problème instationnaire

La différence entre un problème stationnaire et un problème instationnaire réside dans le fait que dans le premier cas, le problème n'évolue pas dans le temps et dans le second, le problème évolue dans le temps. Dans notre cas, deux termes varient en fonction du temps: un dans le modèle de Spalart-Allmaras  $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t}$  et un dans les équations de Navier-Stokes  $\frac{\partial U}{\partial t}$ . Sans ces termes, le problème est stationnaire.

#### 6.5 Le modèle de Spalart-Allmaras

La formulation variationnelle du modèle de Spalart-Allmaras dans le cas stationnaire s'énonce comme suit :

$$\int_{\Omega} \underbrace{U \cdot \nabla \tilde{\nu} \omega_{\tilde{\nu}}}_{\text{Terme 1}} dV = \int_{\Omega} \left( \underbrace{\frac{1}{\sigma} \{ -(\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \omega_{\tilde{\nu}} + c_{b2} |\nabla \tilde{\nu}|^2 \omega_{\tilde{\nu}} \}}_{\text{Terme 2}} + \underbrace{\left( c_{b1} \tilde{S}_\nu \tilde{\nu} - c_{w1} f_w \left[ \frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2 \right)}_{\text{Terme 4}} \omega_{\tilde{\nu}} \right) dV \quad (4)$$

où  $V$  représente le volume de l'élément  $\Omega$  et  $\omega_{\tilde{\nu}}$  les fonctions tests. Linéarisons maintenant les termes en posant  $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 + \delta \tilde{\nu}$  où  $\tilde{\nu}_0$  est la solution de départ et  $\delta \tilde{\nu}$  la correction.

Terme 1 :

$$\int_{\Omega} U \cdot \nabla \tilde{\nu} \omega_{\tilde{\nu}} dV = \int_{\Omega} U \cdot \nabla \tilde{\nu}_0 \omega_{\tilde{\nu}} dV + \int_{\Omega} U \cdot \nabla \delta \tilde{\nu} \omega_{\tilde{\nu}} dV$$

Terme 2 :

$$\int_{\Omega} -(\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \omega_{\tilde{\nu}} dV = \int_{\Omega} \left[ -(\nu + \tilde{\nu}_0) \nabla \delta \tilde{\nu} \cdot \nabla \omega_{\tilde{\nu}} - \delta \tilde{\nu} \nabla \tilde{\nu}_0 \cdot \nabla \omega_{\tilde{\nu}} - (\nu + \tilde{\nu}_0) \nabla \tilde{\nu}_0 \cdot \nabla \omega_{\tilde{\nu}} \right] dV$$

Terme 3 :

$$\int_{\Omega} |\nabla \tilde{\nu}|^2 \omega_{\tilde{\nu}} dV = \int_{\Omega} \nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu} \omega_{\tilde{\nu}} dV = \int_{\Omega} \left[ |\nabla \tilde{\nu}_0|^2 \omega_{\tilde{\nu}} + 2 \nabla \tilde{\nu}_0 \cdot \nabla \delta \tilde{\nu} \omega_{\tilde{\nu}} \right] dV$$

Terme 4 :

Posons

$$f(\tilde{\nu}) = c_{b1} \tilde{S}_\nu \tilde{\nu} - c_{w1} f_w \left[ \frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2$$

alors on peut linéariser comme suit :

$$\int_{\Omega} f(\tilde{\nu}) \omega_{\tilde{\nu}} dV = \int_{\Omega} \left[ f(\tilde{\nu}_0) + \frac{\partial f(\tilde{\nu}_0)}{\partial \tilde{\nu}} \delta \tilde{\nu} \omega_{\tilde{\nu}} \right] \omega_{\tilde{\nu}} dV$$

Ainsi, l'apport à la matrice élémentaire est :

$$\int_{\Omega} \left[ U \nabla \delta \tilde{\nu} \omega_{\tilde{\nu}} + \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}_0) \nabla \delta \tilde{\nu} \cdot \nabla \omega_{\tilde{\nu}} + \frac{1}{\sigma} \delta \tilde{\nu} \nabla \tilde{\nu}_0 \cdot \nabla \omega_{\tilde{\nu}} - 2 \frac{c_{b2}}{\sigma} \nabla \delta \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu}_0 \omega_{\tilde{\nu}} - \frac{\partial f(\tilde{\nu}_0)}{\partial \tilde{\nu}} \delta \tilde{\nu} \omega_{\tilde{\nu}} \right] dV$$

et le résidu élémentaire devient :

$$\int_{\Omega} \left[ -U \nabla \tilde{\nu}_0 \omega_{\tilde{\nu}} - (\nu + \tilde{\nu}_0) \nabla \tilde{\nu}_0 \cdot \nabla \omega_{\tilde{\nu}} + \frac{c_{b2}}{\sigma} |\nabla \tilde{\nu}_0|^2 \omega_{\tilde{\nu}} + f(\tilde{\nu}_0) \omega_{\tilde{\nu}} \right] dV$$

