

# ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

1<sup>ère</sup> année

## MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX SOLIDES

**Notes de cours**

G. CAILLETAUD, M. TIJANI  
M. BLETRY, E. HERIPRE, A. ROUABHI

*Rappel sur la licence "Creative Commons"*

- Chacun est libre...
  - ★ de copier, distribuer, transmettre ces documents
  - ★ d'adapter ces documents dans son propre travail
- ... à condition
  - ★ d'indiquer clairement la provenance des pages qui sont utilisées  
(*Georges Cailletaud, cours Mécanique des Matériaux Solides 3122, Mines Paris-Paristech*)
  - ★ de ne pas faire d'usage commercial des pages en question
  - ★ de redistribuer les documents résultants avec la même licence "Creative Commons"

Mars 2007



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Généralités sur les propriétés des matériaux . . . . .	1
1.2	Domaines d'utilisation des modèles . . . . .	2
1.3	Les types de modèles de matériaux . . . . .	3
1.4	Les essais mécaniques . . . . .	4
1.4.1	Différents types d'essais . . . . .	5
1.4.2	Moyens de mesure, ordres de grandeur . . . . .	8
1.5	Mise en œuvre . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Rhéologie</b>	<b>11</b>
2.1	Les différents types de «déformation» . . . . .	11
2.1.1	Les sources de «déformation» . . . . .	11
2.1.2	Dilatation thermique . . . . .	12
2.2	Les briques de base du comportement non linéaire . . . . .	12
2.3	Plasticité uniaxiale . . . . .	13
2.3.1	Modèle élastique–parfaitement plastique . . . . .	13
2.3.2	Modèle de Prager . . . . .	14
2.3.3	Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale . . . . .	15
2.4	Viscoélasticité uniaxiale . . . . .	16
2.4.1	Un exemple de modèle rhéologique . . . . .	16
2.4.2	Étude d'un modèle composé . . . . .	17
2.5	Viscoplasticité uniaxiale . . . . .	18
2.5.1	Un exemple de modèle rhéologique . . . . .	18
2.5.2	Quelques modèles classiques en viscoplasticité . . . . .	20
2.6	Influence de la température . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Critères</b>	<b>23</b>
3.1	Les outils disponibles . . . . .	23
3.2	Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique . . . . .	25
3.2.1	Critère de von Mises . . . . .	25
3.2.2	Critère de Tresca . . . . .	25
3.2.3	Comparaison des critères de Tresca et von Mises . . . . .	25
3.3	Critères faisant intervenir la pression hydrostatique . . . . .	26
3.3.1	Critère de Drucker–Prager . . . . .	26
3.3.2	Le critère de Mohr–Coulomb . . . . .	27
3.3.3	Critère de Rankine . . . . .	28
3.3.4	Critères «fermés» . . . . .	28
3.4	Critères anisotropes . . . . .	29

<b>4</b>	<b>Plasticité et viscoplasticité 3D</b>	<b>33</b>
4.1	Introduction . . . . .	33
4.1.1	Décomposition de la déformation . . . . .	33
4.1.2	Critères . . . . .	34
4.1.3	Lois d'écoulement . . . . .	34
4.2	Formulation des lois de comportement viscoplastiques . . . . .	34
4.2.1	Écriture générale . . . . .	34
4.2.2	Exemple . . . . .	35
4.2.3	De la viscoplasticité à la plasticité . . . . .	35
4.3	Formulation des lois de comportement plastique . . . . .	36
4.3.1	Principe du travail maximal . . . . .	36
4.3.2	Interprétation géométrique du principe de Hill . . . . .	37
4.4	Directions d'écoulement associées aux critères courants . . . . .	38
4.4.1	Critère de von Mises . . . . .	38
4.4.2	Critère de Tresca . . . . .	39
4.4.3	Critère de Drucker–Prager . . . . .	39
4.5	Comportement parfaitement plastique . . . . .	39
4.6	Viscoplasticité/Plasticité non associée . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Variables d'écrouissage</b>	<b>43</b>
5.1	Introduction . . . . .	43
5.2	Matériaux standards généralisés . . . . .	43
5.2.1	Une brève présentation du formalisme . . . . .	43
5.2.2	Exemple . . . . .	44
5.3	Expression de quelques lois particulières en plasticité . . . . .	45
5.3.1	Loi de Prandtl–Reuss . . . . .	45
5.3.2	Loi de Hencky–Mises . . . . .	46
5.3.3	Loi de Prager . . . . .	47
5.3.4	Écoulement à vitesse de déformation totale imposée . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Introduction à la mécanique des matériaux hétérogènes</b>	<b>49</b>
6.1	Moyennes de volume, moyennes de surface . . . . .	49
6.2	Volume élémentaire représentatif, propriétés effectives . . . . .	51
6.3	Propriétés élastiques effectives . . . . .	52
6.4	Potentiel élastique . . . . .	54
6.5	Théorème de l'énergie potentielle : borne supérieure de Voigt . . . . .	56
6.6	Théorème de l'énergie complémentaire : borne inférieure de Reuss . . . . .	57
6.7	Application à l'élasticité isotrope . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Éléments de théorie des poutres planes</b>	<b>61</b>
7.1	Définitions . . . . .	61
7.1.1	Modélisation géométrique . . . . .	61
7.1.2	Principe de Saint-Venant . . . . .	62
7.1.3	Modélisation des actions mécaniques . . . . .	63
7.2	Solution de Saint-Venant . . . . .	64
7.2.1	Contraintes . . . . .	64
7.2.2	Déplacements . . . . .	65
7.2.3	Discussion . . . . .	66
7.3	Approche par le principe des travaux virtuels . . . . .	67
7.3.1	Rappel : le principe des travaux virtuels . . . . .	67

7.3.2	Cinématique de la poutre de Timoshenko . . . . .	68
7.3.3	Traitement des équations . . . . .	68
7.3.4	Caractérisation de l'équilibre . . . . .	70
7.3.5	Lois de comportement . . . . .	71
7.3.6	Remarques . . . . .	72
7.4	Poutre sandwich . . . . .	73
7.4.1	Evaluation des efforts intérieurs . . . . .	74
7.4.2	Forme générale . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Structures et matériaux composites</b>	<b>77</b>
8.1	Les composants élémentaires des matériaux composites . . . . .	78
8.1.1	Renforts . . . . .	78
8.1.2	Matrices . . . . .	79
8.2	Rappel : milieux élastiques anisotropes . . . . .	80
8.2.1	Notation de Voigt pour les relations de comportement . . . . .	80
8.2.2	Respect des symétries matérielles . . . . .	80
8.3	Composites unidirectionnels à fibres longues . . . . .	82
8.3.1	Loi de mélange . . . . .	82
8.3.2	Constantes élastiques dans un repère quelconque . . . . .	82
8.3.3	«Fonctionnement» du composite . . . . .	83
8.3.4	Quelques ordres de grandeur . . . . .	84
8.4	Plaques stratifiées . . . . .	84
8.4.1	Tissus et mats . . . . .	84
8.4.2	Définition . . . . .	84
8.4.3	Théorie des stratifiés . . . . .	85
8.5	Plaque de Kirchhoff–Love . . . . .	87
<b>9</b>	<b>Éléments de Mécanique de la rupture</b>	<b>93</b>
9.1	Généralités . . . . .	93
9.2	Taux de restitution d'énergie . . . . .	94
9.2.1	Définition . . . . .	94
9.2.2	Cas d'une charge ponctuelle . . . . .	94
9.2.3	Quelques valeurs critiques de $G$ . . . . .	95
9.3	Facteur d'intensité de contrainte . . . . .	96
9.3.1	Solution de Muskhelishvili . . . . .	96
9.3.2	Solution asymptotique de Westergaard . . . . .	96
9.3.3	Différents modes de sollicitation . . . . .	97
9.3.4	Remarques . . . . .	97
9.4	Analyse de l'état de contrainte tridimensionnel . . . . .	99
9.5	Propagation de fissure en fatigue . . . . .	100
9.5.1	Amorçage–propagation dans les matériaux métalliques . . . . .	100
9.5.2	Loi de Paris . . . . .	102
<b>10</b>	<b>Annexe</b>	<b>105</b>
10.1	Quelques tenseurs particuliers . . . . .	105
10.2	Sur le critère de von Mises . . . . .	106
10.3	Glossaire des notations les plus courantes . . . . .	107



# Préambule

La mécanique des matériaux solides représente, au sein de la mécanique, une branche aux ramifications multiples, dont les modèles sont mis à l'épreuve dans des contextes parfois inattendus, pour expliquer des phénomènes naturels, ou encore concevoir des ouvrages, des véhicules, des composants. Elle est omniprésente, à toutes les échelles, elle s'applique sur des matériaux aussi différents que le magma terrestre, le béton, les alliages métalliques, les composites à fibre ou les monocristaux de silicium.

Il serait donc vain de tenter d'être exhaustif dans le cadre d'une vingtaine de séances. Le but de ce cours est plutôt de donner un certain nombre d'éclairages sur le domaine et les méthodes utilisées, tout en offrant des points d'entrée en vue d'études plus approfondies. Le fait de suivre un tel axe de découverte fait courir le risque d'être parfois trop lapidaire. On cherchera donc, dans le temps imparti, à trouver un juste équilibre dans l'exposé. On espère ainsi montrer que la mécanique des matériaux est un carrefour, où se croisent mathématiciens et ingénieurs, industriels et universitaires, théoriciens et expérimentateurs.

Il faut également trouver un équilibre entre l'*élément de volume* et la structure. Cette discussion, qui renvoie au cours de Mécanique des Milieux Continus, amène à considérer dans un premier temps les *lois de comportement* qui régissent les relations entre les contraintes et les déformations, puis à envisager leur insertion dans une théorie portant sur l'équilibre d'un domaine. Le plan du cours découle donc de ces choix.

Une première partie permet d'aller au-delà de la théorie de l'élasticité déjà acquise, en considérant de nouveaux phénomènes physiques conduisant à la dilatation ou la déformation du matériau. On mentionnera ainsi les dilatations thermiques ou de changement de phase (séance 1), puis les déformations plastiques ou vicoplastiques. C'est une présentation progressive qui est adoptée pour celles-ci : on considérera successivement les modèles sous chargement uniaxial (séance 2), puis les critères multiaxiaux (séance 3), avant de combiner les deux dans l'écriture du formalisme sous chargement tridimensionnel (séances 4 et 5). Afin de bien montrer la nécessité du dialogue entre théorie et expérience, ce premier «cycle» se termine par la réalisation d'essais mécaniques, suivie d'une séance d'identification de paramètres (séance 6). Un prolongement naturel, qui sort du cadre du cours, serait une étude systématique des structures inélastiques, qui se soucie de l'existence et de l'unicité des solutions.

Afin de rester à un niveau de complexité raisonnable, on revient en élasticité linéaire pour les séances 7 à 10. Il est parfois difficile de distinguer le niveau de l'élément de volume et celui de la structure. D'ailleurs, une tendance actuelle de la recherche consiste à étudier les matériaux comme des structures, en caractérisant leurs propriétés macroscopiques par l'analyse mécanique de leurs *microstructures*. Ceci explique que la transition entre les deux grandes parties du cours se préoccupe de ce point, et présente les méthodes adaptées pour effectuer les transitions d'échelles (séance 7). Il ne s'agit que d'un «coup de projecteur», une *introduction à l'étude*, dans un domaine en pleine expansion. C'est dans le même esprit que sont traitées au cours des séances suivantes, les poutres (séance 8) et les plaques (séance 9). On se limite à l'étude de cas simples, mais qui permettent de présenter un cadre général, et de faire comprendre les idées directrices. La dernière séance (10) est une introduction à la mécanique linéaire de la rupture puisqu'il est vrai que, malgré tous les cours de mécanique, les efforts des ingénieurs et des chercheurs, il y a des fissures dans les structures...



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Généralités sur les propriétés des matériaux

Il est de coutume de dire que chaque secteur industriel a les performances de ses matériaux. Cela est particulièrement marquant dans le cas de l'informatique, pour laquelle les progrès sont directement liés à la densité des circuits, c'est encore le cas dans l'aéronautique, où les performances des réacteurs dépendent de la température maximale que supportent les matériaux dans les zones les plus chaudes. Les exemples de ce type peuvent être aisément multipliés, il suffit de penser aux chemins de fer (développement des aciers à rail à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle), à la construction civile (mise au point des bétons de fumée de silice), à la navette spatiale (composites, tuiles en carbone-carbone). Mais en fait, il serait plus précis de dire que les performances obtenues dépendent aussi des *connaissances* sur le matériau utilisé. Ainsi, dans le plan d'exploitation d'une mine souterraine en chambres et piliers, où il n'est bien entendu pas envisageable de choisir son matériau, il est possible de diminuer la taille des piliers si les propriétés de la roche sont bien connues.

Le fait de concevoir ainsi *au plus juste* les structures, est la marque d'une démarche qui, outre son élégance, présente deux aspects importants :

- il y a une amélioration de la sécurité, dans la mesure où il est préférable d'avoir une bonne connaissance des phénomènes physiques plutôt que d'appliquer un large coefficient de sécurité, qui s'apparente souvent à un *coefficient d'ignorance* ; par ailleurs, dans certains cas, l'utilisation de plus grandes quantités de matière peut devenir préjudiciable (ainsi, augmenter l'épaisseur d'une enceinte sous pression peut certes diminuer les contraintes, mais aussi être néfaste s'il y a des gradients thermiques dans la paroi).
- le résultat est une meilleure performance sur le plan écologique, ainsi le gain de quelques dixièmes de grammes sur chaque boîte-boisson conduit à des économies de matière première importantes, si l'on songe aux quelques milliards qui sont fabriquées chaque année ; de même, la diminution de poids permet de réduire la consommation des automobiles ou des avions.

Il faut distinguer plusieurs types de propriétés des matériaux. Dans le cas du développement des ordinateurs, ce sont essentiellement les propriétés physiques qui sont en cause, encore que les échauffements résultant de la concentration des circuits amènent maintenant à se préoccuper également de la tenue mécanique. Dans le cas du développement des moteurs d'avions, ce sont les propriétés mécaniques et les propriétés chimiques (résistance à l'environnement) qui sont déterminantes.

Les principales propriétés des matériaux se regroupent donc en :

- *Propriétés mécaniques* : (i) modules d'élasticité, (ii) limite d'élasticité, écrouissage, ductilité, (iii) viscosité, vitesse de fluage, amortissement (iv) charge à la rupture, résistance à la fatigue, à l'usure, ...
- *Propriétés physiques* : (i) conductibilité électrique, aimantation, (ii) conductibilité thermique, chaleur spécifique, (iii) température et chaleur latente de transformation, (iv) énergie de surface, de liaison, (v) transparence, ...

- *Propriétés chimiques* : (i) résistance à la corrosion, à l'oxydation, (ii) stabilité, diagrammes d'équilibre, ...

En général, le choix d'un matériau pour une application donnée est la conséquence de propriétés adaptées dans un ou plusieurs des domaines indiqués (par exemple l'aluminium est parfois utilisé dans les culasses automobiles malgré sa faible température de fusion, en raison de son faible poids et de sa bonne conductibilité thermique). Il est aussi orienté par d'autres considérations, ce sont les *performances* du matériau, au rang desquelles vont se classer des éléments technologiques et économiques, en même temps que des caractéristiques moins facilement mesurables comme l'aspect (fondamental dans le bâtiment pour les éléments de façade, pour les carrosseries automobiles, ...) :

- disponibilité, reproductibilité, fiabilité,
- usinabilité, aptitude à la mise en forme, soudabilité,
- absence de nocivité, possibilité de recyclage,
- coût,
- aspect,
- bonne caractérisation.

## 1.2 Domaines d'utilisation des modèles

La bonne connaissance des matériaux et leur bonne utilisation font donc intervenir trois domaines d'activité.

1. Le développement du matériau lui-même (ce secteur étant absent dans le cas des géomatériaux). Là se jouent l'évolution du matériau, la découverte de nouvelles microstructures, qui concourent à l'amélioration des performances intrinsèques.
2. La caractérisation des propriétés d'emploi. Ce point a pour but d'apporter une meilleure connaissance d'un matériau existant, (mécanismes physiques qui provoquent ou accompagnent la déformation, effets mécaniques macroscopiques), donc de réduire les incertitudes et d'augmenter la fiabilité des modèles utilisés.
3. Le travail sur les modèles numériques permet d'améliorer la représentation des pièces, structures ou domaines calculés (par amélioration des algorithmes, qui autorisent le traitement de modèles numériques plus importants, par exemple 3D au lieu de 2D).

Le cours de *Mécanique des Matériaux Solides* est consacré essentiellement à l'étude des propriétés mécaniques des matériaux (point (2)). Le point (1) est le domaine des métallurgistes et des chimistes. Le point (3) celui de la mécanique des structures. La figure 1.1 schématise les types d'opérations pour lesquelles il est fait appel aux propriétés des matériaux.

La phase de *conception* (fig.1.1a) met en œuvre une approche synthétique du problème, qui est en fait résolu par *méthode inverse*, soit : «quelle forme donner à la pièce, en quel matériau la construire pour qu'elle réponde au cahier des charges». Dans la mesure où les éléments extérieurs sont nombreux, et parfois non scientifiques, il n'y a en général pas d'autre solution que de choisir des descriptions simples des matériaux, et d'appliquer des *codes*, ou règles simplifiées. Dans la plupart des cas, cette approche est suffisante.

Il peut subsister parfois des cas litigieux (pièces de haute sécurité, ...) qui nécessitent la mise en place d'une procédure de *justification* (fig.1.1b). Au contraire de la précédente, la démarche est analytique, puisque la géométrie, les charges, le matériau, etc... sont figés, et qu'il s'agit simplement, par un calcul direct, de caractériser la bonne tenue. Cette procédure peut être employée à la construction, ou encore longtemps après la mise en route d'une installation, afin d'obtenir une *requalification* qui prolonge la durée de vie : on cherche ainsi actuellement à justifier une prolongation de la durée de vie garantie des centrales nucléaires. Ayant été conçues à l'aide de méthodes de dimensionnement simplifiées, elles peuvent sans doute voir la prévision de leur espérance de vie prolongée à l'aide de méthodes plus précises.

