

Comparaison des méthodes de calcul

Résumé

Trois méthodes de calcul, soit la méthode Rahier[1], la méthode Lesaint-Raviart[2] et la méthode SUPG[3], seront comparées dans une analyse des données et de l'ordre de convergence. De plus, ces méthodes seront comparées avec et sans la dérivée de Jaumann, et avec et sans la valeur de vitesse ω . Trois maillages hexaédriques seront utilisés, tous étant similaires les uns aux autres mais de plus en plus fins, sur la géométrie d'une roue. Les maillages peuvent être visualisés à la figure 1.

Notons que puisque l'erreur s'écoule exponentiellement ($E = ch^\alpha$), l'ordre de convergence sera calculé en utilisant l'équation

$$\ln E(h) = \ln c + \alpha \ln h$$

où $E(h)$ est l'erreur en fonction du maillage et α est l'ordre de convergence lui-même.

I Comparaison des méthodes pour l'équation avec la dérivée de Jaumann

Pour cette partie, l'équation aux dérivées partielles est

$$u \cdot \nabla A + A \cdot \Pi - \Pi \cdot A + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\text{tr}(A^{-1}C)A}{3} - C \right) = F$$

où $\tau = 1$ et $C = I$ l'identité. De plus, la matrice choisie (dite solution manufacturée) est :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{100} + 5 & \frac{z^3}{200} + 200 & \frac{xz}{200} + \frac{z}{200} - 3 \\ \frac{z^3}{200} + 200 & A_{yy} & 1 \\ \frac{xz}{200} + \frac{z}{200} - 3 & 1 & \frac{z^2}{200} + 2 \end{bmatrix}$$

où $A_{yy} = \frac{1}{200} \left(\frac{208000000+800z^5-400z^4+z^8-160000z+80000x^2+560000z^3+160000z^2-160000xz+400z^6-400z^4x}{1200z+999z^2-2xz^2+x^2z^2+1200xz+40000+800x^2} \right)$ et $\det A = 1$. Le vecteur

$$u = [-z, 0, x],$$

et la matrice

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont des données du problème.

Notons que la méthode Rahier a été sujette à une petite modification permettant d'ajouter la dérivée de Jaumann au calcul.

Les normes L^2 des erreurs et l'ordre de convergence sont présentées au tableau 1 et les plages de valeurs de la composante A_{xx} , à la figure 2.

Nous pouvons alors observer que la méthode Rahier, quoiqu'un peu moins précise, donne approximativement le même type de résultats que la méthode Lesaint-Raviart. Tous deux commencent leurs calculs avec une erreur en norme L^2 de $\simeq 0.8$ et convergent à l'ordre $\alpha \simeq 1$.

D'autre part, la méthode SUPG donne les meilleurs résultats. Elle débute avec une précision de $\simeq 0.03$ et converge à l'ordre $\alpha \simeq 2$.

II Comparaison des méthodes pour l'équation sans la dérivée de Jaumann

Pour cette partie, l'équation aux dérivées partielles est

$$u \cdot \nabla A + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\text{tr}(A^{-1}C)A}{3} - C \right) = F$$

où $\tau = 1$ et $C = I$ l'identité. De plus, la matrice est encore

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{100} + 5 & \frac{z^3}{200} + 200 & \frac{xz}{200} + \frac{z}{200} - 3 \\ \frac{z^3}{200} + 200 & A_{yy} & 1 \\ \frac{xz}{200} + \frac{z}{200} - 3 & 1 & \frac{z^2}{200} + 2 \end{bmatrix}$$

et le vecteur

$$u = [-z, 0, x].$$

Les normes L^2 des erreurs et l'ordre de convergence sont présentées au tableau 2 et les plages de valeurs de la composante A_{xx} , à la figure 3.

Observons cette fois-ci les mêmes comportements.

III Comparaison des méthodes pour $\omega = 100$

Pour cette partie, l'équation aux dérivées partielles est

$$\omega (u \cdot \nabla A + A \cdot \Pi - \Pi \cdot A) + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\text{tr}(A^{-1}C)A}{3} - C \right) = F$$

où $\tau = 1$ et $C = I$ l'identité. Pour cette section-ci, $\omega = 100$ au lieu de 1. De plus, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{100} + 5 & \frac{z^3}{200} + 200 & \frac{xz}{200} + \frac{z}{200} - 3 \\ \frac{z^3}{200} + 200 & A_{yy} & 1 \\ \frac{xz}{200} + \frac{z}{200} - 3 & 1 & \frac{z^2}{200} + 2 \end{bmatrix},$$

le vecteur

$$u = [-z, 0, x],$$

et la matrice

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les normes L^2 des erreurs et l'ordre de convergence sont présentées au tableau 3 et les plages de valeurs de la composante A_{xx} , à la figure 4.