## 6.6 Les équations de Navier-Stokes

La formulation des équations de Navier-Stokes dans le cas stationnaire peut être vue comme suit :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot U \omega_U dV = 0 \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} (U \nabla \cdot U) \cdot \omega_U dV = \int_{\Omega} \left( -\nabla P - \frac{1}{Re} \nabla \cdot (-2\nu \dot{\gamma}(U)) - \nabla \cdot (-2\nu_T \dot{\gamma}(U)) \right) \cdot \omega_U dV \quad (6)$$

où la contrainte de cisaillement est donnée par le tenseur

$$\dot{\gamma}_{ij}(U) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Posons

$$\sigma = -PI + \frac{1}{Re} 2\dot{\gamma}(U) + 2\nu_T \dot{\gamma}(U)$$

où  $I$  est la matrice identité. On sait que

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot \sigma \omega_U dV = \int_{\Omega} \sigma : \nabla \omega_U dV - \int_{\Gamma} (\sigma n) \cdot \omega_U dV$$

où  $:$  signifie contraction double,  $\Gamma$  est le contour de  $\Omega$  et  $n$  est le vecteur normal à  $\Gamma$ . Donc en imposant les  $\sigma \cdot n = 0$  sur le contour, on a que

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot (PI) - \frac{1}{Re} \nabla \cdot (-2\dot{\gamma}(U)) - \nabla \cdot (-2\nu_T \dot{\gamma}(U)) \\ &= \frac{1}{Re} 2\dot{\gamma}(U) : \dot{\gamma}(\omega_U) + 2\nu_T \dot{\gamma}(U) : \dot{\gamma}(\omega_U) - PI : \dot{\gamma}(\omega_U) \\ &= \frac{1}{Re} 2\dot{\gamma}(U) : \dot{\gamma}(\omega_U) + 2\nu_T \dot{\gamma}(U) : \dot{\gamma}(\omega_U) - PI \nabla \cdot \omega_U \\ &= -\nabla \cdot \sigma \cdot \omega_U \end{aligned}$$

En posant  $U = U_0 + \delta U$  et  $P = P_0 + \delta P$  où  $U_0$  et  $P_0$  sont les solutions de départ et  $\delta U$  et  $\delta P$  leur correction on peut maintenant réécrire la formulation variationnelle comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (U_0 + \delta U) \nabla \cdot (U_0 + \delta U) \omega_U dV = \\ & \int_{\Omega} \left( \frac{1}{Re} 2\dot{\gamma}(U_0 + \delta U) : \dot{\gamma}(\omega_U) + 2\nu_T \dot{\gamma}(U_0 + \delta U) : \dot{\gamma}(\omega_U) - (P_0 + \delta P) I \nabla \cdot \omega_U \right) dV \end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega} P_0 \nabla \cdot (U_0 + \delta U) \cdot \omega_U dV = 0$$

On peut alors séparer les termes qui contribuent à la matrice élémentaire de ceux qui contribuent au résidu élémentaire en linéarisant l'équation précédente.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( U_0 \nabla \delta U \omega_U + \delta U \nabla U_0 \omega_U + \delta P I \nabla \cdot \omega_U - \left( \frac{1}{Re} + \nu_T \right) 2\dot{\gamma}(\delta U) : \dot{\gamma}(\omega_U) - \frac{\partial \nu_T}{\partial U} 2\dot{\gamma}(U_0) : \dot{\gamma}(\omega_U) \right) dV \\
& = - \int_{\Omega} \left( U_0 \nabla \cdot U_0 \cdot \omega_U + P_0 I \nabla \cdot U_0 \cdot \omega_U - \left( \frac{1}{Re} + \nu_T \right) 2\dot{\gamma}(U_0) : \dot{\gamma}(\omega_U) \right) dV \\
& \int_{\Omega} P_0 \nabla \cdot \delta U \cdot \omega_U dV = - \int_{\Omega} P_0 \nabla \cdot U_0 \cdot \omega_U dV
\end{aligned}$$

Ici, on ne tient pas compte de  $\frac{\partial \nu_T}{\partial U} 2\dot{\gamma}(U_0) : \dot{\gamma}(\omega_U)$ , car cette dérivée est un peu trop complexe étant donné que l'on exprime mal  $\nu_T$  en fonction de  $U$ .