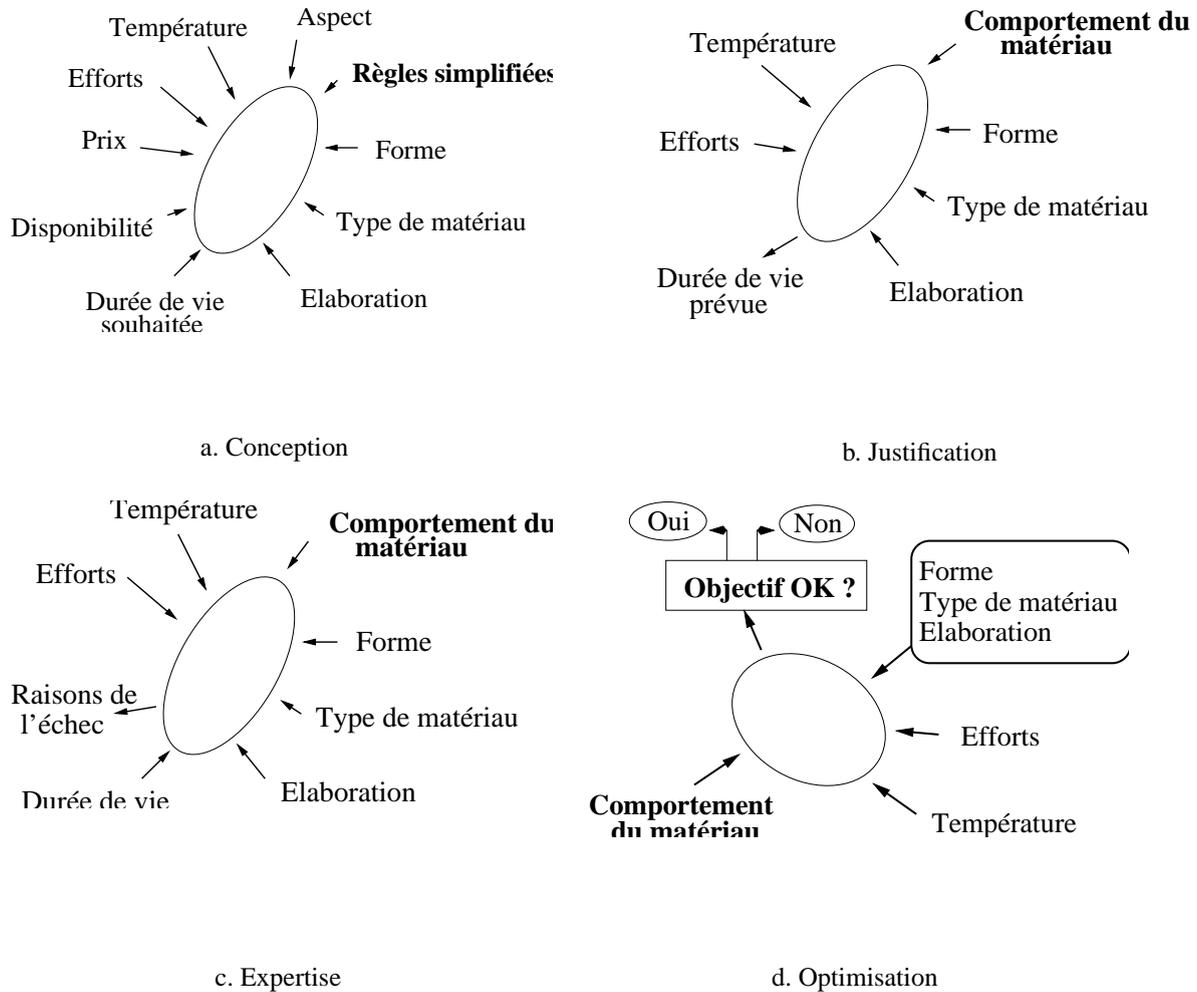


FIG. 1.1 – Opérations industrielles où intervient le comportement des matériaux

Il faut encore avoir recours à des modèles plus précis dans le cas de l'*expertise* (fig.1.1c) puisqu'une telle opération intervient après qu'un problème, grave ou non, soit apparu. Le point important ici est d'être capable de mettre en regard les modèles utilisés et les phénomènes physiques qui se sont produits.

L'*optimisation* (fig.1.1d) va tendre à se généraliser, grâce à l'arrivée de calculateurs suffisamment puissants pour qu'il soit envisageable d'effectuer plusieurs dizaines de fois le calcul de la structure à étudier.

### 1.3 Les types de modèles de matériaux

Ce cours va s'efforcer de faire référence à une grande variété de matériaux solides. Les modèles qui seront considérés s'appliquent aux métaux, aux céramiques, aux polymères, aux composites, au bois, au béton, aux sols (sables et roches), aux biomatériaux (os, tissus).

Il y a deux grandes voies permettant d'avoir accès aux propriétés mécaniques de ces matériaux :

1. Une *approche déductive*, qui cherche à prendre en compte la microstructure du matériau en vue de déterminer ses propriétés macroscopiques. Ainsi un métal sera considéré comme un *polycristal*, agrégat de grains d'orientations cristallographiques différentes, et au comportement individuel parfaitement caractérisé, un composite se verra représenté par sa matrice et ses fibres, un béton par la matrice et les granulats... Cette approche choisit donc de modéliser l'hétérogénéité des matériaux, en vue de mieux prévoir le comportement moyen global (par exemple si les proportions

Matériau	Type d'hétérogénéité	Taille de l'EVR
Métaux	cristal, 10–100 $\mu\text{m}$	1 mm
Polymères	molécules, 10–50 $\mu\text{m}$	1 mm
Céramiques	grains, 1–10 $\mu\text{m}$	0,1 mm
Bois	fibres, 0,1–1 mm	10 mm
Béton	granulats, 1 cm	10 cm
Argiles	grains, 1–10 mm	1 mm

TAB. 1.1 – Exemples de volumes élémentaires représentatifs (la taille de l'EVR désigne la dimension du côté du cube élémentaire considéré).

des constituants changent). Elle est donc relativement riche, de par son principe même, mais elle est également lourde à mettre en œuvre, si bien que son utilisation est encore limitée à la prévision du comportement des matériaux, dans l'optique de mieux comprendre leur «fonctionnement» et d'améliorer leurs propriétés mécaniques.

2. Une *approche inductive*, de nature phénoménologique, qui, à l'inverse, cherchera simplement à caractériser le comportement d'un élément de volume représentatif (EVR). Faisant alors abstraction de la structure fine du matériau. Cette méthode de travail consiste à déterminer les relations de cause à effet qui existent entre les variables constituant les entrées et les sorties du processus étudié. C'est par excellence l'approche de l'ingénieur dans ses travaux de conception. Elle trouve une justification dans le fait que des phénomènes de l'échelle microscopique très divers peuvent conduire, après des effets de moyenne, à des réponses globales de même nature. Par contre, leur emploi aveugle peut être dangereux s'il s'agit d'appliquer le modèle hors de son domaine de détermination initial. Il reste que cette méthode est, dans bien des cas, la seule applicable dans un cadre industriel. Le choix de l'élément de volume représentatif est bien entendu fondamental : celui-ci doit être suffisamment grand par rapport aux hétérogénéités du matériau, et rester petit par rapport aux gradients de contraintes et de déformations dans la structure. Il faut par exemple une trentaine de grains dans la partie utile d'une éprouvette de traction, qui sert à déterminer les propriétés d'un métal. Le tableau 1.1 donne des exemples de tailles raisonnables pour quelques matériaux courants.

## 1.4 Les essais mécaniques

Il y a une grande variété de comportements présentant des non-linéarités liées à la déformation ou au temps, en relation avec l'environnement. Il est donc indispensable de les caractériser expérimentalement. Les essais mécaniques sur de petits spécimens, ou *éprouvettes* sont donc à la base de toutes les études. Ils vont donc être brièvement caractérisés ici. L'observation des caractéristiques expérimentales va permettre d'identifier les types de comportement fondamentaux qu'il importera de simuler.

Il existe de nombreux essais qui permettent de caractériser les propriétés mécaniques des matériaux. Certains sont normalisés (AFNOR, Association Française de Normalisation ; ISO, International Standardisation Organisation ; ASTM, American Society for Testing and Materials) ; il s'agit d'essais simples à réaliser, reproductibles, servant à donner des informations sur les seuils de charge qui produisent des déformations irréversibles, ou encore la rupture. Ils sont utilisés par les ingénieurs en contrôle et caractérisation. En revanche, et pour caractériser plus finement les matériaux, les chercheurs ont recours à des moyens d'essais plus complexes, mettant en œuvre des chargements multiaxiaux ou anisothermes. La présentation qui est donnée ici est très succincte. Des essais spécifiques d'un matériau ou d'un domaine industriel seront détaillés au cours des différentes séances. On trouve maintenant des sites internet qui contiennent des bases de données matériau. Quelques adresses sont signalées sur le site

<http://mms2.ensmp.fr>. Il faut bien retenir par ailleurs que l'obtention de ces données et les méthodes de calcul associées sont souvent considérées comme stratégiques par les entreprises, et qu'elles sont gardées confidentielles.

### 1.4.1 Différents types d'essais

*Essai de traction simple* : Un essai de traction ( $\sigma > 0$ ) ou de compression ( $\sigma < 0$ ) réalisé à vitesse de déformation constante sur un matériau réel donne des résultats en termes d'efforts et de déplacement, que l'on cherche ensuite à convertir en une courbe contrainte-déformation ( $\sigma$  en fonction de  $\epsilon$ ). Dans le cas des alliages métalliques et des polymères, on cherche à se ramener à un état de contrainte simple, uniaxial. Les *éprouvettes* sont des cylindres munis en général de têtes d'amarrage filetées. Pour des raisons de représentativité, on est amené à utiliser de plaques pour le cas des matériaux composites, ou encore des poutres pour les matériaux céramiques, qui cassent de façon fragile en traction. C'est pour la même raison que l'on teste les géomatériaux en utilisant des cylindres en compression, avec parfois un confinement latéral. Pour le cas de la *compression simple*, il faut porter une grande attention aux conditions aux limites, en autorisant le meilleur glissement possible sur les appuis, faute de quoi se développent dans l'éprouvette des champs de contrainte et de déformation complexes (mise en tonneau de l'échantillon).

Les courbes obtenues à l'aide de cet essai ont typiquement l'allure indiquée en figure 1.2 lorsque le comportement du matériau observé est indépendant de la vitesse (comportement de plasticité indépendante du temps). Le comportement fait apparaître une partie linéaire (élasticité) suivie d'une partie non linéaire, au cours de laquelle la pente diminue dans le diagramme déformation–contrainte, au point de devenir éventuellement négative.

- $R_e$  désigne la limite d'élasticité "vraie", ou limite de proportionnalité,
- $R_{0,2}$  désigne la limite d'élasticité conventionnelle, qui correspond à une déformation inélastique de 0,2%,
- $R_m$  désigne la résistance à la traction,
- $A_h$  désigne l'allongement correspondant à la contrainte maximale,
- $A_r$  désigne l'allongement à la rupture.

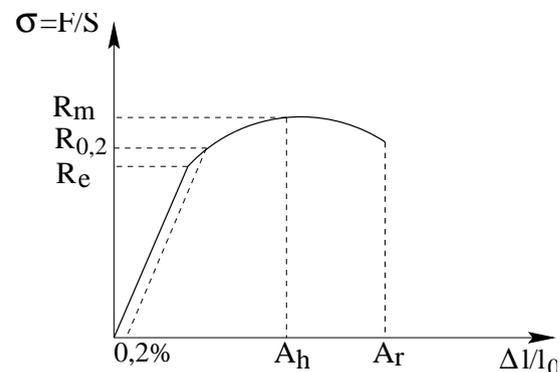


FIG. 1.2 – Schéma d'un essai de traction simple

Quoique d'apparence simple, il s'agit en fait d'un essai dont l'interprétation peut devenir délicate, puisque la diminution de pente observée peut recouvrir des phénomènes physiques très différents, et surtout que le passage à des pentes négatives est en général lié au fait que le champ de déformation n'est plus uniforme. En traction sur un métal, ceci correspond à des phénomènes qui peuvent être d'origine métallurgique (bandes de Lüders) ou géométrique, lorsque les déformations sont trop importantes *striction* au centre de l'éprouvette. Une approche élémentaire due à Considère indique que l'apparition de la striction se produit lorsque l'égalité  $d\sigma/d\epsilon = \sigma$  est vérifiée. Dans le cas des roches, l'adoucissement est en général lié à des phénomènes d'endommagement, qui introduisent des désordres dans le matériau étudié.

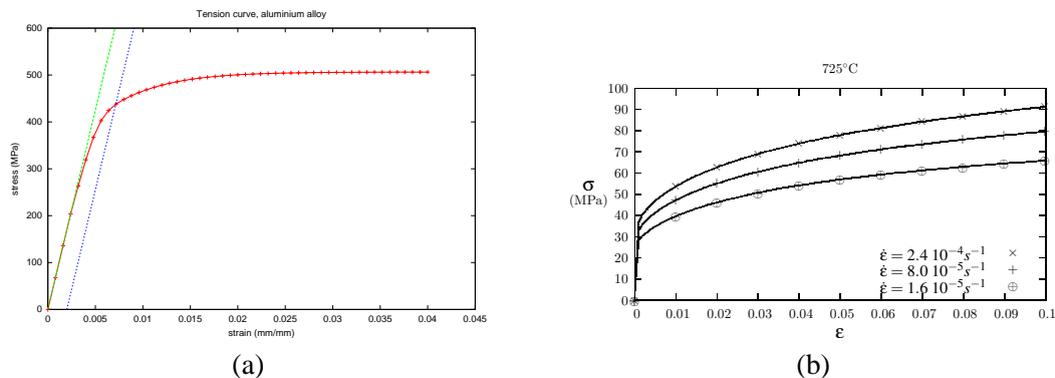


FIG. 1.3 – (a) Traction simple sur une éprouvette en alliage d'aluminium ; (b) Traction simple sur un acier austénitique à 725°C

La figure 1.3a montre le début d'une courbe de traction d'un alliage d'aluminium à température ambiante. Lorsqu'on élève la température au dessus du tiers de la température de fusion, le comportement devient sensible à la vitesse de déformation. C'est le cas de la figure 1.3b, qui montre l'allure des courbes obtenues pour un acier austénitique à 725°C. A très grande vitesse, on obtiendrait une certaine saturation de l'effet de vitesse. A faible vitesse, on tend également vers une limite correspondant à la courbe de traction à vitesse nulle, qui n'est liée qu'à l'écroutissage.

*Essai de fluage* : Lorsqu'une éprouvette est soumise à une traction simple (essai monodimensionnel sous une contrainte  $\sigma$  et une déformation  $\epsilon$ ), si, à partir d'un certain état, la contrainte est maintenue constante, la déformation restera constante (absence de déformations différées dans le temps) s'il n'y a aucune viscosité. Lorsqu'on dépasse le tiers de la température de fusion dans les alliages métalliques, on observe au contraire des déformations liées au caractère visqueux du comportement. On distingue classiquement 3 stades dans un essai de fluage, comme indiqué sur la figure 1.4a, le fluage primaire (I), au cours duquel le matériau se durcit le fluage secondaire (II) pendant lequel la vitesse est constante, et le fluage tertiaire (III) au cours duquel l'endommagement devient significatif, ce qui conduit à une augmentation de la vitesse menant à la rupture. La figure 1.4b montre quant à elle le résultat obtenu pour différents niveaux de chargement sur une fonte à 800°C.

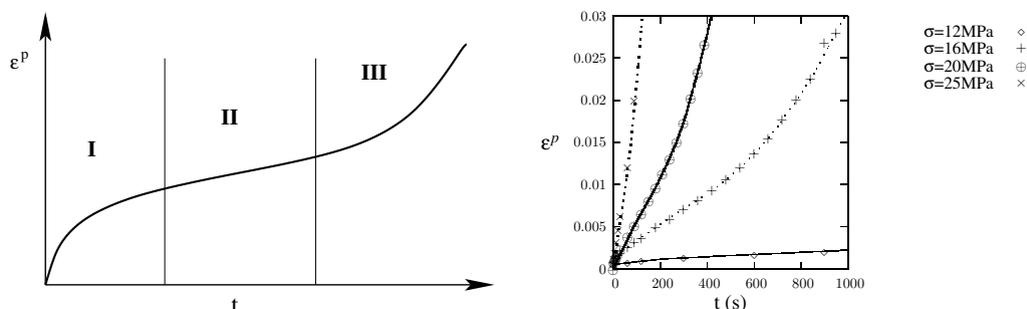


FIG. 1.4 – (a) Les trois étapes d'un essai de fluage ; (b) Fluage d'une fonte à 800°C

En fait, dans le cas d'un matériau réel (conçu par l'homme ou existant déjà dans la nature), des déformations différées (phénomène de viscosité) seront alors observées de façon à peu près systématique, à tel point qu'il faut admettre que tous les matériaux réels présentent ce phénomène de viscosité, pourvu qu'une période de temps suffisamment grande soit considérée. Ainsi, si une éprouvette cylindrique d'une roche saline (NaCl : sel gemme, KCl : potasse) d'une dizaine de centimètres est soumise à une

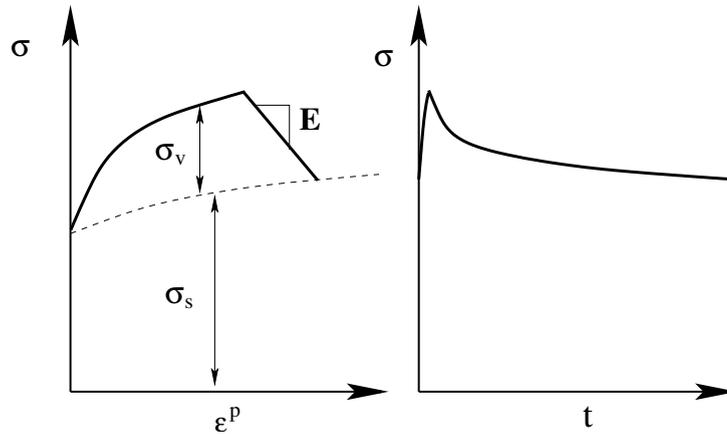


FIG. 1.5 – Représentation d'un essai de relaxation

pression axiale d'une dizaine de MPa, pression maintenue constante, et que sa hauteur est mesurée au bout d'une journée, puis une journée plus tard avec une précision absolue de 1mm, alors, à température ambiante, aucune variation de longueur ne sera détectée. Il ne faut pas en déduire que les roches salines à température ambiante ne présentent pas de viscosité, car, en augmentant la précision de la mesure ou en attendant plus longtemps (un mois de fluage par exemple), il est possible d'observer des déformations différées.

*Essai de relaxation* : Une autre manière de caractériser la viscosité d'un matériau est de le soumettre à un essai de relaxation, dans lequel la déformation de l'éprouvette est maintenue constante après une prédéformation initiale. Plus le comportement du matériau présente une composante visqueuse importante, et plus la contrainte chute rapidement, pour atteindre éventuellement une valeur nulle. Cet essai est essentiellement réalisé sur les métaux et les polymères.

*Essai triaxial* : Comme indiqué précédemment, certains matériaux ne peuvent pas être testés simplement en traction, en raison de leur très faible résistance, ou de leur forte sensibilité aux décentrages des lignes d'amarrage (béton, céramique). Ils sont alors testés en compression, ou en flexion. La compression uniaxiale sur des cylindres a déjà été décrite, mais il est parfois nécessaire d'avoir recours à un mode de sollicitation où les bords latéraux sont contenus (*essai triaxial*) : l'échantillon est soumis latéralement à une pression hydrostatique qui assure son maintien, ce qui permet par exemple de tester des matériaux pulvérulents (argiles, sables).

*Essai de flexion* : Il est réalisé sur des barrettes, avec 3 ou 4 points d'appuis, ce dernier cas permettant de bénéficier d'une zone centrale dans laquelle le «moment de flexion» est uniforme. Il est essentiellement utilisé avec des matériaux fragiles, dont le comportement sera élastique. La plastification, associée au fait que le comportement en traction et en compression peut être différent, conduit à des redistributions de contraintes complexes dans l'éprouvette, si bien que le dépouillement de l'essai lui-même peut nécessiter un calcul de structure.

Dans un même ordre d'idée, il existe également des essais de flexion rotative, dans lesquels une éprouvette en rotation, encastrée à une extrémité, subit un effort perpendiculaire à son axe, si bien que les points de la surface extérieure voient leur état de contrainte passer alternativement de la traction à la compression. Ces essais sont utilisés pour déterminer la «limite de fatigue», sollicitation en dessous de laquelle le matériau résistera à un chargement répété.

*Essai de torsion* : Réalisé sur éprouvette pleine, cet essai est essentiellement utilisé à haute température pour connaître l'aptitude à la mise en forme des métaux. L'avantage de ce type d'essai est d'éviter la striction. Par contre, il est d'interprétation difficile, dans la mesure où l'état de contrainte et déformation n'est pas uniforme. Il est possible de remédier à ce dernier inconvénient, en adoptant comme éprouvettes des tubes minces, qui peuvent être instrumentés localement, à l'aide de jauges ou

d'extensomètres.

*Essai de dureté* : Largement employé comme moyen de contrôle, il mesure la résistance à la pénétration d'indenteurs de diverses formes, par exemple une bille d'acier de gros diamètre (10 mm) dans le cas de l'essai Brinel, ou une pyramide diamant à base carrée, l'angle entre les faces opposées étant de  $136^\circ$  pour l'essai Vickers. Une relation empirique indique que, dans les aciers doux, la dureté Vickers (force/dimension de l'empreinte) est de l'ordre de 3 fois la résistance à la traction.