Nous pouvons observer que la méthode Rahier donne des résultats beaucoup moins précis cette fois-ci, en commençant ses calculs avec une précision de $\simeq 1$ et convergeant à l'ordre $\alpha \simeq 0.4$. Pour des raisons qu'on ne peut expliquer, la méthode semble grandement affectée par la valeur de vitesse ω .

D'autre part, la méthode SUPG donne, encore une fois, les meilleurs résultats, et comme pour la méthode Lesaint-Raviart, ne semble pas trop être influencée par la valeur de vitesse ω . La méthode SUPG débute avec une précision de $\simeq 0.03$ et converge à l'ordre $\alpha \simeq 2$ tandis que la méthode Lesaint-Raviart débute avec une précision de $\simeq 0.9$ et converge à l'ordre $\alpha \simeq 1$

Références

- [1] Christophe Rahier. *Analyse numérique du roulage stationnaire de structures viscoélastiques non linéaires en grandes déformations*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1991.
- [2] M. Fortin, A. Fortin, K. Benmoussa, and C. Tibirna. A reformulation of the lesaint-raviart method for advection equations. 2008.
- [3] T. J. R. Hughes and A. N. Brooks. A Theoretical Framework for Petrov-Galerkin Methods with Discontinuous Weighting Functions. Applications to the Streamline Upwind Procedure. In Gallagher R.H., editor, *Finite element in fluids*, volume IV. Wiley, 1982.

	Nb de hexaèdres	Norme L^2		
		Rahier	Lesaint-Raviart	SUPG
hexa100.mail	100	0.813	0.812	0.0349
hexa800.mail	800	0.418	0.415	0.00881
hexa6400.mail	6400	0.216	0.209	0.00219
Ordre de convergence		0.957	0.980	2.00

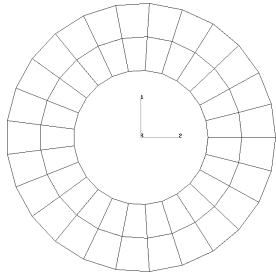
TAB. 1 – Méthodes avec la dérivée Jaumann

	Nb de hexaèdres	Norme L^2		
		Rahier	Lesaint-Raviart	SUPG
hexa100.mail	100	0.813	0.812	0.0349
hexa800.mail	800	0.418	0.415	0.00881
hexa6400.mail	6400	0.215	0.209	0.00219
Ordre de convergence		0.958	0.980	2.00

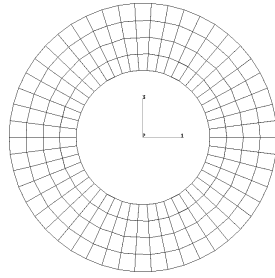
TAB. 2 – Méthodes sans la dérivée Jaumann

	Nb de hexaèdres	Norme L^2		
		Rahier	Lesaint-Raviart	SUPG
hexa100.mail	100	0.968	0.857	0.0353
hexa800.mail	800	0.683	0.439	0.00884
hexa6400.mail	6400	0.586	0.221	0.00220
Ordre de convergence		0.362	0.978	2.00