## 7 Comparaison des résultats

Il est maintenant temps de vérifier si l'implantation du modèle de Spalart-Allmaras est effective. Pour ce faire, on va comparer les résultats obtenus lors de simulations de problèmes avec MEF++ avec ceux obtenus à l'aide de FLUENT, un logiciel de calcul commercial.

### 7.1 Le logiciel FLUENT

Le logiciel FLUENT est un logiciel conçu pour modéliser des problèmes d'écoulement. C'est donc un très bon outil pour les mécaniciens des fluides. On l'utilise notamment au laboratoire de fluide au département de génie mécanique. Contrairement à MEF++, FLUENT utilise la méthode des volumes finis pour faire ses calculs. On peut remarquer quelques différences marquantes entre les deux logiciels, notamment dans le calcul de la condition naturelle. On a vu que pour MEF++, la condition naturelle était calculée comme suit:

$$\sigma \cdot n = \left( -PI + \frac{1}{Re} 2\dot{\gamma}(U) + 2\nu_T \dot{\gamma}(U) \right) \cdot n = 0$$

tandis qu'avec FLUENT, on impose la condition «outflow», c'est-à-dire la valeur de l'élément avant la sortie.

### 7.2 Résultats

Le premier problème avec lequel on a comparé les logiciels n'a pas vraiment de sens physique : on impose une viscosité turbulente à l'entrée du domaine et on s'attend à ce que l'écoulement reprenne ses propriétés laminaires. En fait, on l'utilise dans le but de vérifier si on calcule bien le modèle de Spalart-Allmaras dans le cas où il y a interaction avec la vitesse. Dans un

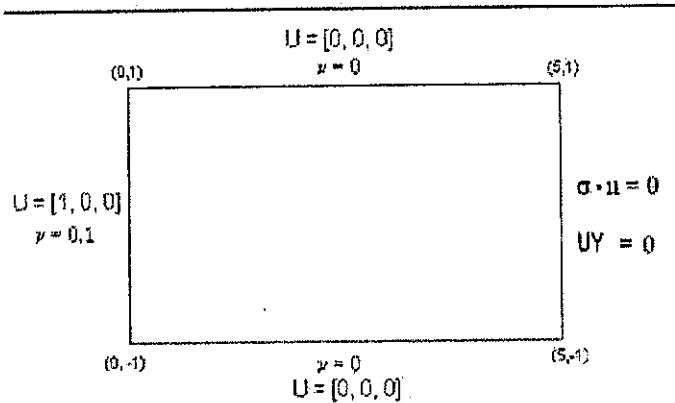


Figure 5: Domaine de calcul avec ses conditions limites

domaine de dimension 5 par 2, on impose des parois solides sur le haut et le bas du domaine. C'est-à-dire que l'on va considérer que la vitesse  $U$  du fluide et la viscosité turbulente  $\tilde{\nu}$  sont toutes les deux nulles aux parois. On impose la condition naturelle à la sortie de l'écoulement, c'est-à-dire  $\sigma \cdot n = 0$  ainsi que la composante de vitesse nulle. À l'entrée, on impose une viscosité turbulente de  $0.1 - 0.07(|y| - 0.01)^{10}$  (pour prendre la même que dans FLUENT) et une vitesse initiale de  $U = [1, 0, 0]$ . Pour finir, on impose la composante en Y de la vitesse nulle en sortie. La figure 5 représente la situation. Pour ce qui est des propriétés physiques du fluide, on donnera la densité  $\rho = 1$  et la viscosité moléculaire  $\nu = 0.1$ . On utilise le même maillage pour les deux logiciels (voir figure 6). On a construit celui-ci plus fin près des parois afin de bien détecter les forces de cisaillement qu'elles engendrent. Aussi, étant donné que la viscosité turbulente va chuter énormément dès que le fluide entrera dans le domaine, on a raffiné le maillage à l'entrée. Normalement, pour un écoulement de Poiseuille comme celui-ci, on exige que l'épaisseur de la couche d'élément à la limite des parois ( $\Delta y$ ) soit suffisamment petite pour bien rendre compte de la force de cisaillement que la paroi engendre. Pour ce faire, on devra vérifier que  $y^+$  est inférieur à un, c'est-à-dire

$$y^+ = \frac{\Delta y u_\tau}{\nu} < 1$$

où  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$  est la vitesse de frottement et  $\tau_w = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0}$ . Dans notre cas,  $y^+ \approx 0.002$  ce qui est amplement suffisant.