*Essai Charpy* : Il permet de caractériser sur un barreau entaillé le passage d'un mode de rupture ductile, accompagné de déformation inélastique, donc à forte énergie, à un mode de rupture fragile, présent à plus basse température, qui ne met en jeu que des énergies faibles. Cette étude se fait en rompant l'éprouvette sous impact à l'aide d'un mouton-pendule, et en mesurant l'énergie absorbée lors de l'impact : le résultat s'exprime en joules par centimètre carré de section résiduelle, et est dénommé résilience.

*Essais complexes* : Outre les essais de traction-torsion sur tube, il existe d'autres moyens de générer des états de contraintes multiaxiales contrôlés dans des éprouvettes. C'est le cas d'essais de traction-pression interne sur tube, ou encore d'essais sur des éprouvettes cruciformes.

## 1.4.2 Moyens de mesure, ordres de grandeur

La bonne connaissance de la précision des mesures effectuées est fondamentale pour pouvoir considérer d'un œil critique les résultats obtenus dans un essai mécanique.

- Les forces ou les contraintes sont généralement mesurées avec des dynamomètres, dont la précision relative est de l'ordre de  $10^{-3}$ .
- Les déplacements fournissent une information moyenne sur ce qui se passe dans une zone de l'éprouvette. Les capteurs doivent donc être fixés si possible dans une zone où les déformations sont homogènes, faute de quoi des hypothèses, ou un calcul de structure seront nécessaires pour analyser les résultats de l'essai. Les capteurs classiques, inductifs ou à jauges de déformation, assurent une précision absolue de l'ordre de  $1\mu\text{m}$ . Des développements spécifiques, ou l'utilisation d'extensomètres optiques peuvent permettre d'abaisser cette limite à  $0,2\mu\text{m}$ . Dans tous les cas, il est préférable d'effectuer une mesure locale de la déformation, ce qui permet de faire abstraction des phénomènes complexes prenant naissance hors de la partie *utile*, de section constante.
- L'information locale sur la déformation donnée par une jauge de déformation (fil résistant collé sur une éprouvette, qui se déforme avec elle, si bien que la résistance électrique change) est en général plus précise que la précédente, puisqu'il est possible de mesurer des déformations de l'ordre de  $10^{-7}$ . Néanmoins les jauges ne fonctionnent pas à haute température, et sont susceptibles de se décoller en cours d'essai.
- La température est une des grandeurs les plus difficiles à maîtriser. Les thermocouples (utilisant l'effet Peltier) fournissent en général une précision théorique inférieure au degré. Par contre, il peut être très délicat de venir positionner un thermocouple sur l'éprouvette, sans générer de résistance thermique de contact, et sans que la mesure ne perturbe le milieu environnant.
- La méthode électrique s'avère être un complément utile des méthodes citées ci-dessus, lorsqu'il s'agit de mettre en évidence l'endommagement ou la rupture d'une éprouvette conductrice. Elle consiste à faire circuler un courant continu de forte intensité dans l'éprouvette, et à mesurer la variation de potentiel sur deux prises de potentiels situées au voisinage de la partie utile. Les étalonnages peuvent s'effectuer sur des configurations de référence (fissures calibrées), ou par le calcul. Il est possible d'accéder à des variations de potentiel de l'ordre de 1mV, ce qui correspond en général à des fissures de l'ordre de quelques dixièmes de millimètres.

## 1.5 Mise en œuvre

La manière dont sont stockées et utilisées les connaissances en matériau et en mécanique a considérablement évolué au cours des vingt dernières années. Le recours à l'informatique est général, avec le développement de bases de données, de sites internet proposant leurs services, et les codes de calcul de structures notamment. Cette floraison ne dispense pas de développer une compréhension profonde des modèles utilisés en simulation. Sans les capacités de juger de la bonne tenue de ses résultats, un ingénieur ou un chercheur peut en effet se laisser porter par l'apparente facilité d'utilisation qu'apportent des interfaces-utilisateurs de plus en plus conviviales, et fournir des résultats, en couleur, tout à fait aberrants. Cette conséquence est d'autant plus probable que le modèle est complexe, et le comportement non linéaire est une source inépuisable de résultats erronés.

Pour tâcher d'éviter cet écueil, il faut en passer par un apprentissage manuel des ordres de grandeurs et des méthodologies de calcul. On sera ainsi mieux armé pour aborder l'indispensable outil numérique.



# Chapitre 2

## Rhéologie

La construction des modèles de comportement non linéaire des matériaux comporte deux volets : l'étude des propriétés rhéologiques et la définition de la forme des équations pour un chargement tridimensionnel. La *rhéologie*, étude des écoulements, permet de relier les contraintes, les déformations, et leurs dérivées, et caractérise la nature des comportements. La caractérisation expérimentale a été évoquée en introduction. Certains comportements fondamentaux ont été identifiés. Chacun va se caractériser ici par une *brique élémentaire*. Les comportements les plus complexes se bâtissent ensuite à partir de celles-ci en formant des assemblages qui sont décrits dans ce chapitre. La conception d'un modèle complet nécessite enfin le choix d'une généralisation qui permette de passer de l'étude sous chargement uniaxial à celle des chargements multiaxiaux. Ce sera l'objet du chapitre suivant, qui décrira les différents *critères* qui autorisent cette généralisation. On commence l'examen des différentes classes de modèle par quelques remarques sur les types de déformation que peut subir la matière.

### 2.1 Les différents types de «déformation»

#### 2.1.1 Les sources de «déformation»

Pour les lois de comportement les plus simples (élasticité, viscosité pure) un seul tenseur de déformation permet de caractériser les changements de forme de l'élément de volume. De nombreuses situations pratiques font au contraire intervenir d'autres types de déformations. Avant d'aborder cette description, on fait le bilan des éléments nécessaires à la construction d'une loi de comportement.

Un cadre devenu classique, et qui est présenté dans le cours de MMC [4] (chapitre 5) suppose que l'on définisse un certain nombre de *variables d'état* qui représentent à l'instant  $t$  le résultat de toute l'histoire du matériau. La déformation élastique est l'exemple d'une telle variable. Il faut ensuite introduire des coefficients, ou *paramètres matériau*, qui vont porter sur ces variables et définir les grandeurs associées (l'approche thermodynamique parle de «forces» thermodynamiques) qu'elles génèrent. Ainsi, le tenseur des modules d'élasticité permet-il de calculer le tenseur des contraintes. Un matériau est également soumis à l'action de *paramètres extérieurs*, qui vont créer en son sein des distorsions ou des variations de volume.

Le fait de solliciter le matériau dans des conditions extrêmes (fortes charges par exemple) fait apparaître des irréversibilités dans le processus de déformation, qui devront être caractérisées par de nouvelles variables d'état. On entamera au paragraphe suivant l'étude de ce type de déformation. Il faut auparavant citer le cas des *déformations paramétriques*. On regroupe derrière cette dénomination les modes de déformations additionnels, qui sont pilotés par des paramètres extérieurs. En toute rigueur les distorsions et dilatations produites *ne conduisent pas* à un tenseur de déformation, parce qu'elles ne vérifient pas forcément les équations de compatibilité. L'usage a néanmoins consacré l'abus de notation, et on utilise par exemple  $\tilde{\epsilon}^{th}$  pour désigner la dilatation thermique ; on accepte même parfois de parler de déformation thermique. Parmi les autres paramètres extérieurs qui fournissent des déformations

additionnelles, on peut citer par exemple :

- l'irradiation d'un matériau, qui provoque dans certaines gammes de température la germination et la croissance de cavités, ce qui produit un changement de volume ;
- le changement de phase ; les métaux et alliages, mais aussi les roches, peuvent changer de réseau cristallin en fonction de la température et de la pression. Ces phénomènes doivent bien entendu être décrits à l'aide de variables d'état, mais, dans la mesure où une quantité donnée d'atomes n'occupera pas le même volume en fonction de sa phase cristallographique (cubique, hexagonale, ...), un changement de volume spécifique accompagnera de façon systématique le changement de phase.

### 2.1.2 Dilatation thermique

La dilatation thermique est proportionnelle à la variation de température pour une petite variation de celle-ci autour d'un point de fonctionnement considéré. Ceci permet donc d'introduire un tenseur de dilatation thermique. Sur une large gamme de température, l'expérience montre que les termes de ce tenseur dépendent de la température. Comme par ailleurs on peut choisir la température à laquelle on prend la dilatation thermique nulle, il faut introduire deux températures particulières dans la définition,  $T_0$  température à laquelle  $\tilde{\varepsilon}^{th}$  est nul, et  $T_r$ , température de référence à partir de laquelle est mesuré  $\alpha$ . La forme complète est alors :

- pour le cas anisotrope

$$\tilde{\varepsilon}^{th} = \alpha(T)(T - T_r) - \alpha(T_0)(T_0 - T_r) \quad (2.1)$$

- pour le cas isotrope

$$\tilde{\varepsilon}^{th} = \alpha(T)(T - T_r)I - \alpha(T_0)(T_0 - T_r)I \quad (2.2)$$

soit

$$\varepsilon_{ij}^{th} = \alpha(T)(T - T_r)\delta_{ij} - \alpha(T_0)(T_0 - T_r)\delta_{ij} \quad (2.3)$$

Dans une telle définition,  $\alpha(T)$  (dépendant de la température) est le *coefficient de dilatation sécant*. C'est lui qui est ordinairement tabulé dans les bases de données.

La déformation totale s'écrit comme une somme de la part élastique et de la part thermique :

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^{th}$$

Lorsque le champ de température dans une pièce n'est pas uniforme, la dilatation varie d'un point à l'autre. Si le champ appliqué permet de vérifier les conditions de compatibilité, et s'il peut se développer une *dilatation libre*, il n'y a pas de contrainte, dans le cas contraire (champ de température trop complexe ou restrictions cinématiques), ceci conduit au développement de contraintes thermomécaniques.

## 2.2 Les briques de base du comportement non linéaire

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements «de base», qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité. Les éléments les plus courants sont reportés en figure 2.1, où le point au-dessus d'une variable désigne la dérivée temporelle :

1. Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (figure 2.1a).
2. L'amortisseur, qui schématise la viscosité, linéaire (figure 2.1b) ou non-linéaire (figure 2.1c). La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.

3. Le patin, qui modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante (figure 2.1d). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide–parfaitement plastique.

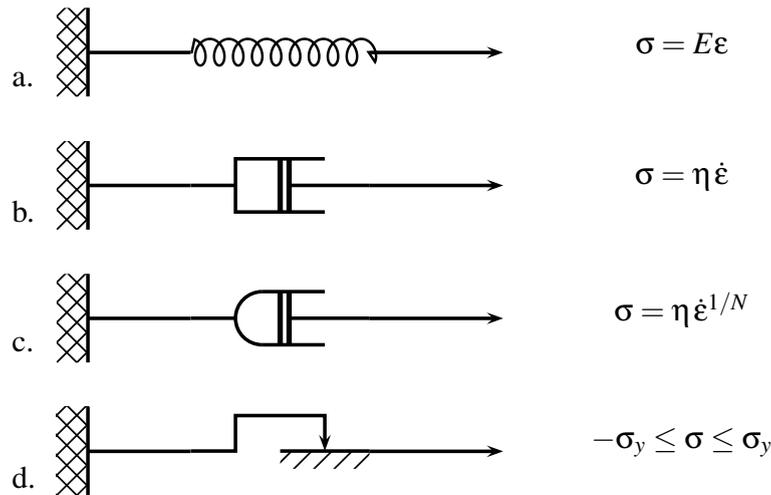


FIG. 2.1 – Les « briques de base » pour la représentation des comportements

Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des modèles rhéologiques. Ceux-ci représentent des systèmes mécaniques qui servent de support dans la définition des modèles. Il ne faut en aucun cas leur accorder un trop grand crédit pour ce qui concerne la représentation des phénomènes physiques qui sont à la base des déformations. Ils sont néanmoins brièvement présentés ici, car ils permettent de comprendre la nature des relations à introduire pour chaque type de comportement, en pratiquant par exemple l'exercice qui consiste à combiner deux à deux les modèles élémentaires. C'est aussi l'occasion d'introduire l'ensemble du vocabulaire qui sera utile dans le cas général des chargements tridimensionnels.

En fonction du type de chargement imposé, la réponse de ces systèmes peut être jugée dans 3 plans différents :

- plan déformation–contrainte,  $\varepsilon$ - $\sigma$ , pour l'essai de traction simple, ou d'*écrouissage*, augmentation monotone de la charge ou de la déformation ;
- plan temps–déformation,  $t$ - $\varepsilon$ , pour l'essai de *fluage*, sous charge constante ;
- plan temps–contrainte,  $t$ - $\sigma$ , pour l'essai de *relaxation*, sous déformation constante.

## 2.3 Plasticité uniaxiale

### 2.3.1 Modèle élastique–parfaitement plastique

L'association d'un ressort et d'un patin en série (figure 2.2 a) produit un comportement *élastique parfaitement plastique*, modélisé en figure 2.2 c. Le système ne peut pas supporter une contrainte dont la valeur absolue est plus grande que  $\sigma_y$ .

Pour caractériser ce modèle, il faut considérer une *fonction de charge*  $f$  dépendant de la seule variable  $\sigma$ , et définie par :

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \quad (2.4)$$

Le domaine d'élasticité correspond aux valeurs négatives de  $f$ , et le comportement du système se résume

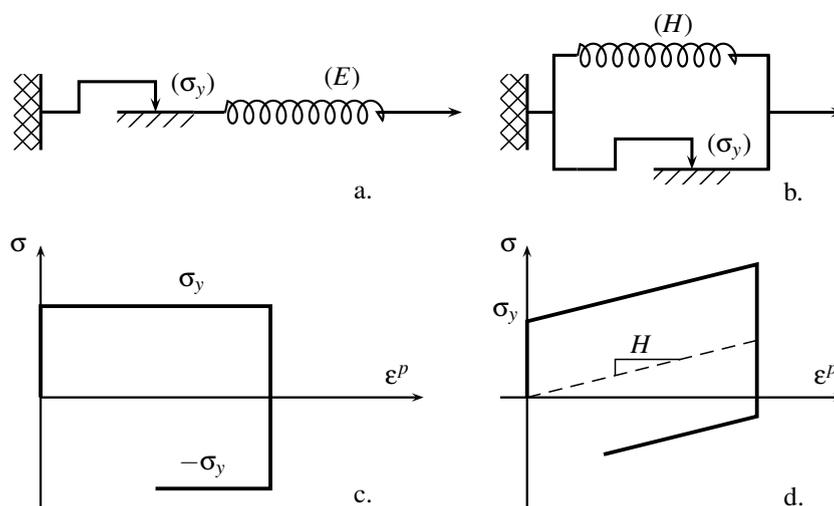


FIG. 2.2 – Associations en série ou parallèle de patin et ressort

alors aux équations suivantes :

$$- \text{ domaine d'élasticité si : } f < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \dot{\sigma}/E) \quad (2.5)$$

$$- \text{ décharge élastique si : } f = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \dot{\sigma}/E) \quad (2.6)$$

$$- \text{ écoulement plastique si : } f = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} = 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^p) \quad (2.7)$$

En régime élastique, la vitesse de déformation plastique est bien entendu nulle, la vitesse de déformation élastique devenant à son tour nulle pendant l'écoulement plastique. Ceci implique que l'expression de la vitesse de déformation plastique ne peut pas se faire à l'aide de la contrainte. C'est au contraire la vitesse de déformation qui doit être choisie comme pilote.

Le modèle est *sans écoulement*, puisque le niveau de contrainte ne varie plus au sortir du domaine d'élasticité. Il n'y a pas d'énergie stockée au cours de la déformation, et la dissipation en chaleur est égale à la puissance plastique. Le modèle est susceptible d'atteindre des déformations infinies sous charge constante, conduisant à la ruine du système par déformation excessive.

### 2.3.2 Modèle de Prager

L'association en parallèle de la figure 2.2b correspond au comportement illustré en figure 2.2d. Dans ce cas, le modèle présente de l'écrouissage. Il est dit *cinématique linéaire* [16], car dépendant linéairement de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, le modèle est rigide-plastique. Il devient élasto-plastique si l'on rajoute un ressort en série. La forme de la courbe dans le plan  $\sigma - \varepsilon^p$  est due au fait que, lors de l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort vaut  $X = H\varepsilon^p$ . Par ailleurs, cet écoulement ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte dans le patin, soit  $|\sigma - H\varepsilon^p|$ , est égale à  $\sigma_y$ . Pour une déformation donnée, cette contrainte  $X$  est une *contrainte interne* qui caractérise le nouvel état neutre du matériau.

Ce deuxième exemple offre l'occasion d'écrire un modèle plus complet que précédemment. La fonction de charge dépend maintenant de la contrainte appliquée et de la contrainte interne. Elle s'écrit :

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad (2.8)$$

Il n'y aura présence d'écoulement plastique que si on vérifie à la fois  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ . Ceci conduit à la

condition suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial X} \dot{X} = 0 \quad (2.9)$$

D'où :

$$\text{signe}(\sigma - X) \dot{\sigma} + \text{signe}(\sigma - X) \dot{X} = 0 \quad (2.10)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{X}, \text{ et finalement : } \dot{\varepsilon}^p = \dot{\sigma}/H \quad (2.11)$$

Dans ce cas, la contrainte augmente au cours de l'écoulement plastique, si bien qu'elle peut servir de variable de contrôle. Mais il est aussi toujours possible d'exprimer la vitesse d'écoulement plastique en fonction de la vitesse de déformation totale, en utilisant la décomposition de la déformation combinée avec l'expression de la vitesse de déformation plastique, le cas où  $H = 0$  redonnant bien entendu le cas du matériau parfaitement plastique :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E + H} \dot{\varepsilon} \quad (2.12)$$

Il est remarquable de noter que le calcul de l'énergie dissipée au cours d'un cycle produit exactement le même résultat que pour le premier montage, ce qui indique que, pour ce type de comportement, une partie de l'énergie est *temporairement* stockée dans le matériau (ici, dans le ressort), et *entièrement* restituée à la décharge. Ceci donne une illustration physique de la notion d'écrouissage *renversable*, alors que d'autres règles d'écrouissage cinématique, non-linéaire, qui ne seront pas considérées dans le cadre de ce cours, sont accompagnées d'une dissipation d'énergie.

### 2.3.3 Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale

Dans le cas général, les conditions de «charge-décharge» s'expriment donc :

$$\text{– domaine d'élasticité si : } f(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E) \quad (2.13)$$

$$\text{– décharge élastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et } \dot{f}(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E) \quad (2.14)$$

$$\text{– écoulement plastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et } \dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\varepsilon}^p) \quad (2.15)$$

Dans le cas général, le module  $H$  dépend de la déformation et/ou des variables d'écrouissage. La valeur du module plastique au point  $(\sigma, A_i)$  s'obtient en écrivant que le point représentatif du chargement reste sur la limite du domaine d'élasticité au cours de l'écoulement. L'équation qui en découle s'appelle la *condition de cohérence* :

$$\dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (2.16)$$

Ce formalisme peut paraître un peu lourd dans le cadre d'un chargement uniaxial, mais il est utile de le mettre en place, car ce sont les mêmes outils qui seront ensuite utilisés dans le cas plus complexe des chargements multiaxiaux. Dans les deux exemples qui ont été décrits, le domaine d'élasticité est soit fixe, soit mobile, sa taille étant conservée. Le premier cas ne nécessite bien entendu aucune variable d'écrouissage, le second fait intervenir une variable  $X$  qui dépend de la valeur actuelle de la déformation plastique. Cette variable deviendra tensorielle dans le cas général. Comme indiqué plus haut le type d'écrouissage correspondant s'appelle écoulement cinématique (figure 2.3b).