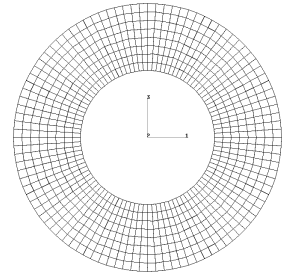
TAB. 3 – Méthodes avec $\omega = 100$



hexa100.mail

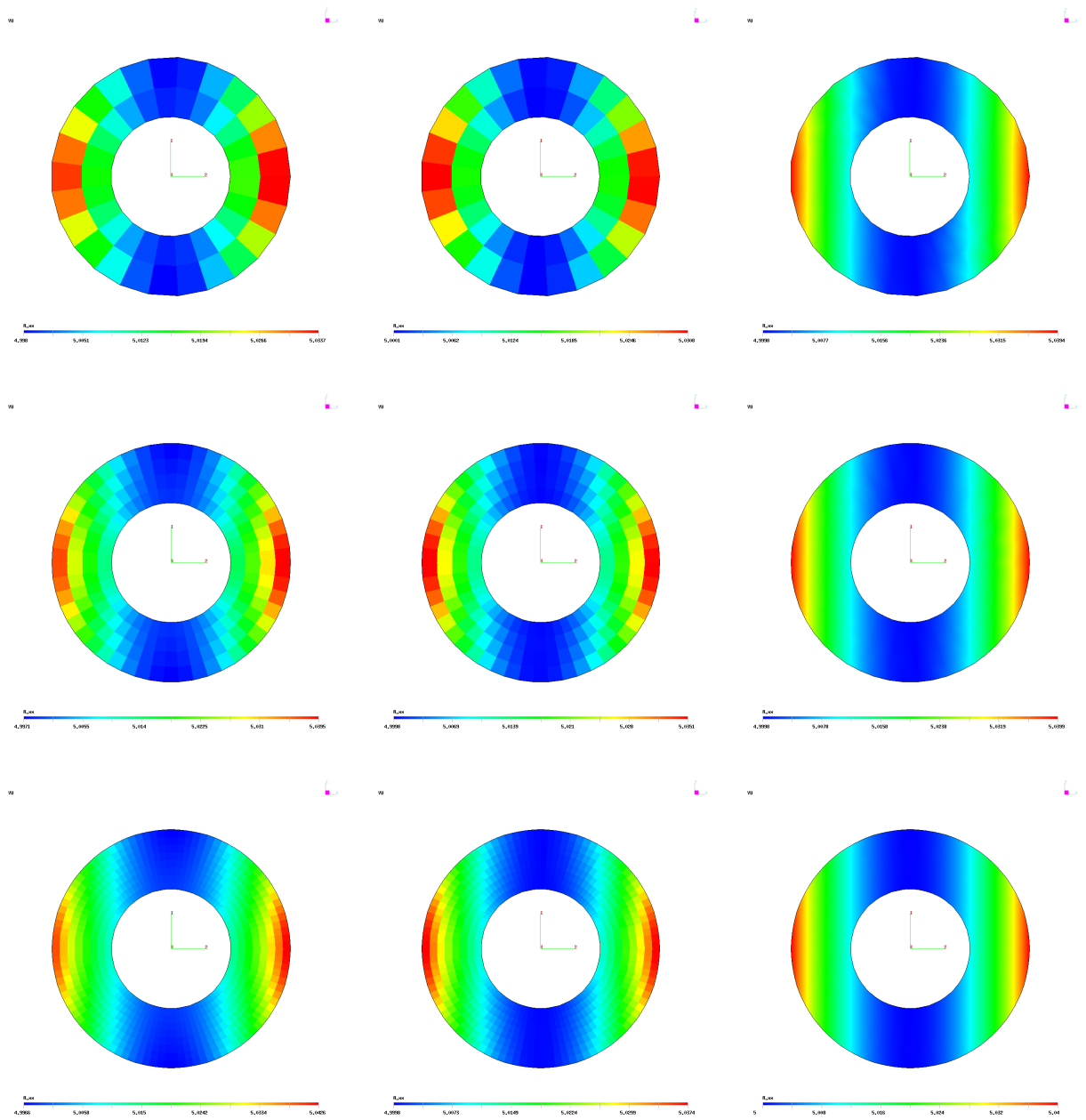


hexa800.mail



hexa6400.mail

FIG. 1 – Maillages



Rahier

Lesaint-Raviart

SUPG