Si l'on compare, dans un premier temps, l'évolution de la composante en X de la vitesse sur l'axe des abscisses (figure 7), les deux courbes sont pratiquement superposées. Toutefois,



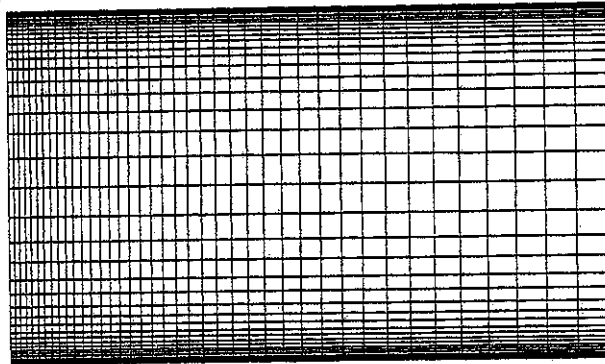


Figure 6: Domaine de calcul avec ses conditions limites

on peut remarquer une petite décroissance de la vitesse près de la sortie de la solution de FLUENT. Cet écart est sans doute dû à la condition limite imposée à la sortie. Regardons maintenant les profils de la composante de vitesse à l'entrée et à la sortie. À l'entrée, comme on peut s'y attendre, les deux courbes sont superposées et représentent la condition limite imposée  $U = [1, 0, 0]$  (figure 8). À la sortie, le profil de la composante en X de la vitesse est pratiquement le même (voir figure 9), on peut toutefois remarquer que lorsqu'on s'approche du centre du domaine, la solution de FLUENT est un peu plus basse que celle de MEF++, comme nous avait annoncée la figure 7.

Comparons maintenant la solution de  $\bar{\nu}$ . L'évolution de la viscosité sur l'axe des abscisses nous suggère que MEF++ est un peu moins diffusif de  $\bar{\nu}$  que FLUENT, car, comme on peut le voir à la figure 10,  $\bar{\nu}$  diminue plus rapidement avec MEF++. Aussi, il faut dire que cet écart dans la solution est accentué par l'utilisation de conditions aux limites différentes à la sortie. Cette observation est aussi vraie lorsqu'on regarde le profil de  $\bar{\nu}$  à la sortie (figure 12). Pour ce qui est du profil de  $\bar{\nu}$  à l'entrée, il s'agit en fait de la condition limite à l'entrée sur celle-ci.

Même si les courbes ne sont pas parfaitement superposées, il ne faut pas perdre de vue que ces solutions ne sont que des approximations de la solution réelle du problème. De plus, on estime ces solutions à l'aide de deux méthodes de calcul différentes. Ainsi, on peut dire que les deux solutions sont qualitativement comparables. Toutefois, comme il n'ont pas vraiment de sens physique, rien ne nous permet de dire si celles-ci sont de bonnes approximations.

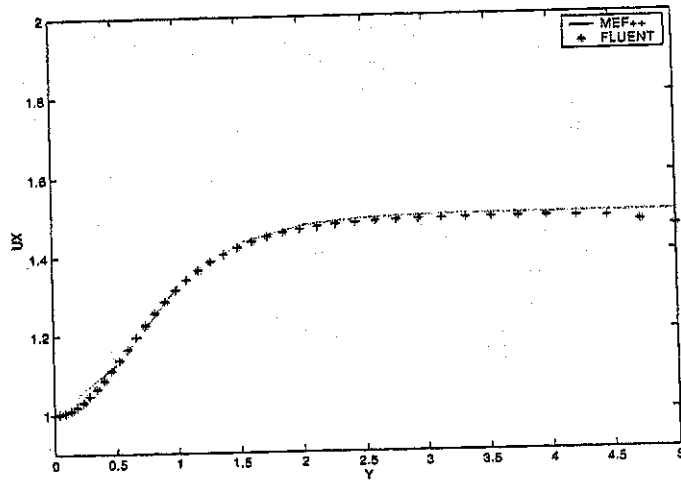


Figure 7: Évolution en X de la composante en X de la vitesse au centre du domaine