Une autre évolution élémentaire que peut subir le domaine d'élasticité est l'expansion. Cet autre cas (figure 2.3a) correspond à un matériau dont le domaine d'élasticité voit sa taille augmenter, mais qui reste centré sur l'origine : il s'agit d'un écoulement isotrope [22]. La variable d'écrouissage qui intervient dans  $f$  est la dimension du domaine d'élasticité, notée  $R$  :

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - R - \sigma_y \quad (2.17)$$

L'évolution de cette variable est la même quel que soit le signe de la vitesse de déformation plastique. Elle s'exprimera donc en fonction de la *déformation plastique cumulée*,  $p$ , variable dont la dérivée est

égale à la valeur absolue de la vitesse de la déformation plastique :  $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p|$ . Bien entendu, il n'y a pas de différence entre  $p$  et  $\varepsilon^p$  tant que le chargement est monotone croissant. Dans ce cas, vérifier la condition de cohérence revient tout simplement à exprimer que la valeur actuelle de la contrainte est sur la frontière du domaine d'élasticité. Pour l'écroutissage cinématique, cela s'écrit  $\sigma = X + \sigma_y$ , et pour l'écroutissage isotrope  $\sigma = R + \sigma_y$ . Cela signifie donc que c'est la loi d'évolution de la variable d'écroutissage qui détermine exactement la forme de la courbe de traction. Les deux modèles rhéologiques invoqués donnent des courbes linéaires, avec des modules plastiques nul ou constant. Il est souvent plus réaliste de considérer une courbe qui se sature en fonction de la déformation, soit par exemple une fonction puissance (loi de Ramberg–Osgood, avec deux coefficients matériaux  $K$  et  $m$ ) ou une exponentielle, cette dernière formulation offrant l'avantage d'introduire une contrainte ultime  $\sigma_u$  supportable par le matériau (deux coefficients matériau,  $\sigma_u$  et  $b$  en plus de  $\sigma_y$ ) :

$$\sigma = \sigma_y + K (\varepsilon^p)^m \quad (2.18)$$

$$\sigma = \sigma_u + (\sigma_y - \sigma_u) \exp(-b\varepsilon^p) \quad (2.19)$$

Dans bien des cas, les utilisateurs ne prennent pas la peine de définir une forme explicite de la loi de comportement, et décrivent la courbe de traction point par point. Cela revient implicitement à considérer un écroutissage isotrope. Ce type d'écroutissage est prédominant pour les déformations importantes (au-delà de 10%). Cependant, l'écroutissage cinématique continue de jouer un rôle important lors de décharges, même pour les grandes déformations, et c'est lui qui est prépondérant pour les faibles déformations et les chargements cycliques. Il permet en particulier de simuler correctement l'effet Bauschinger, c'est-à-dire le fait que la contrainte d'élasticité en compression décroît par rapport à la contrainte initiale à la suite d'un précrouissage en traction. Il est néanmoins moins souvent utilisé que l'écroutissage isotrope, car son traitement numérique est plus délicat.

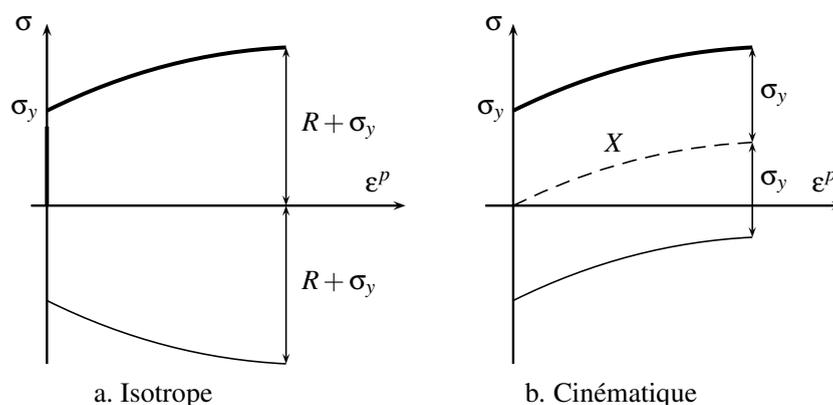


FIG. 2.3 – Illustration des deux principaux types d'écroutissage

## 2.4 Viscoélasticité uniaxiale

### 2.4.1 Un exemple de modèle rhéologique

Le modèle de Maxwell regroupe un amortisseur et un ressort en série (figure 2.4a), celui de Voigt un amortisseur et un ressort en parallèle (figure 2.4b). Leurs équations respectives sont :

$$\text{–Maxwell : } \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_0 + \sigma/\eta \quad (2.20)$$

$$\text{–Voigt : } \sigma = H\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \text{ou encore : } \dot{\varepsilon} = (\sigma - H\varepsilon)/\eta \quad (2.21)$$

La particularité du modèle de Voigt est de ne pas présenter d'élasticité instantanée. Ceci entraîne que sa fonction de relaxation n'est pas continue et dérivable par morceaux, avec un saut fini à l'origine :

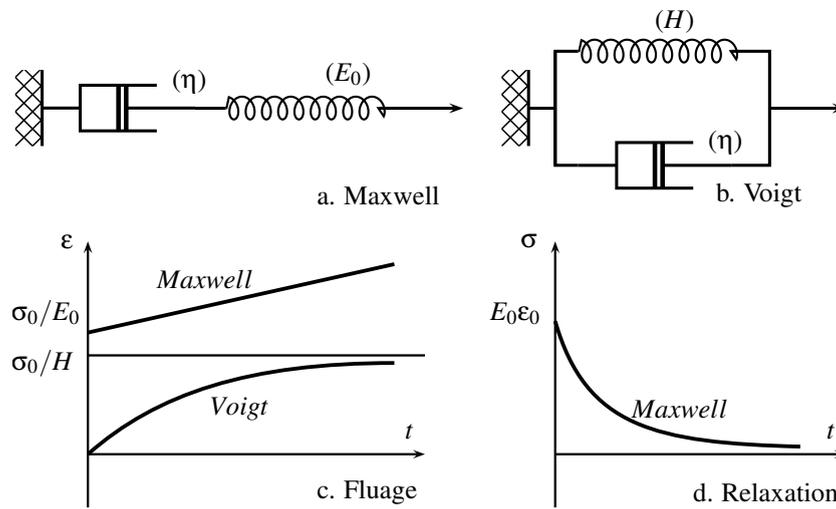


FIG. 2.4 – Fonctionnement des modèles de Maxwell et Voigt

l'application d'un saut de déformation en  $t = 0$  produit une contrainte infinie. Ce modèle n'est donc pas utilisable en relaxation, sauf si la mise en charge est progressive, et sera pour cette raison associé à un ressort en série pour effectuer des calculs de structure (modèle de Kelvin–Voigt du paragraphe suivant). Sous l'effet d'une contrainte  $\sigma_0$  constante en fonction du temps, la déformation tend vers la valeur asymptotique  $\sigma_0/H$ , le fluage est donc limité (figure 2.4c). Par ailleurs, si, après une mise en charge lente, la déformation est fixée à une valeur  $\epsilon_0$ , la contrainte asymptotique sera  $H \epsilon_0$ . Il n'y a donc pas dans ce dernier cas disparition complète de la contrainte. Au contraire, dans le cas du modèle de Maxwell, la vitesse de fluage est constante (figure 2.4c), et la disparition de contrainte au cours d'une expérience de relaxation est totale (figure 2.4d).

Dans le cas de modèles et de chargement aussi simples, la réponse est obtenue instantanément par intégration directe des équations différentielles. Les formules obtenues sont respectivement, pour le modèle de Maxwell :

$$\text{–fluage sous une contrainte } \sigma_0 : \quad \epsilon = \sigma_0/E_0 + \sigma_0 t / \eta \quad (2.22)$$

$$\text{–relaxation à la déformation } \epsilon_0 : \quad \sigma = E_0 \epsilon_0 \exp[-t/\tau] \quad (2.23)$$

et pour le modèle de Voigt :

$$\text{–fluage sous une contrainte } \sigma_0 : \quad \epsilon = (\sigma_0/H)(1 - \exp[-t/\tau']) \quad (2.24)$$

Les constantes  $\tau = \eta/E_0$  et  $\tau' = \eta/H$  sont homogènes à un temps,  $\tau$  désignant le *temps de relaxation* du modèle de Maxwell.

### 2.4.2 Étude d'un modèle composé

Le modèle de Kelvin–Voigt (figure 2.5a) présente respectivement les réponses suivantes, pour  $t > 0$ , en fluage sous une contrainte  $\sigma_0$ , en posant  $\tau_f = \eta/H$ , et en relaxation pour une déformation  $\epsilon_0$ , en posant  $\tau_r = \eta/(H + E_0)$  :

$$\epsilon(t) = C(t) \sigma_0 = \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{H} (1 - \exp[-t/\tau_f]) \right) \sigma_0 \quad (2.25)$$

$$\sigma(t) = E(t) \epsilon_0 = \left( \frac{H}{H + E_0} + \frac{E_0}{H + E_0} \exp[-t/\tau_r] \right) E_0 \epsilon_0 \quad (2.26)$$

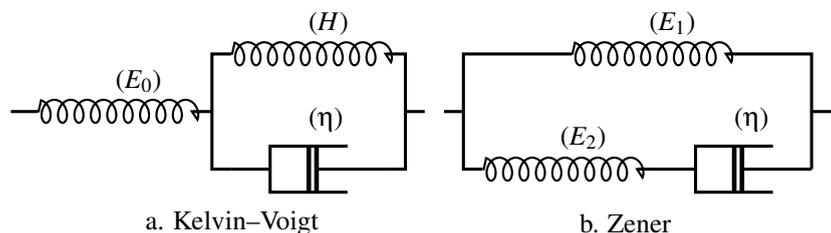


FIG. 2.5 – Exemple de modèles composés

Le temps caractéristique en relaxation,  $\tau_r$ , est plus court que le temps correspondant en fluage,  $\tau_f$ . Le matériau évolue donc plus vite vers son état asymptotique en relaxation qu'en fluage.

Le modèle de Zener (figure 2.5b) peut se ramener au modèle de Kelvin-Voigt, à l'aide du double changement de variable  $1/E_1 = 1/E_0 + 1/H$ , et  $E_2 = E_0 + H$ , ce qui prouve que les deux modèles sont en fait identiques. La même observation peut être faite en fluage. Ce modèle correspond au comportement du béton frais. Les modèles indiqués peuvent être encore améliorés :

- le *modèle de Kelvin-Voigt généralisé* est obtenu en ajoutant en série d'autres modules amortisseur-ressort ( $H, \eta$ ) dans le cas du premier modèle ; ce modèle représente en général correctement le comportement des polymères fortement réticulés ;
- le *modèle de Maxwell généralisé* est obtenu en ajoutant en parallèle d'autres modules amortisseur-ressort ( $E_2, \eta$ ) au second modèle ; ce modèle représente qualitativement le comportement des polymères thermoplastiques.

## 2.5 Viscoplasticité uniaxiale

### 2.5.1 Un exemple de modèle rhéologique

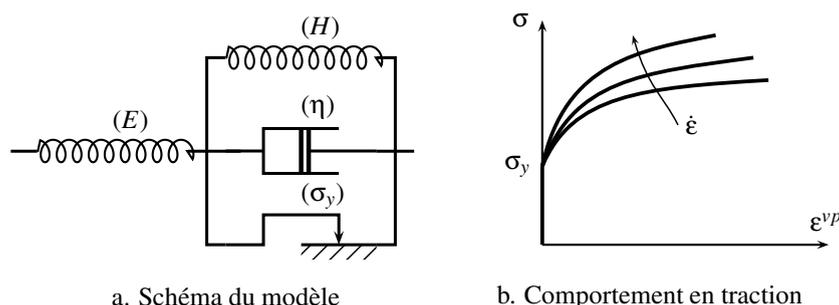


FIG. 2.6 – Modèle de Bingham généralisé

La figure 2.6a indique comment, en rajoutant un simple amortisseur, il est possible de passer très simplement d'un modèle ayant un comportement plastique indépendant du temps à un modèle viscoplastique : le modèle obtenu est le modèle de Bingham généralisé. On retrouverait l'original de ce modèle en enlevant le ressort en série ( $E \rightarrow \infty$ , pas d'élasticité instantanée, on obtient alors un modèle *rigide viscoplastique*), et en supprimant le ressort en parallèle, ( $H = 0$ , pas d'écrouissage). La déformation élastique se lit aux bornes du ressort de caractéristique  $E$ , la déformation viscoplastique, que l'on nommera  $\epsilon^{vp}$ , aux bornes de l'assemblage en parallèle. La détermination des équations de ce modèle s'effectue en considérant les équations de comportement individuelles de chacun des éléments :

$$X = H\epsilon^{vp} \quad \sigma_v = \eta \dot{\epsilon}^{vp} \quad \sigma_p \leq \sigma_y \quad (2.27)$$

où  $X$ ,  $\sigma_v$  et  $\sigma_p$  sont respectivement les contraintes dans le ressort de caractéristique  $H$ , dans l'amortisseur et dans le patin, et :

$$\sigma = X + \sigma_v + \sigma_p \quad (2.28)$$

Il y a donc comme pour le modèle plastique un domaine d'élasticité, dont la frontière est atteinte lorsque  $|\sigma_p| = \sigma_y$ . On distingue alors trois régimes de fonctionnement, selon que la vitesse de déformation viscoplastique est nulle, positive ou négative :

$$(a) \quad \dot{\epsilon}^{vp} = 0 \quad |\sigma_p| = |\sigma - H\epsilon^{vp}| \leq \sigma_y \quad (2.29)$$

$$(b) \quad \dot{\epsilon}^{vp} > 0 \quad \sigma_p = \sigma - H\epsilon^{vp} - \eta\dot{\epsilon}^{vp} = \sigma_y \quad (2.30)$$

$$(c) \quad \dot{\epsilon}^{vp} < 0 \quad \sigma_p = \sigma - H\epsilon^{vp} - \eta\dot{\epsilon}^{vp} = -\sigma_y \quad (2.31)$$

Le cas (a) correspond à l'intérieur du domaine d'élasticité ( $|\sigma_p| < \sigma_y$ ) ou à un état de décharge élastique ( $|\sigma_p| = \sigma_y$  et  $|\dot{\sigma}_p| \leq 0$ ), les deux autres cas à de l'écoulement ( $|\sigma_p| = \sigma_y$  et  $|\dot{\sigma}_p| = 0$ ). En posant  $\langle x \rangle = \max(x, 0)$ , les trois cas peuvent se résumer par une seule expression :

$$\eta\dot{\epsilon}^{vp} = \langle |\sigma - X| - \sigma_y \rangle \text{signe}(\sigma - X) \quad (2.32)$$

ou encore :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\langle f \rangle}{\eta} \text{signe}(\sigma - X) \quad \text{avec} \quad f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad (2.33)$$

La nature du modèle a maintenant complètement changé, puisque le point représentatif de l'état de contrainte courant peut se trouver dans la zone  $f > 0$ , et que la vitesse d'écoulement est maintenant régie par le temps : elle peut être non nulle sans qu'il y ait d'incrément de contrainte ou de déformation. Ceci explique qu'en figure 2.6b la courbe de traction ne soit plus unique (plus la vitesse est grande, plus la contrainte visqueuse  $\sigma_v$  sera élevée, et plus la courbe de traction sera haute), et que, lors d'une décharge, le point de fonctionnement ne pénètre pas immédiatement dans le domaine d'élasticité (on peut donc avoir un écoulement positif à contrainte décroissante). Par ailleurs, il est possible de simuler des expériences de fluage ou de relaxation.

En fluage (figure 2.7), en supposant qu'on applique un échelon de contrainte (de 0 à  $\sigma_o > \sigma_y$ ) à partir d'un état de référence où toutes les déformations sont nulles, le modèle prévoit que la déformation viscoplastique est une exponentielle en fonction du temps  $t$ , avec un temps caractéristique  $\tau_f = \eta/H$  (figure 2.7a) :

$$\epsilon^{vp} = \frac{\sigma_o - \sigma_y}{H} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right) \quad (2.34)$$

La figure 2.7b montre, dans le plan contrainte-déformation viscoplastique, les évolutions respectives de la contrainte interne  $X$  et du seuil  $X + \sigma_y$ . Lorsque ce dernier rejoint la contrainte appliquée  $\sigma_o$ , la vitesse de déformation viscoplastique s'annule.

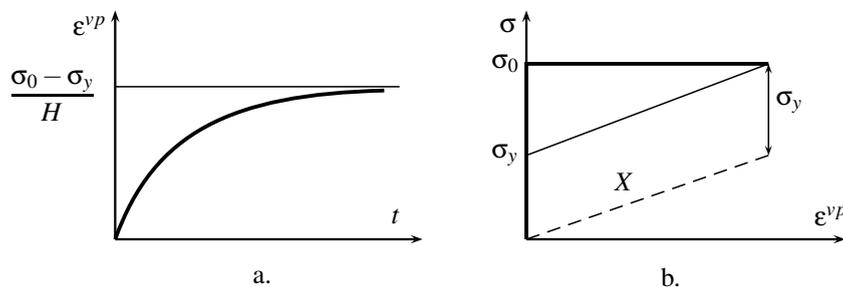


FIG. 2.7 – Fluage avec le modèle de Bingham

En relaxation, la réponse à un échelon de déformation (de 0 à  $\varepsilon_0$  tel que  $E\varepsilon_0 > \sigma_y$ ) fait cette fois intervenir un temps caractéristique de relaxation  $\tau_r = \eta/(E + H)$  :

$$\sigma = \sigma_y \frac{E}{E + H} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right) + \frac{E\varepsilon_0}{E + H} \left( H + E \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right) \quad (2.35)$$

La figure 2.8a montre le trajet parcouru par le point représentatif de l'état de contrainte au cours de la relaxation (pente  $-E$  puisque  $\dot{\varepsilon}^{vp} + \dot{\sigma}/E = 0$ ). La figure 2.8b représente quant à elle le trajet caractéristique au cours d'une expérience d'*effacement*, ou encore de *recouvrance*. En fonction du niveau de chargement initial, on peut rencontrer après décharge une vitesse d'écoulement négative ou nulle, mais en aucun cas on ne pourra ramener la déformation viscoplastique à zéro, sauf dans le cas particulier où la contrainte  $\sigma_y$  est nulle. Il n'y a alors plus de seuil initial, et on conçoit bien qu'il n'est plus nécessaire dans ce cas de définir une décomposition de la déformation : on retrouve d'ailleurs le modèle de Kelvin–Voigt, donc une approche viscoélastique.

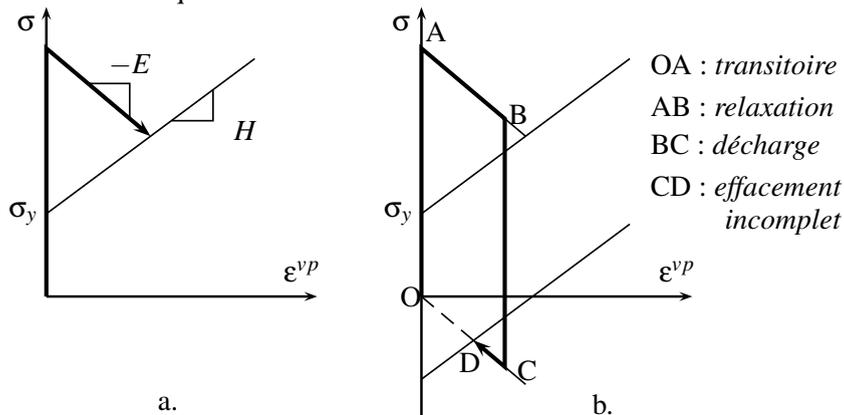


FIG. 2.8 – Fonctionnement du modèle de Bingham à déformation imposée

## 2.5.2 Quelques modèles classiques en viscoplasticité

Dans l'exemple précédent, la vitesse de déformation viscoplastique est proportionnelle à une certaine contrainte efficace, différence entre la contrainte appliquée et le seuil, qui représente la distance entre le point de fonctionnement actuel et la frontière du domaine d'élasticité, qui n'est rien d'autre que la valeur de la fonction  $f$  au point de fonctionnement courant. La relation linéaire peut être remplacée par une forme plus générale, en introduisant une fonction de viscosité,  $\phi$ , qui fournit alors en traction simple :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \phi(f) \quad (2.36)$$

Pour un modèle qui comporterait à la fois de l'écroutissage isotrope et cinématique, cette relation s'inverse sous la forme suivante, toujours en traction simple :

$$\sigma = \sigma_y + X + R + \phi^{-1}(\dot{\varepsilon}^{vp}) = \sigma_y + X + R + \sigma_v \quad (2.37)$$

La courbe de traction est déterminée par l'évolution du seuil, exactement comme dans le cas d'un modèle de plasticité (au travers de  $X$  et  $R$ ), mais également par la fonction de viscosité, qui pilote la valeur de la contrainte visqueuse  $\sigma_v$ . Pour des raisons physiques évidentes, on considère que  $\phi(0) = 0$ , et on suppose également que  $\phi$  est une fonction monotone croissante. Dans le cas où  $\sigma_v$  s'annule, le modèle reproduit un comportement plastique indépendant du temps. Par ailleurs, plus la vitesse de sollicitation augmente, et plus la contrainte atteinte pour une déformation donnée sera élevée.