FIG. 2 – Méthodes avec la dérivée Jaumann

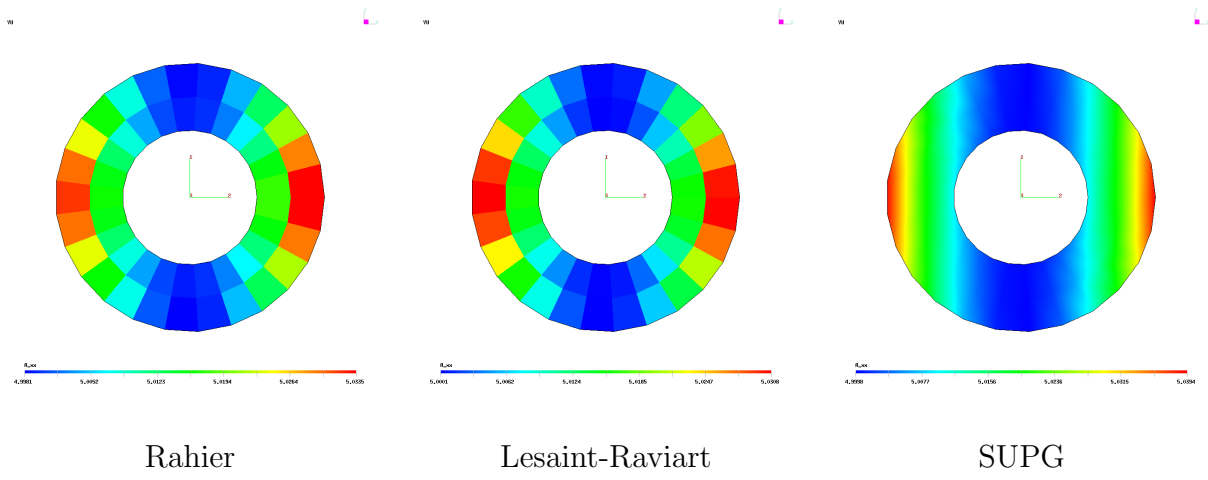
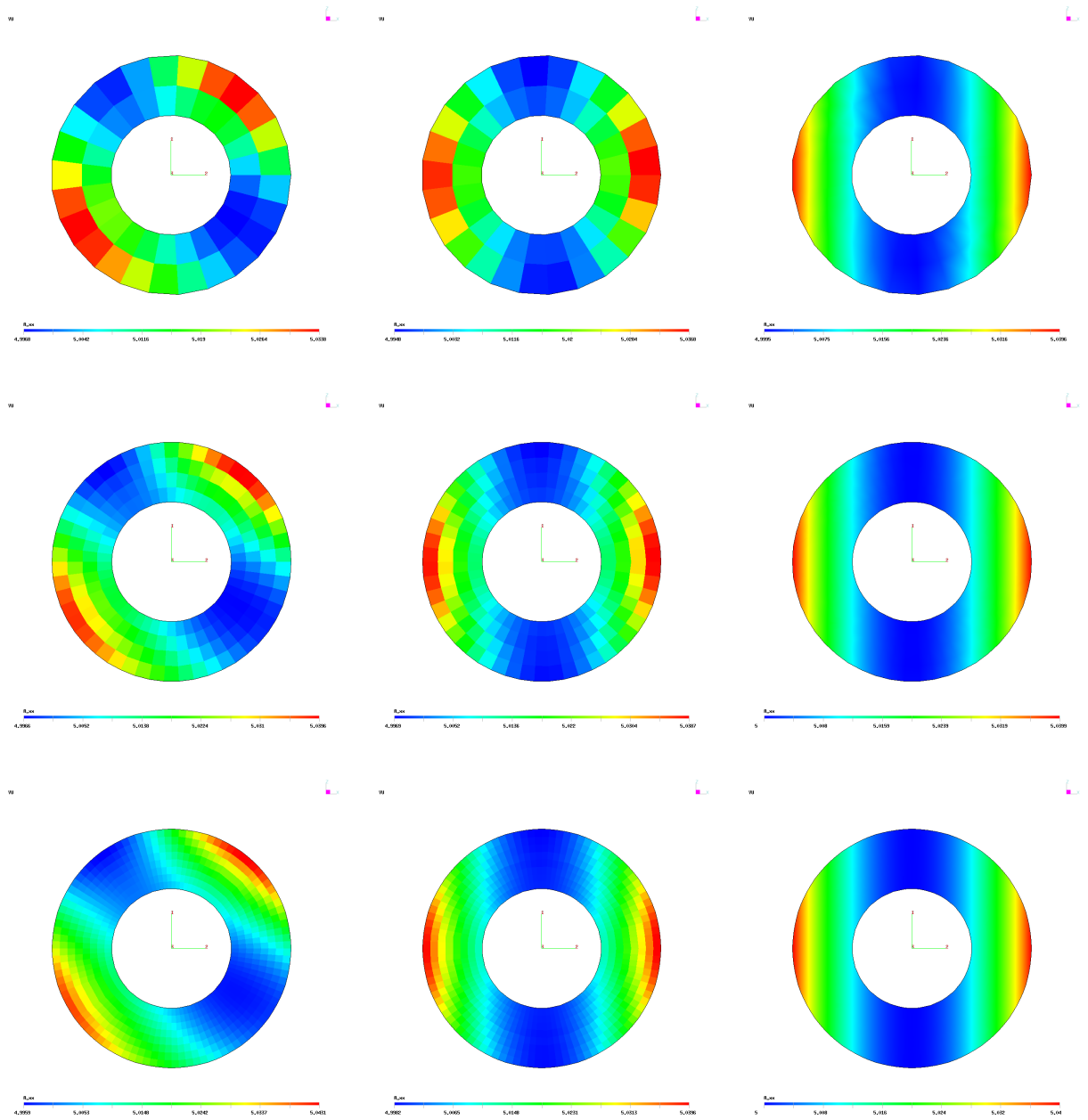


FIG. 3 – Méthodes sans la dérivée Jaumann



Rahier

Lesaint-Raviart

SUPG

FIG. 4 – Méthodes avec $\omega = 100$