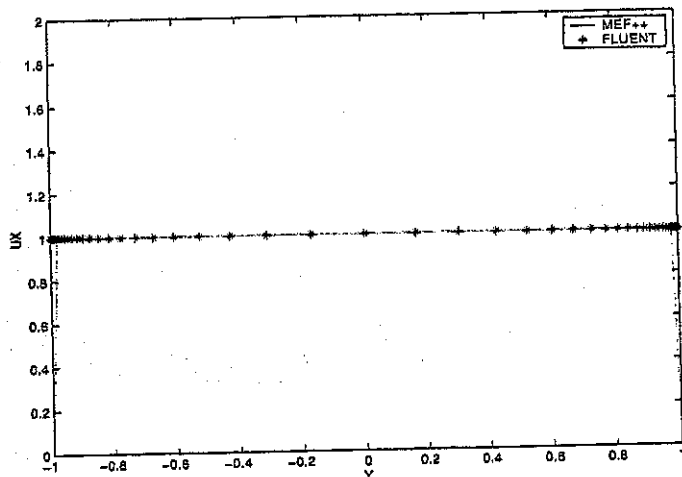


Figure 8: Profil de la composante en X de la vitesse à l'entrée

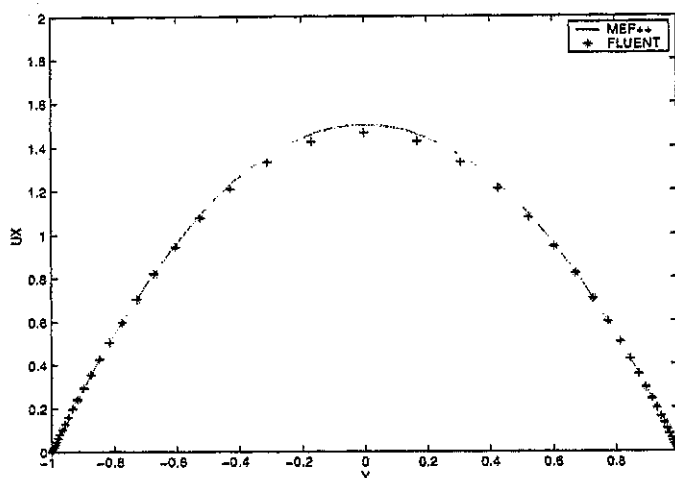


Figure 9: Profil de la composante en X de la vitesse à la sortie

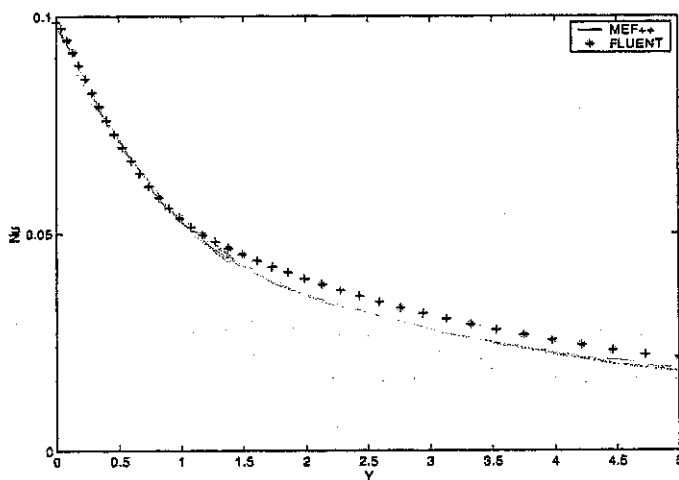


Figure 10: Évolution en X de  $\tilde{\nu}$  au centre du domaine

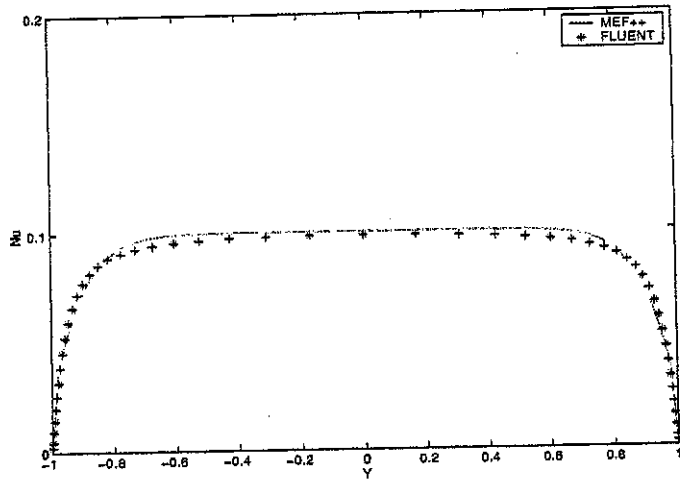


Figure 11: Profil de  $\tilde{\nu}$  à l'entrée

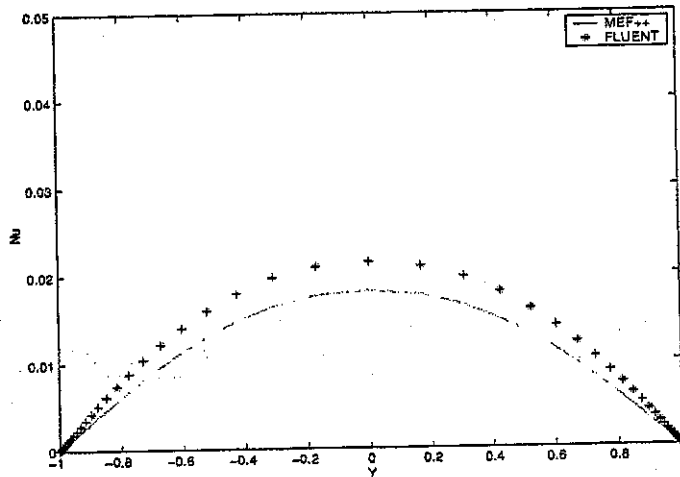


Figure 12: Profil de  $\tilde{\nu}$  à la sortie

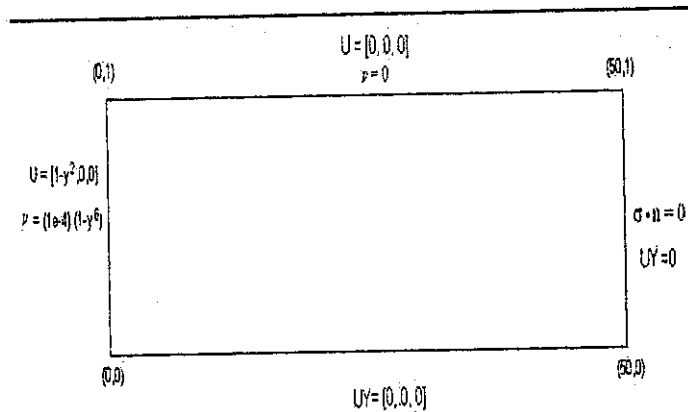


Figure 13: Domaine de calcul avec ses conditions limites

Le second problème avec lequel on a comparé MEF++ à FLUENT consiste à observer l'évolution de la viscosité turbulente dans un domaine entre deux parois solides. Pour ce faire, on prend un domaine beaucoup plus long que le précédent: un canal de dimension 2 par 50. Afin de limiter le nombre d'élément du domaine de calcul, on divise le domaine en deux au centre et on impose des conditions de symétrie sur le centre. Le nouveau domaine prend alors la forme de la figure 13. On impose comme conditions limites à l'entrée une vitesse  $U = [1 - y^2, 0, 0]$  et une viscosité turbulente  $\nu = (1e - 4)(1 - y^6)$ . Sur le haut, on a une paroi solide, donc  $U = [0, 0, 0]$  et  $\nu = 0$ . Sur le bas, on aura symétrie alors la composante de vitesse en Y sera nulle. Enfin, on impose la condition naturelle à la sortie  $\sigma \cdot n = 0$  et la composante de vitesse en Y nulle. Le fluide tant qu'à lui a une densité de  $\rho = 1$  et une viscosité moléculaire de  $\nu = 3e - 3$  