Dans le cadre d'un modèle viscoplastique, il y a donc deux possibilités pour introduire de l'écroutissage. On conserve les possibilités d'action sur des variables de type  $X$  et  $R$ , et on peut également

jouer sur la forme de la contrainte visqueuse. On appelle classiquement modèles à écrouissage additif ceux qui jouent sur les variables de type plasticité et modèles à écrouissage multiplicatif ceux qui jouent sur la contrainte visqueuse, une approche où les deux mécanismes sont présents étant bien entendu également envisageable. Par ailleurs, contrairement au cas de la plasticité, on peut ici considérer un modèle dans lequel le domaine d'élasticité se réduit à l'origine ( $\sigma = 0$ ), et qui ne possède pas d'écrouissage. Ainsi le modèle le plus courant est-il le modèle de Norton (avec deux coefficients matériau  $K$  et  $n$ ) :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left( \frac{|\sigma|}{K} \right)^n \text{signe}(\sigma) \quad (2.38)$$

On peut le généraliser pour en faire un modèle à seuil sans écrouissage, ou réintroduire  $X$  et  $R$  aux côtés de  $\sigma_y$ , ce qui conduit à un modèle à écrouissage additif.

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_y}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma) \quad (2.39)$$

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma - X| - R - \sigma_y}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma - X) \quad (2.40)$$

Il y a également une grande liberté pour choisir d'autres formes que la fonction puissance, ainsi un sinus hyperbolique dans le modèle de Sellars et Teggart (loi sans écrouissage, coefficients  $A$  et  $K$ ) :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = A \sinh \left( \frac{|\sigma|}{K} \right) \text{signe}(\sigma) \quad (2.41)$$

Pour obtenir des lois à écrouissage multiplicatif, il faut admettre que la fonction  $\phi$  ne dépend pas uniquement de  $f$ , ainsi la loi de Lemaitre (coefficients matériau  $K$ ,  $m$  et  $n$  positifs) :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left( \frac{|\sigma|}{K} \right)^n p^{-n/m} \text{signe}(\sigma) \quad \text{avec} \quad \dot{p} = |\dot{\epsilon}^{vp}| \quad (2.42)$$

## 2.6 Influence de la température

Tous les coefficients caractéristiques qui ont été définis ci-dessus sont susceptibles de dépendre de la température. Les dépendances se définissent en général par des tables, après examen du comportement isotherme. Dans certains cas, lorsque les mécanismes physiques sont bien définis, il est possible de préciser explicitement l'influence de la température. La loi la plus couramment utilisée pour cela est la loi d'Arrhenius. Elle est valide en fluage. Elle introduit une énergie d'activation thermique  $Q$ , et  $R$ , constante des gaz parfaits (le rapport  $Q/R$  est homogène à une température), et indique que plus la température est élevée pour une charge donnée, plus la vitesse de déformation est grande :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \dot{\epsilon}_o \exp(-Q/RT) \quad (2.43)$$

Ceci permet de construire des équivalences temps-température, et, en menant en laboratoire des essais à température plus élevée que la température de fonctionnement visée dans les applications, d'obtenir en un temps limité des informations sur le comportement à long terme. Cette approche doit bien entendu être manipulée avec précaution dans le cas de matériaux vieillissants, et elle ne peut être étendue à de trop grandes plages de température.

## Résumé

Les équations très générales qui ont été écrites pour le moment mettent en évidence la nature des modèles de viscoélasticité, de plasticité et de viscoplasticité. Ces deux derniers ont en commun l'existence d'un domaine d'élasticité (éventuellement réduit à l'origine pour le modèle viscoplastique) et de variables d'écroutissage. Par contre, il faut aussi retenir que l'écoulement plastique est *instantané*, alors que l'écoulement viscoplastique est *retardé* :

$$d\varepsilon^p = g(\sigma, \dots) d\sigma \quad d\varepsilon^{vp} = g(\sigma, \dots) dt \quad (2.44)$$

Ceci aura des conséquences importantes pour l'écriture du comportement élasto-(visco)-plastique tangent, qui est la caractéristique utilisée par les codes de calcul de structures.

On ne considère dans ce cours que des formes très naïves d'écroutissage, dans la mesure où l'objectif est avant tout de mettre en place les structures des théories. La description de formes plus réalistes nécessiterait bien plus de temps. On retiendra pour mémoire les effets des chargements cycliques, des trajets de chargement multiaxiaux non proportionnels, des changements de phase, le vieillissement, les interactions avec l'environnement, etc... La plupart de ces effets sont maintenant bien documentés, et font l'objet de modélisations spécifiques.

En l'absence de déformations paramétriques, les principales équations sont donc les suivantes (en adoptant à partir de maintenant la même notation,  $\varepsilon^p$ , pour la déformation viscoplastique comme pour la déformation plastique) :

- Viscoélasticité ; le modèle est une combinaison des déformations, des contraintes, et de leurs vitesses :

$$\text{--Maxwell : } \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_0 + \sigma/\eta$$

$$\text{--Voigt : } \sigma = H\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \text{ou encore : } \dot{\varepsilon} = (\sigma - H\varepsilon)/\eta$$

- Plasticité et viscoplasticité :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

- Plasticité :

$$\text{-- domaine d'élasticité si : } f(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E)$$

$$\text{-- décharge élastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et } \dot{f}(\sigma, A_i) < 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E)$$

$$\text{-- écoulement plastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \text{et } \dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\varepsilon}^p)$$

En traction à contrainte imposée :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\sigma}}{H}$$

En traction à déformation imposée :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\varepsilon}}{E + H}$$

- Viscoplasticité :

$$\text{-- domaine d'élasticité si : } f(\sigma, A_i) \leq 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E)$$

$$\text{-- écoulement plastique si : } f(\sigma, A_i) > 0 \quad (\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\varepsilon}^p)$$

En traction à contrainte et à déformation imposée, une forme possible est :

$$\dot{\varepsilon}^p = \left( \frac{\sigma - \sigma_y}{K} \right)^n$$

## Chapitre 3

# Critères

La description des modèles à utiliser sous chargement uniaxial qui a été faite dans le chapitre précédent a mis en évidence un domaine d'élasticité, dans l'espace des contraintes et des variables d'érouissage, pour lequel il n'y a pas d'écoulement plastique ou viscoplastique. La trace de ce domaine sur l'axe de la contrainte se limite à un segment de droite, qui peut subir une translation ou une expansion (il peut même parfois se limiter à un point). Par ailleurs certains modèles sont capables de représenter une contrainte maximale supportable par le matériau. Afin de pouvoir aborder l'étude des chargements multiaxiaux, il est nécessaire de se donner les moyens de définir de telles limites en tridimensionnel. On passe donc en revue les outils disponibles pour écrire ces modèles dans le cas de milieux continus, enfin on montre les principales classes de critères. De même que pour les lois d'écoulement qui ont été citées précédemment, le choix de tel ou tel critère va dépendre du matériau étudié.

### 3.1 Les outils disponibles

Le cas du chargement uniaxial étudié jusqu'à présent fait apparaître un domaine d'élasticité au travers de deux valeurs de contrainte, l'une en traction, l'autre en compression, pour lesquelles se produit l'écoulement plastique. Ainsi dans le cas du modèle de Prager, le domaine d'élasticité *initial* est le segment  $[-\sigma_y, \sigma_y]$ , et sa position pour une déformation plastique  $\varepsilon^p$  est  $[-\sigma_y + X, \sigma_y + X]$ , avec  $X = H\varepsilon^p$ . Il est décrit par la fonction de charge (définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ),  $f : (\sigma, X) \rightarrow f(\sigma, X)$ . Pour définir ce même domaine en présence de chargements multiaxiaux, la fonction  $f$  devient une fonction du tenseur de contrainte,  $\underline{\sigma}$  et du tenseur  $\underline{X} = H\underline{\varepsilon}^p$ , (de  $\mathbb{R}^{12}$  dans  $\mathbb{R}$ ) telle que si  $f(\underline{\sigma}, \underline{X}) < 0$ , l'état de contraintes est élastique, si  $f(\underline{\sigma}, \underline{X}) = 0$ , le point de fonctionnement est sur la frontière, la condition  $f(\underline{\sigma}, \underline{X}) > 0$  définissant l'extérieur du domaine. Dans le cas général, l'ensemble de départ contiendra les contraintes et toutes les variables d'érouissage, scalaires ou tensorielles, il faut donc définir  $f(\underline{\sigma}, A_i)$ . On va dans un premier temps limiter la présentation à la définition du domaine d'élasticité initial, pour lequel on supposera que les variables  $A_i$  sont nulles, si bien qu'on se contentera d'écrire les restrictions des fonctions  $f$  dans l'espace des contraintes.

L'expérience montre que, pour la plupart des matériaux, le domaine d'élasticité initial est convexe (c'est en particulier vrai pour les métaux qui se déforment par glissement cristallographique). La fonction de charge doit donc elle-même être convexe en  $\underline{\sigma}$ , ce qui implique, pour tout réel  $\lambda$  compris entre 0 et 1, et pour un couple  $(\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2)$  quelconque de la frontière :

$$f(\lambda \underline{\sigma}_1 + (1 - \lambda) \underline{\sigma}_2) \leq \lambda f(\underline{\sigma}_1) + (1 - \lambda) f(\underline{\sigma}_2) \quad (3.1)$$

Comme dans le cas de l'étude du tenseur d'élasticité, il faut ici encore respecter les symétries matérielles. Ceci implique en particulier dans le cas d'un matériau isotrope que  $f$  soit une fonction symétrique des seules contraintes principales, ou bien encore, ce qui est équivalent, des invariants du

tenseur des contraintes dont la définition provient du polynôme caractéristique :

$$I_1 = \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{ii} \quad (3.2)$$

$$I_2 = (1/2) \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}^2) = (1/2) \sigma_{ij} \sigma_{ji} \quad (3.3)$$

$$I_3 = (1/3) \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}^3) = (1/3) \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \quad (3.4)$$

L'expérience montre que la déformation plastique d'un grand nombre de matériaux est indépendante de la pression hydrostatique. Ceci amène à considérer comme variable critique à faire figurer dans la définition du critère non plus le tenseur de contraintes lui-même, mais son déviateur  $\underline{\underline{s}}$ , défini en enlevant à  $\underline{\underline{\sigma}}$  la pression hydrostatique, et ses invariants :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - (I_1/3) \underline{\underline{I}} \quad (3.5)$$

$$J_1 = \text{trace}(\underline{\underline{s}}) = 0 \quad (3.6)$$

$$J_2 = (1/2) \text{trace}(\underline{\underline{s}}^2) = (1/2) s_{ij} s_{ji} \quad (3.7)$$

$$J_3 = (1/3) \text{trace}(\underline{\underline{s}}^3) = (1/3) s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

Il est commode, en vue de réaliser les comparaisons avec les résultats expérimentaux, de disposer d'expressions des critères dans lesquelles les valeurs de  $f$  sont homogènes à des contraintes, c'est ce qui amène par exemple à utiliser à la place de  $J_2$  l'invariant  $J$ , qui peut également s'exprimer en fonction des contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , ou de la contrainte  $\sigma$  dans le cas d'un état de traction simple :

$$J = ((3/2) s_{ij} s_{ji})^{1/2} = ((1/2) ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2))^{1/2} = |\sigma| \quad (3.10)$$

La valeur précédente est à rapprocher de celle de la contrainte de cisaillement octaédral. Les plans octaédraux sont ceux dont le vecteur normal est de type  $\{1, 1, 1\}$  dans l'espace des contraintes principales. Il est aisé de montrer que le vecteur contrainte évalué sur le plan  $(1,1,1)$  à partir des valeurs de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  a pour composantes normale  $\sigma_{oct}$  et tangentielle  $\tau_{oct}$  :

$$\sigma_{oct} = (1/3) I_1 \quad \tau_{oct} = (\sqrt{2}/3) J \quad (3.11)$$

La valeur de  $J$  définit donc le cisaillement dans les plans octaédraux. Les remarques précédentes indiquent que le plan de normale  $(1,1,1)$  va être un plan privilégié pour la représentation des critères. En effet, tous les points représentant des états de contrainte qui ne diffèrent que par un tenseur sphérique (donc qui sont équivalents vis-à-vis d'un critère qui ne fait pas intervenir la pression hydrostatique) s'y projettent sur le même point. La figure 3.1 montre ce plan, dans lequel les projections des axes principaux déterminent des angles de  $2\pi/3$ , et qui a comme équation  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -I_1/3$ .

Pour traiter le comportement des sols (les argiles par exemple) ou des matériaux pulvérulents artificiels, on est amené à utiliser le troisième invariant. On introduit alors :

$$S = ((9/2) s_{ij} s_{jk} s_{ki})^{1/3} = ((9/2) (\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}) : \underline{\underline{s}})^{1/3} \quad (3.12)$$

On note que  $S$  vaut  $\sigma$  en traction comme en compression simple (tenseur uniaxial avec comme seule composante non nulle  $\sigma$ ), qu'il vaut 0 en cisaillement simple, et  $-\sigma$  pour une expansion équi-biaxiale ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , les autres composantes nulles). Cela permet donc de représenter des différences de comportement en traction et en compression. Par ailleurs, sa combinaison avec  $J$  permet de définir l'angle de Lode,  $\theta$ , qui intervient dans la définition de certains critères :

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{S}{J} \right)^3 \quad (3.13)$$

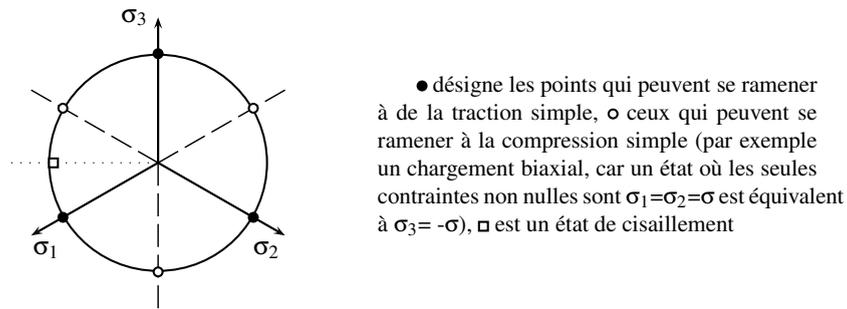


FIG. 3.1 – Etats de contraintes caractéristiques dans le plan déviateur

### 3.2 Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique

#### 3.2.1 Critère de von Mises

Dans la mesure où la trace du tenseur des contraintes n’intervient pas, le critère le plus simple est celui qui n’utilise que le second invariant du déviateur des contraintes, ou encore  $J$  [25] (voir en annexe la section 10.2). Ceci correspond à un ellipsoïde dans l’espace des tenseurs  $\underline{s}$  symétriques (expression quadratique des composantes  $s_{ij}$ , qui sont toutes équivalentes), soit, si  $\sigma_y$  est la limite d’élasticité en traction :

$$f(\underline{\sigma}) = J - \sigma_y \tag{3.14}$$

#### 3.2.2 Critère de Tresca

L’expression du critère de von Mises fait intervenir les cisaillements maximaux dans chaque plan principal, représentés par les quantités  $(\sigma_i - \sigma_j)$ . La spécificité du critère de Tresca est de ne retenir que le plus grand d’entre eux. Le fait de rajouter une pression à chaque terme de la diagonale ne modifie pas, comme prévu, la valeur du critère. Contrairement au cas précédent, cette expression ne définit en général pas une surface régulière (discontinuité de la normale, points anguleux) :

$$f(\underline{\sigma}) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_y \tag{3.15}$$

On peut également exprimer le critère en fonction de l’angle de Lode :

$$f(\underline{\sigma}) = \frac{2J}{\sqrt{3}} \cos(\theta) - \sigma_y \tag{3.16}$$

#### 3.2.3 Comparaison des critères de Tresca et von Mises

Comme il n’est bien entendu pas question de se placer dans l’espace des 6 (ou 9) composantes du tenseur des contraintes, il faut se résoudre à ne visualiser les frontières du domaine d’élasticité que dans des sous-espaces à deux ou trois dimensions. Les représentations les plus courantes s’effectuent :

- dans le plan traction–cisaillement (figure 3.2a), lorsque seules les composantes  $\sigma = \sigma_{11}$  et  $\tau = \sigma_{12}$  sont non nulles ; les expressions des critères se réduisent alors à :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} - \sigma_y \tag{3.17}$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} - \sigma_y \tag{3.18}$$

- dans le plan des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2)$  (figure 3.2b), lorsque la troisième contrainte principale  $\sigma_3$  est nulle :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} - \sigma_y \quad (3.19)$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \quad (3.20)$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \quad (3.21)$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } \sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1 \quad (3.22)$$

$$\text{(symétrie par rapport à l'axe } \sigma_1 = \sigma_2) \quad (3.23)$$

- dans le plan déviateur (figure 3.1), le critère de von Mises est représenté par un cercle, ce qui est cohérent avec son interprétation par le cisaillement octaédral, le critère de Tresca par un hexagone ;
- dans l'espace des contraintes principales, chacun de ces critères est représenté par un cylindre de génératrice  $(1,1,1)$ , qui s'appuie sur les courbes définies dans le plan déviateur.

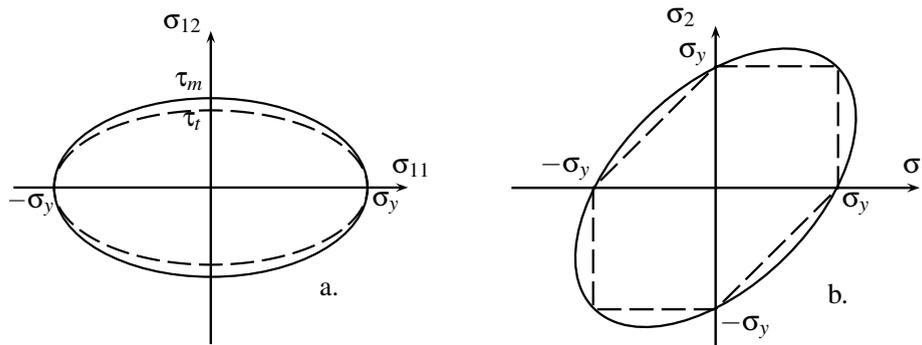


FIG. 3.2 – Comparaison des critères de Tresca (en pointillés) et de von Mises (traits pleins), (a) En traction-cisaillement (von Mises :  $\tau_m = \sigma_y/\sqrt{3}$ , Tresca :  $\tau_t = \sigma_y/2$ ), (b) En traction biaxiale

### 3.3 Critères faisant intervenir la pression hydrostatique

Ces critères sont nécessaires pour représenter la déformation plastique des matériaux pulvérulents, des sols ou en présence d'endommagement du matériau. Ils expriment le fait qu'une contrainte hydrostatique de compression rend plus difficile la déformation plastique. Une des conséquences de leur formulation est qu'ils introduisent une dissymétrie traction-compression.