donc un nombre de Reynolds de  $Re \approx 333$ . On utilise dans ce cas un maillage de 10 000 éléments en prenant soin de concentrer les éléments près de la paroi. On obtient ainsi un  $y^+$  d'environ 0.0015, ce qui est encore amplement suffisant.

On a imposé des conditions de symétrie sur le bas du domaine de calcul. Ainsi, on peut prendre pour acquis que c'est le centre de notre géométrie à deux parois. Si on observe l'évolution de la composante en X sur cet axe, on peut remarquer, comme dans le problème précédent, que les solutions sont presque superposées mis à part la fin de la courbe (voir figure 14). Encore une fois, cela peut être dû à l'imposition de conditions aux limites différentes à la sortie du domaine. En regardant de plus près la figure 19 on trouve une autre explication: étant donné que la solution de MEF++ est moins diffusive pour  $\tilde{\nu}$  (voir figure 17), celle-ci est moins élevée ce qui tend à réduire le mélange des molécules donc l'énergie cinétique est moins diffusé et reste plus concentré au centre du domaine (figure 16). Les profils d'entrées

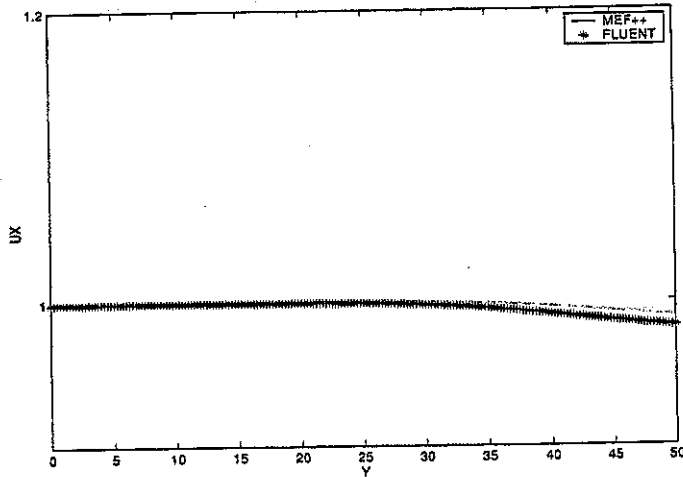


Figure 14: Évolution en X de la composante en X de la vitesse au centre du domaine

de  $\tilde{\nu}$  et de la composante en X de la vitesse (figures 18 et 15) représente les conditions aux limites d'entrées. L'évolution de  $\tilde{\nu}$  sur l'axe des abscisses quant à elle emprunte des courbes similaires dans les deux solutions. Toutefois, celle de la solution de MEF++ est encore une fois moins diffusive, car  $\tilde{\nu}$  augmente moins rapidement.

Avec cette deuxième comparaison, on peut voir que  $\tilde{\nu}$  est moins diffusé dans MEF++ que dans FLUENT. De plus, comme dans le premier problème, les solutions sont comparables: elles sont du même ordre de grandeur et qualitativement semblables.

## 8 Conclusion

Il est clair que le programme implanté dans le logiciel MEF++ n'est pas très satisfaisant. Il a beaucoup de difficultés à converger lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds. Rappelons que la viscosité turbulente est présente seulement lorsque le nombre de Reynolds est élevé. Les comparaisons faites plus haut sont donc un peu fictives sur le plan physique. Normalement, le modèle de Spalart-Allmaras dans ceux-ci ne serait pas nécessaire. Toutefois, sa présence génère de la viscosité turbulente et c'est ce qui a permis de comparer les logiciels. Plusieurs choses rendent la convergence difficile. D'abord, il faudrait tenir compte du rôle de la vitesse dans la linéarisation du modèle de Spalart-Allmaras, chose pas très commode étant donné le haut degré de non linéarité de l'équation et la présence de la vorticité dans les termes les moins linéaires. Puis, on doit renoncer à un terme de premier ordre dans la linéarisation des équations de Navier-Stokes (le terme  $\frac{\partial \nu_T}{\partial U} 2\dot{\gamma}(U_0) : \dot{\gamma}(\omega_U)$ ), car on peut diffi-