#### 3.3.1 Critère de Drucker-Prager

C'est une extension du critère de von Mises, combinaison linéaire du deuxième invariant du déviateur et de la trace du tenseur des contraintes. C'est toujours un cercle dans le plan déviateur, mais qui dépend de l'«altitude» sur la trissectrice des axes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  de contraintes principales (figure 3.3a) :

$$f(\underline{\sigma}) = (1 - \alpha)J + \alpha I_1 - \sigma_y \quad (3.24)$$

La limite d'élasticité en traction reste  $\sigma_y$ , et la limite d'élasticité en compression est  $-\sigma_y/(1 - 2\alpha)$ . Le coefficient  $\alpha$  dépend du matériau, il est bien entendu compris entre 0 et 1/2, et on retrouve le critère de von Mises pour  $\alpha = 0$  (figure 3.3b).

Une expression plus complexe de ce même critère fait intervenir une forme plus compliquée de la contribution déviatorique, prenant en compte le troisième invariant. En reprenant l'expression 3.12 qui

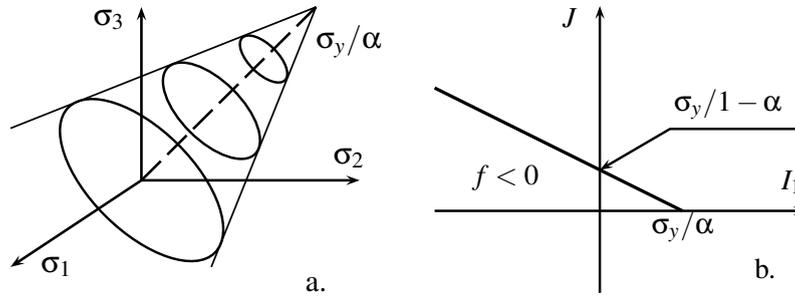


FIG. 3.3 – Représentation du critère de Drucker–Prager, (a) dans l’espace des contraintes principales, (b) dans le plan  $I_1 - J$

défini  $S$ , on pose :

$$t = \frac{J}{2} \left[ 1 + \frac{1}{K} - \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \left( \frac{S}{J} \right)^3 \right] \quad (3.25)$$

On utilise ensuite  $t$  à la place de  $J$  dans la formule 3.24.  $K$  est un coefficient dépendant du matériau ; on retrouve le critère initial avec  $K = 1$ , et on doit avoir  $0,778 \leq K \leq 1$  pour que le critère reste convexe.

### 3.3.2 Le critère de Mohr–Coulomb

Il est apparenté au critère de Tresca, faisant intervenir comme lui le cisaillement maximal, mais en même temps la contrainte «moyenne», représentée par le centre du cercle de Mohr correspondant au cisaillement maximum, soit :

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2C \cos \phi \quad (\text{avec } \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1) \quad (3.26)$$

Ce critère est sous-tendu par la notion de frottement, et suppose que le cisaillement maximal que peut subir le matériau ( $T_t$  en figure 3.4a) est d’autant plus grand que la contrainte normale de compression est élevée [3]. La limite admissible constitue une *courbe intrinsèque* dans le plan de Mohr. La formule énoncée ci-dessus est obtenue avec une règle de frottement linéaire :

$$|T_t| < -\tan(\phi) T_n + C \quad (3.27)$$

La constante  $C$  est la cohésion, correspondant à la contrainte de cisaillement qui peut être supportée par le matériau sous contrainte moyenne nulle. L’angle  $\phi$  désigne le frottement interne du matériau. Si  $C$  est nul et  $\phi$  non nul, le matériau est dit pulvérulent. Si  $\phi$  est nul et  $C$  non nul, comme dans le cas du critère de Tresca, le matériau est purement cohérent.

Le critère peut également s’exprimer sous la forme suivante, en fonction de la poussée  $K_p$  et de la limite d’élasticité en compression,  $R_p$  :

$$f(\sigma) = K_p \sigma_1 - \sigma_3 - R_p \quad (3.28)$$

$$\text{avec } K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad R_p = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (3.29)$$

Dans le plan déviateur (figure 3.4b) on obtient un hexagone irrégulier, caractérisé par les valeurs suivantes (avec  $p = (-1/3)I_1$ ) :

$$\sigma_t = 2\sqrt{6}(C \cos \phi - p \sin \phi)/(3 + \sin \phi) \quad (3.30)$$

$$\sigma_c = 2\sqrt{6}(-C \cos \phi + p \sin \phi)/(3 - \sin \phi) \quad (3.31)$$

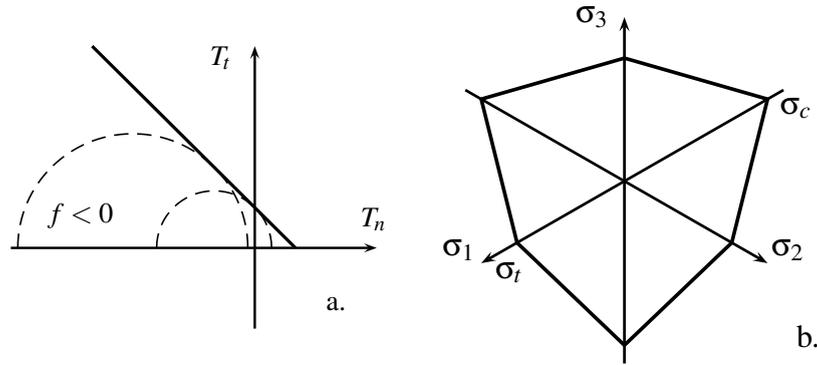


FIG. 3.4 – Représentation du critère de Mohr-Coulomb, (a) dans le plan de Mohr, (b) dans le plan déviateur

### 3.3.3 Critère de Rankine

Ce critère est plutôt employé comme critère de rupture dans les matériaux fragiles (craie), et pas pour définir la limite d'un domaine d'élasticité. Il s'exprime [21] en fonction des contraintes normales principales :

$$f(\underline{\sigma}) = \text{Max}_i(\sigma_i) - \sigma_y \quad (3.32)$$

On peut illustrer ce critère par sa trace dans le plan de contraintes principales  $\sigma_1$ – $\sigma_2$ , lorsque  $\sigma_3 = 0$  : il s'agit de deux demi-droites parallèles aux axes, dans la direction des contraintes négatives, et qui s'appuient sur le point  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$ .

### 3.3.4 Critères «fermés»

Les trois critères précédents prévoient que le matériau devient infiniment résistant en compression triaxiale. Ce comportement n'est en général pas vérifié sur les matériaux réels qui sont sensibles à la pression hydrostatique. Pour permettre de simuler par exemple des opérations de compaction, il faut «fermer» les surfaces de charge. Les modèles ci-dessous s'appliquent aux sols (argiles notamment), aux poudres artificielles :

- le critère elliptique, dans lequel les deux paramètres matériau  $C$  et  $F$  vont dépendre de la porosité

$$f(\underline{\sigma}) = 3CJ^2 + FI_1^2 - \sigma_0 \quad (3.33)$$

- le modèle «Cam-clay modifié» ; il s'agit d'une expression dérivée d'un modèle développé initialement à l'Université de Cambridge pour représenter le comportement de l'argile ; il est défini par une ellipse décalée vers la compression hydrostatique ; il n'est utilisable qu'en compression :

$$f(\underline{\sigma}) = \left(\frac{J}{M}\right)^2 + \left(\frac{I_1}{3} - p_c\right)^2 - p_c^2 - \sigma_y^2 \quad (3.34)$$

Une autre manière d'obtenir un domaine fermé est de conserver la forme initiale du critère qui prévoit un matériau indéformable en pression hydrostatique de compression, et de lui associer un «bouchon» du côté des pressions hydrostatiques négatives. C'est la classe des modèles de type *cap-model*, qui ferment par une ellipse dans le plan  $J$ – $I$  (ou  $t$ – $I$ ) le domaine défini par le critère de Drucker–Prager.

Un dernier type d'applications mérite d'être cité dans cette énumération. Il s'agit de la représentation de l'endommagement des alliages métalliques. Pour le représenter, on travaille également avec une influence de la pression hydrostatique. Les modèles sont sensibles à la pression hydrostatique, à cause de l'ouverture progressive de cavités. Le modèle le plus connu est dû à Gurson [9].

$$f(\underline{\sigma}) = \Psi_* = \frac{J^2}{\sigma_y^2} + 2\eta_*q_1 \cosh\left(\frac{q_2I_1}{2\sigma_y}\right) - (1 + q_1^2\eta_*^2) \quad (3.35)$$

On donne ici la formulation correspondant à la limite d'élasticité initiale. Pour simuler un chargement complet, comme pour les tous les autres modèles d'ailleurs, il faut remplacer  $\sigma_y$  par la limite d'élasticité actuelle, prenant en compte l'écroutissage isotrope, et éventuellement introduire d'autres types d'écroutissage.

### 3.4 Critères anisotropes

Lorsqu'on mesure expérimentalement la surface de charge sur un matériau métallique, on constate qu'en présence de déformations inélastiques, elle subit une expansion, une translation, et une distorsion. Les deux premières modifications sont représentées par les écroutissages isotropes et cinématiques, mais la dernière n'est pas prise en compte par les modèles courants, d'autant que la forme évolue au cours de la déformation sous chargement complexe : on est là en présence d'anisotropie induite. Il existe par ailleurs des matériaux fondamentalement anisotropes par fabrication, matériaux composites à fibres longues par exemple. Les modèles de matériaux hétérogènes permettent de tenir compte naturellement de certaines anisotropies, mais ils restent d'un emploi délicat, et on ne peut pas actuellement envisager de traiter dans un cadre industriel le cas de l'anisotropie la plus complexe. Il existe néanmoins de nombreuses possibilités d'extension des critères isotropes à la description de matériaux anisotropes. La voie la plus générale, mais qui n'est pas réellement opérationnelle, consiste à considérer que le critère est une fonction des composantes du tenseur des contraintes dans une base donnée. La forme choisie doit être intrinsèque, ce qui impose que le résultat obtenu soit invariant par changement de repère. Un guide pour construire ce type de modèle est fourni par les théories des invariants. On se contente par la suite d'approches plus simples.

La solution la plus généralement adoptée généralise le critère de von Mises, en utilisant à la place de  $J(\sigma)$  l'expression :

$$J_B(\underline{\sigma}) = (\underline{\sigma} : \underline{B} : \underline{\sigma})^{1/2} \quad (3.36)$$

qui fait intervenir le tenseur du quatrième ordre  $\underline{B}$ . Choisir pour  $\underline{B}$  le tenseur  $\underline{J}$  tel que  $\underline{s} = \underline{J} : \underline{\sigma}$  ( $\underline{s}$  déviateur associé à  $\underline{\sigma}$ ) redonne bien entendu le critère de von Mises. Comme pour le cas de l'élasticité, on peut réduire le nombre de composantes libres du tenseur  $\underline{B}$  par des considérations de symétrie. En plus des conditions habituelles sur les composantes  $B_{ijkl} = B_{ijlk} = B_{jikl} = B_{klij}$ , il faut tenir compte du fait que  $B_{jjkl} = 0$  si l'on veut encore assurer l'incompressibilité plastique (la vitesse de déformation plastique est portée par la direction  $\underline{B} : \underline{\sigma}$ ). Il reste donc 15 coefficients libres (comme une matrice  $5 \times 5$  symétrique). Si le matériau admet 3 plans de symétrie perpendiculaires, les termes de couplage entre composantes axiales et composantes de cisaillement (tels  $B_{1112}$ ) sont nuls, et il ne reste que 6 composantes, lorsque le tenseur est exprimé dans le repère correspondant. On retrouve alors l'expression classique :

$$f(\underline{\sigma}) = (F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{13}^2)^{1/2} - \sigma_y = f_H(\underline{\sigma}) \quad (3.37)$$

En représentant le tenseur d'ordre 4 comme une matrice  $6 \times 6$ , les termes de  $\underline{B}$  s'écrivent dans ce cas particulier :

$$\begin{pmatrix} F+H & -F & -H & 0 & 0 & 0 \\ -F & G+F & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & -G & H+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Une manipulation simple permet de vérifier que le même critère s'exprime également en fonction des composantes du tenseur déviateur associé à  $\underline{\sigma}$ ,  $J_B(\underline{\sigma}) = (\underline{s} : \underline{B}' : \underline{s})^{1/2}$ , où les composantes de  $\underline{B}'$

s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 2F - G + 2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2F + 2G - H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F + 2G + 2H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

L'isotropie transverse autour de l'axe 3 ne laisse subsister que 3 coefficients indépendants, car on a alors  $F = G$ ,  $L = M$ ,  $N = F + 2H$ . L'isotropie complète implique de plus  $F = H$ ,  $L = N$ ,  $N = 3F$ , ce qui redonne le tenseur  $\underline{J}$  signalé plus haut et l'invariant de von Mises. Si on veut de plus représenter la dissymétrie entre traction et compression, il faut avoir recours à une expression qui réintroduit une forme linéaire, telle celle du critère de Tsai :

$$f(\underline{\sigma}) = f_H(\underline{\sigma}) + Q(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + P(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \quad (3.40)$$

De même qu'il existe une voie de généralisation pour les critères exprimés en termes d'invariants, il existe des résultats pour ceux qui sont exprimés en termes de contraintes principales. Un cas très courant en géotechnique est celui des matériaux isotropes transverses, dont le critère peut s'écrire en fonction des contraintes normales principales et de  $N$  et  $T$ , qui sont respectivement les contraintes normales et tangentielles sur une facette perpendiculaire à l'axe de schistosité (c'est-à-dire une facette parallèle au plan isotrope de schistosité), défini par le vecteur normé  $\underline{n}$ .

$$N = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad T = \left( \|\underline{\sigma} \cdot \underline{n}\|^2 - N^2 \right)^{1/2} \quad (3.41)$$

Ainsi le critère de Coulomb pour les matériaux isotropes transverses s'écrit :

$$f(\underline{\sigma}) = \max(K_p \max \sigma_i - \min \sigma_i - R_c, T + N \tan \phi' - C') \quad (3.42)$$

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad R_c = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (3.43)$$

et où  $\phi$  désigne l'angle de frottement dans le plan de schistosité,  $C$  la cohésion,  $\phi'$  l'angle de frottement pour le glissement d'une lame par rapport à l'autre,  $C'$  la cohésion.

## Résumé

- Critère de Tresca :

$$f(\underline{\sigma}) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_y$$

- Critère de von Mises :

$$f(\underline{\sigma}) = J - \sigma_y$$

- dans le plan traction–cisaillement (figure 3.2a), lorsque seules les composantes  $\sigma = \sigma_{11}$  et  $\tau = \sigma_{12}$  sont non nulles ; les expressions des critères se réduisent alors à :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} - \sigma_y$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} - \sigma_y$$

- dans le plan des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2)$  (figure 3.2b), lorsque la troisième contrainte principale  $\sigma_3$  est nulle :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} - \sigma_y$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } \sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1$$

(symétrie par rapport à l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2$ )

- Critère de Drucker–Prager :

$$f(\underline{\sigma}) = (1 - \alpha)J + \alpha I_1 - \sigma_y$$

- Critère de Coulomb :

$$f(\underline{\sigma}) = K_p \sigma_1 - \sigma_3 - R_p$$

$$\text{avec } K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad R_p = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi}$$



# Chapitre 4

## Plasticité et viscoplasticité 3D

### 4.1 Introduction

La grande diversité des matériaux réels se traduit par l'existence d'une multitude de lois de comportement et en particulier d'une grande variété de critères et de lois d'évolution aussi bien en élastoplasticité qu'en élastoviscoplasticité. Il est illusoire de vouloir établir une liste exhaustive des modèles, d'autant plus que les chercheurs continuent encore à proposer de nouvelles versions. Aussi ce chapitre sera-t-il consacré à une tâche plus modeste qui consiste à présenter le cadre général d'écriture, en illustrant l'exposé par les lois les plus classiques, et en se limitant aux transformations infinitésimales (petits déplacements et petits gradients de déplacements). On considérera d'abord les modèles pour lesquels la surface de charge n'évolue pas (elle pourra éventuellement être de rayon nul en viscoplasticité), donc qui ne présentent pas d'écrouissage. L'introduction de l'écrouissage se fera au chapitre suivant. Pour le moment, on résume les concepts généraux qui ont été introduits dans les chapitres précédents.

#### 4.1.1 Décomposition de la déformation

Le tenseur symétrique des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est décomposé en trois parties :

- Une partie élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  fonction de la variation du tenseur de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  entre l'état actuel et l'état initial (contrainte à l'état de référence,  $\underline{\underline{\sigma}}_I$  ; dans un grand nombre d'applications, il s'agit de l'état de contraintes nulles, mais il est par exemple toujours présent en géotechnique). En élasticité linéaire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_I) \quad (4.1)$$

- Une partie de dilatation thermique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$  fonction de la température actuelle  $T$  et de la température à l'état de référence  $T_I$ . Elle s'écrit à l'aide d'un tenseur  $\underline{\underline{\alpha}}$ , qui dépend éventuellement de la température, et qui est sphérique dans le cas des matériaux isotropes. En confondant température initiale et température de référence :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = (T - T_I) \underline{\underline{\alpha}} \quad (4.2)$$

- Une partie non élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ne}$ , elle-même décomposée en une partie plastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  et une partie viscoplastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ , (régies par des lois d'écoulement en élastoplasticité et en élastoviscoplasticité).

D'où :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_I) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} + \underline{\underline{\varepsilon}}^p + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} \quad (4.3)$$

Cette dernière décomposition de la partie non élastique des déformations exprime le fait que, durant une transformation du matériau, divers mécanismes peuvent rentrer en jeu conduisant à une dissipation de l'énergie (irréversibilité) et que, dans l'échelle des temps considérée, la viscosité de certains mécanismes

peut être négligée (plasticité instantanée  $\tilde{\varepsilon}^p$ ) alors que pour les autres le temps réel doit intervenir dans les vitesses (déformations viscoplastiques  $\tilde{\varepsilon}^{vp}$ ). On a laissé de côté ici les déformations liées à des évolutions de microstructures tels que les changements de phase.

### 4.1.2 Critères

Chacun des mécanismes responsables du comportement inélastique est caractérisé par un certain nombre de variables, appelées variables d'érouissage, caractérisant à un instant donné l'état du matériau, et l'influence du chargement thermomécanique passé. Comme indiqué au chapitre précédent, le domaine d'élasticité se définit dans l'espace des contraintes et des variables d'érouissage (et de la température). A température et érouissage fixés, c'est une partie de l'espace vectoriel de dimension 6 des tenseurs du second ordre symétriques,  $D_e = \{\tilde{\sigma} / f(\tilde{\sigma}, A_I, T) \leq 0\}$ , la condition  $f(\tilde{\sigma}, A_I, T) = 0$  définissant quant à elle la frontière du domaine d'élasticité. On ne considérera pas les variables  $A_I$  pour le moment.

### 4.1.3 Lois d'écoulement

Ce sont les règles qui vont permettre de définir la vitesse de déformation plastique ou viscoplastique lorsqu'on n'est plus en élasticité. L'étude des modèles rhéologiques a montré la nature des équations mises en jeu pour ce qui concerne l'intensité de la vitesse d'écoulement. Celle-ci est liée à la vitesse de contrainte ou de déformation totale pour un modèle plastique, et à l'état actuel de contrainte et des variables internes pour un modèle viscoplastique. Pour généraliser les résultats précédents au cas tridimensionnel, il importe de se préoccuper également de la direction de l'écoulement. Cette direction doit être définie par un tenseur dans l'espace vectoriel de dimension 6 des tenseurs du second ordre symétriques.

Les lois d'érouissage, définissant l'évolution du domaine d'élasticité, complètent le modèle pour le cas d'un matériau dont la résistance à la déformation évolue avec celle-ci. Elles seront abordées au prochain chapitre.

## 4.2 Formulation des lois de comportement viscoplastiques

### 4.2.1 Écriture générale

Pour définir un comportement viscoplastique, il faut disposer d'un modèle qui donne l'intensité de la vitesse de déformation viscoplastique (un scalaire) et sa direction (un tenseur du second ordre symétrique en petites déformations). Les deux chapitres précédents fournissent les briques nécessaires. Ainsi, la généralisation de l'écriture de la vitesse de déformation viscoplastique est-elle immédiate. On conserve la notion de fonction de viscosité  $\phi$ , qui va continuer de porter sur la valeur de la fonction définissant le domaine d'élasticité,  $f$ . Dans la mesure où on dispose maintenant d'une expression valide sous chargement multiaxial pour  $f$ , on définira l'intensité de l'écoulement, ou vitesse de déformation viscoplastique équivalente, à l'aide d'une fonction  $\phi$  ( $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ), par :

$$\dot{v} = \phi(\langle f \rangle) \quad (4.4)$$

Dans le cas général, la direction d'écoulement sera notée  $\tilde{N}$ . Il y a deux possibilités concernant la définition de la direction d'écoulement. Elle peut n'être pas liée à  $f$ , auquel cas on introduit généralement une fonction  $g$ , qui porte sur les mêmes variables que  $f$ , à savoir le tenseur de contraintes et les variables d'érouissage ( $g : (\tilde{\sigma}, A_I) \rightarrow g(\tilde{\sigma}, A_I)$ ). On écrit :

$$\tilde{\varepsilon}^{vp} = \dot{v} \tilde{N} = \dot{v} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (4.5)$$

La seconde possibilité, qui constitue un cas particulier important, consiste à utiliser le critère  $f$  pour définir la direction d'écoulement, si bien que  $f$  et  $g$  sont identiques, et que la direction d'écoulement est  $\partial f / \partial \underline{\sigma}$ . En appelant  $\Omega$  la primitive de  $\phi$ , on peut alors écrire :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^{vp} = \phi \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.6)$$

Dans un tel modèle, dit modèle *standard*, ou modèle de viscoplasticité *associée*, la direction d'écoulement est fournie par la normale à la surface de charge. La fonction  $\Omega$  constitue un *potentiel viscoplastique* [18, 19], puisque sa donnée va suffire à caractériser complètement l'écoulement en intensité et direction. Dans la suite, on notera  $\underline{n}$  le gradient de  $f$  par rapport à  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{n} = \partial f / \partial \underline{\sigma}$ .

### 4.2.2 Exemple

La généralisation du modèle de Norton en adoptant le critère de von Mises, s'effectue simplement en utilisant comme critère la fonction  $f$  dépendant des contraintes uniquement,  $f = J(\underline{\sigma})$ , et comme potentiel la fonction  $\Omega$  suivante :

$$\Omega = \frac{K}{n+1} \left( \frac{J(\underline{\sigma})}{K} \right)^{n+1} \quad (4.7)$$

On obtient alors :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^{vp} = \left( \frac{J}{K} \right)^n \frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.8)$$

Le premier terme de l'expression précédente est un scalaire qui donne l'intensité de l'écoulement, il est bien égal à  $(|\underline{\sigma}|/K)^n$  pour une sollicitation de traction simple. Le second est un tenseur symétrique du second ordre, qui représente la direction d'écoulement, portée par la normale à l'équipotentielle au point de fonctionnement courant, qui sera notée  $\underline{n}$ . La dérivée partielle de  $J$  par rapport à  $\underline{\sigma}$  s'évalue simplement (voir Annexe) par :

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial s} : \frac{\partial s}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{s}{J} : \left( \underline{I} - \frac{1}{3} \underline{I} \otimes \underline{I} \right) = \frac{3}{2} \frac{s}{J} \quad (4.9)$$

On note que, lorsqu'on utilise le critère de von Mises, la direction d'écoulement est portée par le déviateur de contrainte.

Comme on l'a déjà souligné, pour un tel type de modèle, la limite d'élasticité est nulle en permanence, et le domaine d'élasticité est réduit à un point. Ce cas serait sans intérêt pour un modèle de plasticité indépendante du temps.

Pour retrouver le modèle de Bingham, il suffirait de prendre une fonction du second degré :

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{J(\underline{\sigma}) - \sigma_y}{\eta} \right)^2 \quad (4.10)$$

### 4.2.3 De la viscoplasticité à la plasticité

La figure 4.1a montre la forme du potentiel viscoplastique  $\Omega$ , fonction monotone croissante de  $f$ , telle que  $\Omega(0) = 0$ , qui illustre le fait que l'intensité de l'écoulement dépend de l'"altitude" du point de fonctionnement courant, et que, géométriquement, la direction du vecteur vitesse de déformation inélastique est normale aux surfaces équipotentielles. Comme indiqué au début de cette partie, on ne considère ici que le comportement sans écrouissage ; le domaine d'élasticité est donc défini uniquement en fonction de l'état de contrainte. Lorsque la fonction  $\phi$  (ou  $\Omega$ ) devient de plus en plus non linéaire (par exemple en faisant le choix d'une fonction puissance dont l'exposant  $n$  tend vers l'infini), les projections des équipotentielles sur l'espace ( $\underline{\sigma}$ ) se resserrent autour de la surface  $f = 0$ . On définit ainsi une zone de l'espace dans laquelle le potentiel est nul, et une autre où il varie très rapidement. A la limite,  $\Omega$

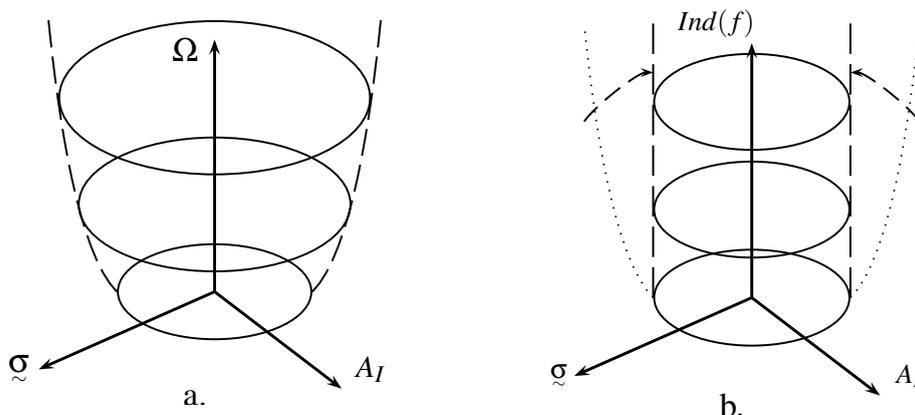


FIG. 4.1 – Comparaison des théories de plasticité et de viscoplasticité, (a) potentiel viscoplastique, (b) obtention d'un modèle plastique par passage à la limite

se confond avec la fonction indicatrice du domaine d'élasticité (Fig.4.1b), et on ne peut plus définir l'intensité de l'écoulement par  $\partial\Omega/\partial f$ .

On illustre ainsi la différence de nature entre les théories de viscoplasticité et de plasticité. Le cadre viscoplastique autorise, pour écrire un modèle, une grande liberté dans le choix de la fonction de viscosité, alors que, dans le cadre de la plasticité (du moins dans le cas de la plasticité associée), l'expression même du domaine d'élasticité détermine l'intensité de l'écoulement. C'est en effet la condition de cohérence  $\dot{f} = 0$  qui va fournir en plasticité l'équation qui disparaît en raison de la singularité de la fonction indicatrice de  $f$  en  $f = 0$ . Le formalisme plastique consiste alors à remplacer  $\partial\Omega/\partial f$  par le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$ , qui sera déterminé avec la condition de cohérence :

$$\tilde{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (4.11)$$

Dans un cas comme dans l'autre, on définit un écoulement qui respecte la *règle de normalité*, puisque la vitesse est portée par le gradient de la fonction de charge ( $f = 0$  dans le cas plastique,  $f = \text{const.}$  dans le cas viscoplastique). Cette règle aura d'importantes conséquences sur la réponse du matériau, en particulier dans le cas de sollicitations multiaxiales.

### 4.3 Formulation des lois de comportement plastique

Historiquement la théorie de la plasticité s'est développée indépendamment de celle de la viscoplasticité. On vérifie dans ce paragraphe que le chemin suivi amène exactement au même formalisme.

#### 4.3.1 Principe du travail maximal

Il est souvent attribué à Hill [10], mais il a été discuté par von Mises [25] et Taylor [20]. Il stipule que, pour un  $d\varepsilon^p$  réel donné, le travail des contraintes réelles  $\tilde{\sigma}$  est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible  $\tilde{\sigma}^*$  (*id est* ne violant pas la loi de plasticité) associé à  $d\varepsilon^p$ . Afin de conserver la forme en vitesse qui est employée tout au long de ce document, on donne ici la version en vitesse de déformation, qui fait donc intervenir la puissance plastique. En notant  $\tilde{\varepsilon}^p$  le tenseur vitesse de déformation plastique réel, il vient :

$$(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^*) : \tilde{\varepsilon}^p \geq 0 \quad (4.12)$$

Ce principe peut en fait être démontré dans le cas de métaux qui se déforment par glissement et obéissent à la loi de Schmid. Il n'est pas vérifié par tous les matériaux, en particulier par les sols. Il a des

conséquences importantes concernant la direction d'écoulement plastique et la forme de la surface de charge.

Si, se référant à la figure 4.1b, on cherche à construire une théorie dans laquelle on veut maximiser la puissance plastique en appliquant la *contrainte* (au sens d'un processus d'optimisation)  $f(\underline{\sigma}^*) \leq 0$ , on est amené pour résoudre le problème à introduire  $F(\underline{\sigma}^*)$  tel que

$$F(\underline{\sigma}^*) = \underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^p - \dot{\lambda} f \quad (4.13)$$

Le scalaire  $\dot{\lambda}$  est un multiplicateur (voir par exemple [14]) qui sera déterminé par la suite. On aura un point stationnaire si  $\partial F / \partial \underline{\sigma}^* = 0$ . Ce point sera effectivement un maximum si la fonction  $f$  est convexe. On retrouve ainsi :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.14)$$

On a bien retrouvé le cas du paragraphe précédent. La direction d'écoulement est donc bien portée par la normale à la surface de charge. La fonction indicatrice de  $f$  joue le rôle d'un pseudo-potential (car elle permet de déterminer la direction de l'écoulement, mais pas son intensité, comme dans le cas viscoplastique).

### 4.3.2 Interprétation géométrique du principe de Hill

Dans cette section, on retrouve les propriétés liées au principe de Hill par des considérations sur la géométrie du problème.

#### Règle de normalité

Si on choisit  $\underline{\sigma}^*$  sur la surface de charge, on vérifie que, si  $\underline{\sigma}$  est dans le domaine d'élasticité,  $\underline{\dot{\epsilon}}^p = 0$ . Si le domaine d'élasticité ne présente pas de coins, le principe du travail maximal peut être appliqué à partir d'un point  $\underline{\sigma}$  de la surface de charge, en choisissant un point  $\underline{\sigma}^*$  infiniment proche, également sur la surface de charge.  $\underline{\sigma}^*$  se déduit de  $\underline{\sigma}$  à l'aide d'un tenseur  $\underline{t}^*$  appartenant au plan tangent à la surface en  $\underline{\sigma}$  ( $\underline{\sigma}^* = \underline{\sigma} + k \underline{t}^*$ , avec  $k > 0$ ). Le même raisonnement peut être recommencé en prenant  $\underline{\sigma}^* = \underline{\sigma} - k \underline{t}^*$  comme point de départ, ce qui conduit aux deux inégalités suivantes :

$$k \underline{t}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^p \geq 0 \quad \text{et} \quad -k \underline{t}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^p \geq 0 \quad (4.15)$$

$$\text{si bien que : } \underline{t}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^p = 0 \quad (4.16)$$

*La vitesse de déformation plastique est portée par la normale à la surface de charge.*

On peut donc effectivement écrire l'écoulement plastique à l'aide de  $\underline{n}$  et d'un scalaire, on retrouve ainsi une forme faisant intervenir le multiplicateur plastique,  $\dot{\lambda}$ . On peut alors montrer que ce multiplicateur est *toujours positif*, car, en choisissant maintenant  $\underline{\sigma}^*$  sur la normale au point  $\underline{\sigma}$ , à l'intérieur du domaine d'élasticité,  $(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) = k \underline{n}$  est colinéaire à  $\underline{n}$  et de même sens ( $k > 0$ ), si bien que  $(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \underline{\dot{\epsilon}}^p \geq 0$  devient :

$$k \underline{n} : \dot{\lambda} \underline{n} \geq 0 \quad \text{d'où : } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (4.17)$$

Dans le cas des matériaux qui vérifient le principe du travail maximal, la surface de charge joue en même temps le rôle de pseudo-potential plastique, et détermine l'écoulement plastique à un scalaire multiplicatif près. Si la surface n'est pas régulière et présente un coin au point  $\underline{\sigma}$ , il y existe un cône des normales, à l'intérieur duquel se trouve la direction de l'incrément de déformation plastique.

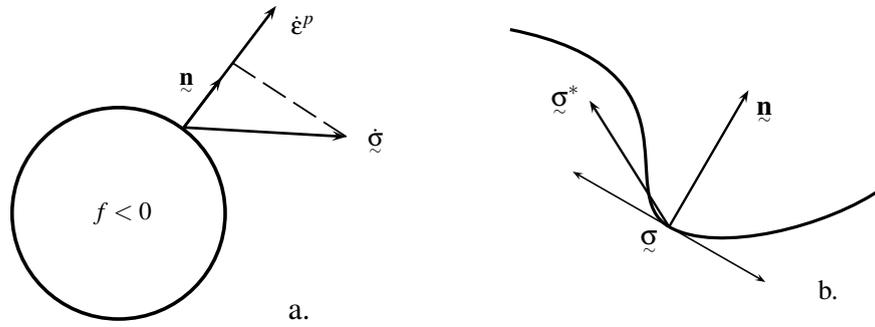


FIG. 4.2 – Conséquences du principe du travail maximal, (a) illustration de la règle de normalité, (b) convexité de  $f$

### Convexité de la surface de charge

En appliquant de nouveau le principe du travail maximal à partir d'un état de contrainte  $\tilde{\sigma}$  sur la surface de charge, et en considérant  $\tilde{\sigma}^*$  à l'intérieur du domaine d'élasticité, la règle de normalité permet maintenant d'écrire la relation suivante, qui exprime que la surface doit se trouver toute entière du même côté du plan tangent en  $\tilde{\sigma}$  (Fig.4.2b) :

$$(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^*) : \tilde{n} \geq 0 \quad (4.18)$$

Le domaine d'élasticité est donc convexe. Il en est de même pour la fonction  $f$ .

## 4.4 Directions d'écoulement associées aux critères courants

Les directions d'écoulement sont calculées dans un premier temps pour un matériau sans écrouissage. Les modifications apportées par l'écrouissage seront indiquées au chapitre suivant. Les résultats obtenus sont valables en plasticité comme en viscoplasticité.

### 4.4.1 Critère de von Mises

La fonction de charge s'écrit  $f(\tilde{\sigma}) = J(\tilde{\sigma}) - \sigma_y$ , si bien que la normale  $\tilde{n}$  s'exprime :

$$\tilde{n} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \tilde{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial s} : \frac{\partial s}{\partial \tilde{\sigma}} \quad \text{ou :} \quad n_{ij} = \frac{\partial J}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.19)$$

En utilisant :

$$\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = J_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.20)$$

on obtient :

$$n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{J} \quad \text{ou encore :} \quad \tilde{n} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{s}}{J} \quad (4.21)$$

Dans le cas du critère de von Mises, la direction d'écoulement est donnée par le déviateur du tenseur des contraintes. Cette expression se simplifie en traction simple selon la direction 1 :

$$\tilde{s} = \frac{2\sigma}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad J = |\sigma| \quad \tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{signe}(\sigma) \quad (4.22)$$

### 4.4.2 Critère de Tresca

La loi d'écoulement se définit par secteur dans l'espace des contraintes principales. Par exemple pour le cas  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , la fonction de charge s'écrit :  $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$ , si bien que, pour l'ensemble des états de contrainte qui vérifient cette inégalité, la vitesse de déformation plastique possède les mêmes composantes, le matériau ne se déformant pas selon l'axe 2 (déformation de type cisaillement) :

$$\text{si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad : \quad \underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

La définition de la normale pose un problème pour les états de contrainte correspondant aux points singuliers, ainsi en traction simple, lorsque par exemple  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , le critère s'exprimant alors indifféremment  $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_2| - \sigma_y$ , ou  $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$ . Il est alors classique de définir deux multiplicateurs plastiques, se référant chacun à une forme du critère. Si ces deux multiplicateurs sont choisis égaux, le modèle redonne la même forme que le critère de von Mises en traction simple. Par contre, dès que l'état de contrainte s'éloigne de l'égalité stricte entre les composantes  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ , c'est l'un des deux régimes de type cisaillement qui prend le dessus.

$$\text{si } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad : \quad \underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \dot{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

### 4.4.3 Critère de Drucker-Prager

La fonction de charge s'écrit  $f(\underline{\sigma}) = (1 - \alpha)J(\underline{\sigma}) + \alpha I_1 - \sigma_y$ , si bien que la normale  $\underline{n}$  possède une composante sphérique. La déformation plastique évaluée avec un tel critère est accompagnée d'une augmentation de volume quel que soit le chargement appliqué :

$$\underline{n} = \frac{3}{2} (1 - \alpha) \frac{\underline{s}}{J} + \alpha \underline{I} \quad (4.25)$$

$$\text{trace}(\underline{\dot{\epsilon}}^p) = 3\alpha \dot{\lambda} \quad (4.26)$$

De façon générale, tout critère qui fait apparaître la pression hydrostatique produit un terme de changement de volume accompagnant la déformation plastique. Dans le cas de l'expression 4.25, il est remarquable de noter également que, quel que soit le chargement appliqué, compression comme traction, la variation de volume est *toujours* positive. Ceci s'avère être un défaut pour le modèle, et explique que l'on construise également des critères dans lesquels on «ferme» le domaine d'élasticité du côté des pressions hydrostatiques négatives.