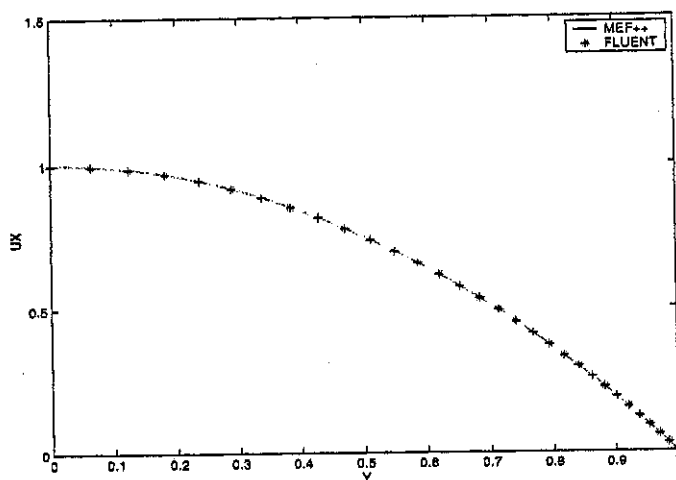


Figure 15: Profil de la composante en X de la vitesse à l'entrée

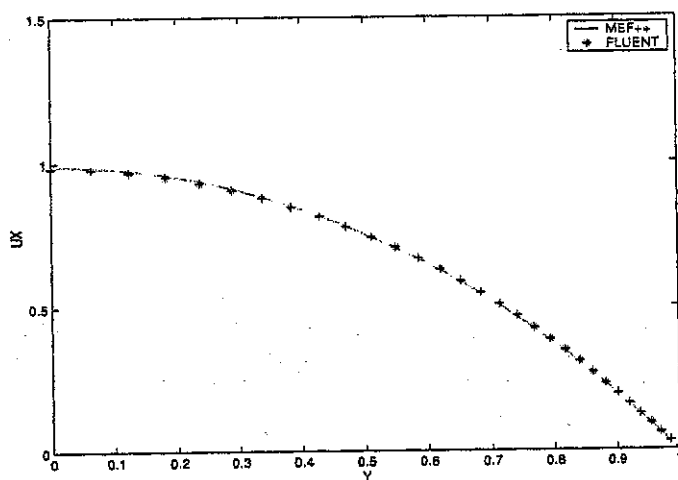


Figure 16: Profil de la composante en X de la vitesse à la sortie

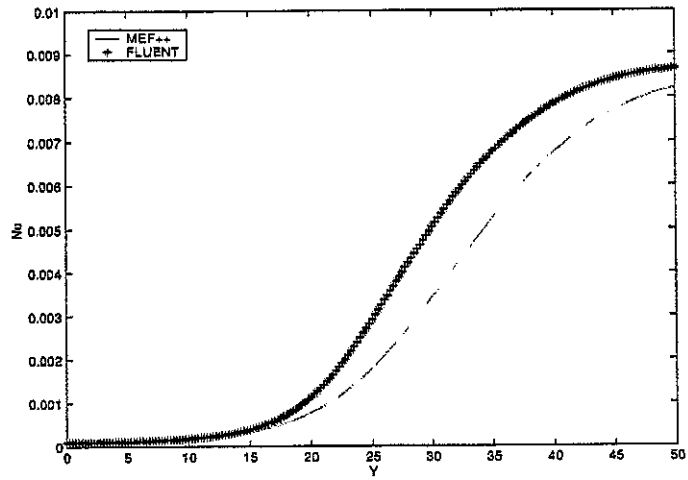


Figure 17: Évolution en X de  $\bar{\nu}$  au centre du domaine

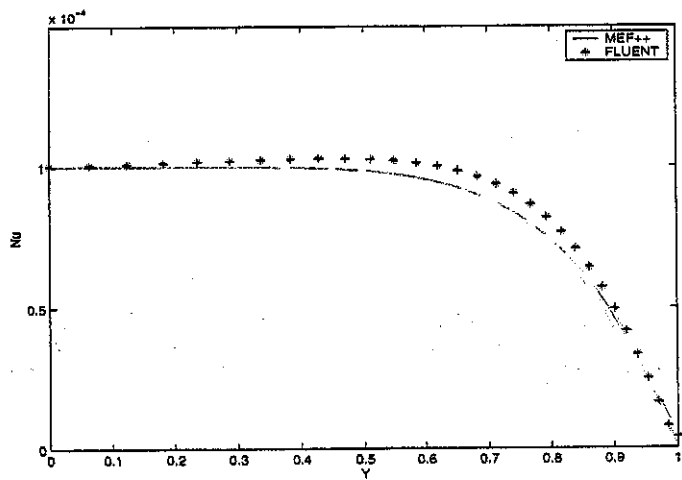


Figure 18: Profil de  $\bar{\nu}$  à l'entrée



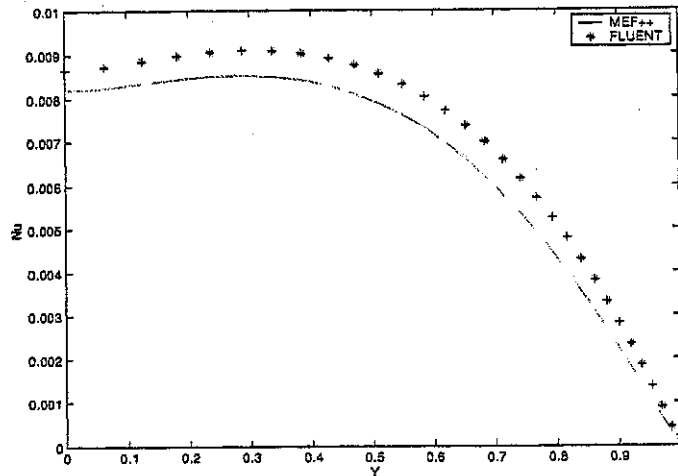


Figure 19: Profil de  $\tilde{\nu}$  à la sortie

cilement exprimer la dérivée de  $\nu_T$  par rapport à la vitesse. Finalement, on devra stabiliser l'équation de Spalart-Allmaras à l'aide de technique comme «l'upwinding». En effet, la résolution de l'équation de convection-diffusion présente dans le modèle engendre beaucoup d'oscillations dans la solutions ce qui fait que l'on doit modifier les équations pour diminuer le ratio de contribution du terme de convection par rapport au terme de diffusion.

À la lueur des résultats obtenus par FLUENT et MEF++, on peut dire que le programme implanté calcule bien les équations. Toutefois, beaucoup de travail de stabilisation numérique reste encore à faire.

## Références

1. Fortin André, Garon A. *Note du cours Les éléments finis: de la théorie à la pratique*, 1997-2002.
2. M. Breuer, N. Jovicic, K. Mazaev. *Comparaison of DES, RANS and LES for the separated flow around a flat plate at high incidence*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2003; 41, 357-388.
3. P.R. Spalart, S.R. Allmaras. *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*, La Recherche Aérospatiale, 1994, n°1, 5-21.
4. Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Okiishi. *Fundamentals of fluid mechanics*, 3th ed. New York : J.Wiley, 2004.

5. André Fortin *Analyse numérique pour ingénieurs*, Éditions de l'École polytechnique de Montréal, 1995.
6. Philippe G. Ciarlet *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Collection Mathématiques appliquées par la maîtrise, Éditeur Paris : Masson , 1982.