## 4.5 Comportement parfaitement plastique

### Cas d'un matériau élastique-parfaitement plastique

Dans ce cas, la fonction de charge ne dépend que du tenseur de contrainte. Le domaine d'élasticité est fixe. Au cours de l'écoulement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte ne peut que "tourner" autour du domaine d'élasticité. Le multiplicateur plastique est indéterminé ; la condition de charge plastique et la condition de cohérence deviennent respectivement :

$$\text{pour } f(\underline{\sigma}) = 0 \text{ et } \dot{f}(\underline{\sigma}) = 0 \quad : \quad \underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \underline{n} \quad (4.27)$$

$$\text{au cours de l'écoulement} \quad : \quad \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} = 0 \quad (4.28)$$

### Calcul du multiplicateur plastique

Le multiplicateur plastique est indéterminé pour un matériau élastique-parfaitement plastique chargé en vitesse de contrainte imposée. Cela est lié au fait que, le module plastique étant nul, il existe une infinité de positions équivalentes en déformation plastique pour un état de contrainte admissible donné, tel que  $J(\underline{\sigma}) = \sigma_y$  : ainsi, en traction simple  $\sigma_{11} = \sigma_0$ , tous les tenseurs diagonaux  $(\underline{\varepsilon}^p, (-1/2)\underline{\varepsilon}^p, (-1/2)\underline{\varepsilon}^p)$  sont des solutions possibles. Le fait d'imposer la vitesse de déformation totale modifie bien entendu ce résultat. Le multiplicateur plastique va pouvoir être déterminé, en combinant la loi de comportement élastique écrite en termes de vitesse et la condition de cohérence, soit :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\Lambda} : (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^p) \quad \text{et} \quad \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} = 0 \quad (4.29)$$

En remplaçant  $\underline{\dot{\sigma}}$  par sa valeur dans la deuxième égalité de l'équation 4.29, il vient :

$$\underline{n} : \underline{\Lambda} : (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^p) = \underline{n} : \underline{\Lambda} : \underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{n} : \underline{\Lambda} : \dot{\lambda} \underline{n} = 0 \quad (4.30)$$

si bien que :

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{n} : \underline{\Lambda} : \underline{\dot{\varepsilon}}}{\underline{n} : \underline{\Lambda} : \underline{n}} \quad (4.31)$$

Dans le cas particulier de l'élasticité isotrope, et du critère de von Mises, on obtient successivement les simplifications suivantes :

$$\Lambda_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\dot{\varepsilon}}}{J} \quad (4.32)$$

$$n_{ij} \Lambda_{ijkl} = 2\mu n_{kl} \quad n_{ij} \Lambda_{ijkl} n_{kl} = 3\mu \quad n_{ij} \Lambda_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} = 2\mu n_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.33)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{2}{3} \underline{n} : \underline{\dot{\varepsilon}} \quad (4.34)$$

Pour un chargement uniaxial, avec  $\underline{\dot{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{11}$ , cette dernière expression se réduit à :

$$\dot{\lambda} = \dot{\varepsilon} \text{signe}(\sigma) \quad \text{qui redonne :} \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} \quad (4.35)$$

Sous chargement uniaxial, la vitesse de déformation totale et la vitesse de déformation plastique sont identiques, puisque le niveau de contrainte reste inchangé pendant l'écoulement. *Ce résultat n'est pas général.* Lorsque le chargement s'effectue sur plusieurs composantes du tenseur de contrainte, il y a un déplacement du point représentatif de l'état de contrainte sur la surface de charge, qui peut toutefois atteindre une position asymptotique (voir à ce sujet l'exercice sur la traction-torsion d'un cylindre). On peut donc par exemple avoir des diminutions de contrainte sur certaines composantes en présence d'écoulement plastique.

## 4.6 Viscoplasticité/Plasticité non associée

Ce sont les théories qui s'appliquent pour les matériaux, tels les matériaux géologiques, qui ne vérifient pas la loi de normalité. Il faut alors utiliser une fonction pour la surface de charge, avec laquelle on détermine la condition de charge-décharge et avec laquelle on forme la condition de cohérence. Par contre, la direction d'écoulement est définie par référence à une autre fonction.

On écrira alors un modèle de viscoplasticité à partir d'une fonction  $f$  et d'une nouvelle normale  $\underline{N}$ . Dans certains cas, mais ce n'est pas obligatoire, cette normale s'exprimera comme le gradient d'une nouvelle fonction,  $g$ . Un cas relativement courant dans les sols est celui où l'on utilise un critère de

Mohr–Coulomb, avec des valeurs différentes de la poussée  $K_p$ . En général, l'angle  $\Phi$  qui détermine la demi-droite définissant la fonction de charge dans le plan  $T_n-T_t$  est plus faible que celui de la demi-droite qui définit la normale. On aura ainsi :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\underline{v}}N = \phi(f(\underline{\sigma})) \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.36)$$

Le modèle de plasticité se réécrit quant à lui à partir de :

$$\underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} = 0 \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\underline{\lambda}}N \quad \text{avec } \underline{n} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad N = \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.37)$$

Il vient donc :

$$\dot{\underline{\lambda}} = \frac{\underline{n} : \underline{\Lambda} : \dot{\underline{\varepsilon}}}{\underline{N} : \underline{\Lambda} : \underline{n}} \quad (4.38)$$

## Résumé

La déformation totale se décompose en composantes élastique, plastique, viscoplastique, thermique et de changement de phase :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\Lambda}^{-1} : (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_I) + \underline{\varepsilon}^{th} + \underline{\varepsilon}^p + \underline{\varepsilon}^{vp}$$

La contrainte et la déformation élastique sont reliées par le tenseur d'élasticité :

$$\underline{\varepsilon}^e = \underline{\Lambda}^{-1} : (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_I)$$

Dans le cas où il n'y a pas d'écrouissage, la surface de charge, définie par la fonction  $f$ , est fixe dans l'espace des contraintes. En plasticité parfaite, le domaine  $f > 0$  est interdit, et il y a trois régimes de fonctionnement :

- intérieur du domaine d'élasticité, si  $f < 0$
- décharge élastique, si  $f = 0 \quad \dot{f} < 0$
- écoulement plastique, si  $f = 0 \quad \dot{f} = 0$ . Dans ce cas, l'écoulement plastique est normal à la surface de charge, on écrit :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\underline{\lambda}}\underline{n} = \dot{\underline{\lambda}} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

L'ensemble de ces conditions se résument par :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\underline{\lambda}}\underline{n} \quad f \leq 0 \quad \dot{\underline{\lambda}} \geq 0 \quad \dot{\underline{\lambda}}f = 0$$

En viscoplasticité, le domaine  $f > 0$  est autorisé, il y a deux régimes de fonctionnement :

- intérieur du domaine d'élasticité, si  $f \leq 0$
- écoulement viscoplastique si  $f > 0$ . Dans ce cas, l'écoulement viscoplastique est normal à la surface de charge, on écrit, en notant  $\Omega$  le potentiel viscoplastique :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underline{n}$$

On peut construire des modèles viscoplastiques avec un domaine d'élasticité réduit à l'origine, car cela n'empêche pas de définir l'intensité de l'écoulement et sa direction, en se référant aux equipotentiels. Ce n'est bien sûr pas le cas des modèles plastiques.



# Chapitre 5

## Variables d'écrouissage

### 5.1 Introduction

La grande variété des comportements non linéaires se manifeste en particulier dans le durcissement (ou l'adoucissement !) observé en relation avec le processus de déformation (écrouissage, endommagement), dans l'évolution des propriétés liée au temps (vieillessement) ou à l'environnement (interactions multiphysiques).

Ces phénomènes sont liés à des réarrangements de la structure intime du matériau conduisant à un nouvel état. Si le comportement plastique se révèle inchangé, c'est qu'on est en présence d'un comportement parfaitement plastique, sans écrouissage, comme celui qui a été étudié au chapitre précédent. Le domaine d'élasticité sera modifié dans le cas du comportement à écrouissage positif (durcissement) ou négatif (adoucissement). Certains matériaux présentent même des évolutions durcissantes puis adoucissantes, au cours d'une sollicitation cyclique par exemple. Le type d'écrouissage peut par ailleurs être modifié par des trajets de chargements complexes ou par le vieillissement du matériau.

Les lois d'écrouissage sont donc les règles qui caractérisent l'évolution du domaine d'élasticité au cours de la déformation inélastique. Ainsi qu'on l'a vu dans le cas uniaxial, les principales classes d'écrouissage sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. On se contente ici de tracer un cadre général qui permet le développement des modèles nécessaires.

Le formalisme va différer assez peu de celui qui a été employé dans la partie précédente. On va simplement rajouter deux séries de variables représentant l'écrouissage, des *variables d'état*, qui seront pour le moment désignées collectivement par  $\alpha_I$ , et leurs variables associées  $A_I$ , intervenant dans la définition du seuil de plasticité. Par rapport au chapitre précédent, le modèle s'enrichit, puisque :

- il faut poser une relation entre les  $A_I$  et les  $\alpha_I$  ;
- il faut étendre l'expression de la fonction  $f(\underline{\sigma})$ , en introduisant les  $A_I$ , soit  $f(\underline{\sigma}, A_I)$  ;
- en plus de la vitesse d'évolution de  $\underline{\varepsilon}^p$  (ou  $\underline{\varepsilon}^{vp}$ ), il faut déterminer celle des  $\alpha_I$ .

### 5.2 Matériaux standards généralisés

#### 5.2.1 Une brève présentation du formalisme

L'approche la plus stricte d'un point de vue théorique consiste à étendre au cas de l'écoulement (visco)plastique avec écrouissage les concepts qui ont été introduits pour le comportement sans écrouissage. Dans cette construction, on range les variables d'écrouissage aux côtés de la déformation élastique dans l'énergie libre, que l'on note ici  $\Psi$  (voir le cours de MMC [4], chapitre 6 pour une présentation du potentiel d'élasticité). De même que la contrainte s'obtient alors en prenant la dérivée partielle par rapport à la déformation élastique, les  $A_I$  vont s'obtenir par dérivation partielle par rapport aux  $\alpha_I$  (extension de la notion de potentiel d'élasticité). Les variables  $A_I$  et  $\alpha_I$  sont des variables

conjuguées dont le produit donne une énergie spécifique. Les variables  $\alpha_I$  définissent l'état du matériau, et les variables  $A_I$  l'effet sur la mécanique de celles-ci.

$$\tilde{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\varepsilon}^e} \quad (5.1)$$

$$A_I = \rho \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \alpha_I} \quad (5.2)$$

Pour le comportement élastique, l'égalité 5.1 définit une bijection qui détermine complètement le comportement du matériau, la variable  $\tilde{\varepsilon}^e$  étant une variable observable accessible à l'expérience. On a un comportement réversible, à un seul potentiel. Au contraire, les variables  $\alpha_I$  ne sont pas directement accessibles, et leur évolution ne s'obtient qu'au travers des modifications du domaine d'élasticité. Cette évolution est obtenue en introduisant un second potentiel, qui mesurera l'irréversibilité du processus de déformation.

Dans le cadre des modèles standards généralisés [8], on utilise la fonction de charge  $f(\tilde{\sigma}, A_I)$  pour construire le potentiel de dissipation. On déterminera ainsi l'évolution des variables  $\alpha_I$ , selon le modèle déjà introduit pour les déformations plastiques ou viscoplastiques. En lieu et place de la puissance plastique, on considère maintenant la *dissipation intrinsèque*, qui s'exprime :

$$\mathcal{D} = \tilde{\sigma} : \tilde{\dot{\varepsilon}}^p - A_I \dot{\alpha}_I \quad (5.3)$$

La relation de Clausius-Duhem indique que cette dissipation, nulle pour les transformations réversibles, est toujours positive dans le cas d'une évolution dissipative. L'équation est établie par la thermodynamique des milieux continus ; elle indique que la puissance dissipée dans le processus de déformation est la différence entre la puissance plastique et la quantité stockée (de façon temporaire ou définitive) dans le matériau par le processus d'écroissage.

Le cadre standard généralisé, qui peut être vu comme une simple extension du principe du travail maximal de Hill, suppose que cette dissipation est maximale. On aura par exemple une illustration du terme  $A_I \dot{\alpha}_I$  en considérant l'énergie élastique stockée dans le ressort du modèle de Prager par le processus d'écroissage, puis rendue lors de la décharge. Les équations d'évolution sont alors obtenues en maximisant cette énergie, sous la condition que  $f$  reste négatif ou nul. Il suffit pour cela de prendre les dérivées partielles de  $F$  par rapport à  $\tilde{\varepsilon}^p$  et  $\alpha_I$ , avec :

$$F(\tilde{\sigma}, A_I) = \tilde{\sigma} : \tilde{\varepsilon}^p - A_I \dot{\alpha}_I - \dot{\lambda} f \quad (5.4)$$

Dans le cas d'un formalisme de plasticité, il vient alors :

$$\tilde{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} = \dot{\lambda} \tilde{n} \quad \dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_I} \quad (5.5)$$

Cette classe de matériaux est intéressante d'un point de vue théorique. Dans le cas où l'énergie libre est une fonction quadratique et définie positive des variables  $\tilde{\varepsilon}^e$  et  $\alpha_I$ , et où le potentiel plastique est une fonction convexe de  $\tilde{\sigma}$  et  $A_I$ , il est possible de démontrer l'existence et l'unicité de la solution [15].

## 5.2.2 Exemple

L'écriture ci-dessus fournit de façon naturelle la nature des variables d'écroissage à utiliser pour représenter l'écroissage isotrope et l'écroissage cinématique. En prenant comme exemple le cas du critère de von Mises, la fonction de charge s'écrit, en introduisant le scalaire  $R$  pour modéliser l'écroissage isotrope et le tenseur  $\tilde{X}$  pour l'écroissage cinématique (qui est un tenseur déviatorique) :

$$f(\tilde{\sigma}, \tilde{X}, R) = J(\tilde{\sigma} - \tilde{X}) - R - \sigma_y = ((3/2)(\tilde{s} - \tilde{X}) : (\tilde{s} - \tilde{X}))^{0.5} - R - \sigma_y \quad (5.6)$$

On appellera respectivement  $r$  et  $\alpha$  les variables associées à  $R$  et  $X$ . L'énergie libre s'écrit alors comme la somme de la contribution élastique habituelle,  $\Psi_e$ , et de deux termes additionnels :

$$\Psi(\underline{\varepsilon}^e, R, X) = \Psi_e(\underline{\varepsilon}^e) + \frac{1}{2}Hr^2 + \frac{1}{2}X : \underline{C} : X \quad (5.7)$$

si bien que

$$R = Hr \quad X = \underline{C}\alpha \quad (5.8)$$

La variable tensorielle  $\alpha$  associée à la variable d'écrouissage  $X$  n'est donc pas autre chose que la déformation plastique elle-même, alors que la vitesse de la variable  $r$  associée à la variable d'écrouissage  $R$  s'identifie au multiplicateur plastique :

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial X} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\dot{\varepsilon}}^p \quad \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = \dot{\lambda} \quad (5.9)$$

On note que, dans ce cas, la variable  $r$  s'identifie à la *déformation plastique cumulée*,  $p$ , qui mesure la longueur du trajet de déformation, et qui se définit par :

$$\dot{p} = ((2/3) \underline{\dot{\varepsilon}}^p : \underline{\dot{\varepsilon}}^p)^{0,5} \quad (5.10)$$

En utilisant le fait que  $n : n = 3/2$ , on a en effet :

$$((2/3) \underline{\dot{\varepsilon}}^p : \underline{\dot{\varepsilon}}^p)^{0,5} = \left( (2/3) \dot{\lambda} n : \dot{\lambda} n \right)^{0,5} = \dot{\lambda} \quad (5.11)$$

Sous chargement uniaxial, lorsque le tenseur de vitesse de déformation plastique est une diagonale  $(\dot{\varepsilon}^p, -(1/2)\dot{\varepsilon}^p, -(1/2)\dot{\varepsilon}^p)$ , le calcul de  $\dot{p}$  donne :  $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p|$ .

## 5.3 Expression de quelques lois particulières en plasticité

### 5.3.1 Loi de Prandtl–Reuss

C'est la loi obtenue en utilisant le critère de von Mises et une règle d'écrouissage isotrope. La fonction de charge est donc :

$$f(\underline{\sigma}, R) = J(\underline{\sigma}) - \sigma_y - R(p) \quad (5.12)$$

L'écrouissage isotrope est décrit par la fonction  $R(p)$ . Dans le cas d'un chargement uniaxial en traction, où seule la composante  $\sigma_{11} = \sigma$  est non nulle, l'égalité  $f(\underline{\sigma}, R) = 0$  se résume à :

$$\sigma = \sigma_y + R(p) \quad (5.13)$$

La courbe décrite par  $(\sigma_y + R(p))$  est donc la courbe d'écrouissage en chargement uniaxial monotone, la déformation de traction  $\varepsilon_{11}^p = \varepsilon^p$  étant égale dans ce cas à la déformation plastique cumulée. Le module plastique peut être évalué comme la pente à cette courbe.

$$\sigma = \sigma_y + R(\varepsilon^p) \quad H = \frac{dR}{d\varepsilon^p} = \frac{dR}{dp} \quad (5.14)$$

$R(p)$  peut être définie point par point, par une fonction puissance ou une fonction exponentielle, comme on l'a vu dans le chapitre sur la plasticité uniaxiale.

Quelle que soit la forme choisie pour  $R$ , la condition de cohérence permet de trouver le multiplicateur plastique ( $\dot{\lambda} = \dot{p}$ ) :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad \text{s'écrit} \quad n : \dot{\underline{\sigma}} - H \dot{p} = 0 \quad \text{et} \quad (5.15)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}}}{H} \quad (5.16)$$

La loi de Prandlt-Reuss permet de déterminer la direction et l'intensité de l'écoulement plastique :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}}}{H} \underline{\underline{n}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{J} \quad (5.17)$$

Dans le cas particulier de la traction simple, cette expression générale se réduit bien à la forme uniaxiale habituelle :

$$n_{11} = \text{signe}(\sigma) \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}} = \sigma \text{signe}(\sigma) \quad \text{et} : \quad \dot{\lambda} = \dot{p} = \dot{\varepsilon}_{11}^p \quad (5.18)$$

$$\text{si bien que} : \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{n_{11} \dot{\sigma}}{H} n_{11} = \frac{\dot{\sigma}}{H} \quad (5.19)$$

### 5.3.2 Loi de Hencky–Mises

Il s'agit d'une expression toute intégrée du modèle de plasticité, qui est valide uniquement dans le cas d'un *chargement simple*, c'est-à-dire lorsque le chargement extérieur en termes de contraintes croît proportionnellement à un seul paramètre scalaire  $k$ , à partir d'un état initial non écroui. On a alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = k \underline{\underline{\sigma}}_M \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \dot{k} \underline{\underline{\sigma}}_M \quad \underline{\underline{s}} = k \underline{\underline{s}}_M \quad J = k J_M \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (5.20)$$

La direction d'écoulement ne change pas tout au long de l'écoulement :

$$\underline{\underline{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}_M}{J_M} \quad (5.21)$$

Par ailleurs, l'expression de l'intensité de l'écoulement se simplifie, en suivant :

$$\frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}}{H} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}_M}{J_M} : \frac{\underline{\underline{\sigma}}_M \dot{k}}{H} = \frac{J_M \dot{k}}{H} \quad (5.22)$$

On en déduit :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{k}}{H} \underline{\underline{s}}_M = \frac{3}{2} \frac{\dot{s}}{H} \quad (5.23)$$

Les composantes de la vitesse de déformation plastique s'écrivent donc en fonction de la composante de contrainte correspondante uniquement, il y a *découplage* des composantes, ainsi par exemple :

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \frac{\dot{\sigma}_{11}}{H} \quad \dot{\varepsilon}_{12}^p = \frac{3\dot{\sigma}_{12}}{2H} \quad (5.24)$$

On peut reformuler la seconde expression en

$$\frac{2\dot{\varepsilon}_{12}^p}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\dot{\sigma}_{12}}{2H} \quad (5.25)$$

Cette expression met en évidence la contrainte de cisaillement  $\sqrt{3}\sigma_{12}$ , équivalente de  $\sigma_{11}$  en application du critère de von Mises, et la déformation plastique  $2\varepsilon_{12}^p/\sqrt{3}$ , équivalente de  $\varepsilon_{11}^p$ .

Le découplage signalé dans la formule 5.24 n'est qu'apparent, dans la mesure où la limite d'élasticité fait bien intervenir toutes les composantes. Elle correspond à une valeur  $k_e$  de  $k$  telle que  $k_e J_M = \sigma_y$ . Les intégrales définies qui permettent de calculer les composantes ont donc pour bornes  $k_e$  et 1.

### 5.3.3 Loi de Prager

C'est la loi obtenue en utilisant le critère de von Mises et une règle d'érouissage cinématique linéaire. Il faut pour cela introduire une variable d'érouissage  $\tilde{X}$ , associée à la déformation plastique, qui s'écrit :  $\tilde{X} = (2/3)H\tilde{\varepsilon}^p$ . Cette variable est déviatorique, la fonction de charge s'écrit donc simplement :

$$f(\tilde{\sigma}, \tilde{X}) = J(\tilde{\sigma} - \tilde{X}) - \sigma_y \quad \text{avec} \quad J(\tilde{\sigma} - \tilde{X}) = ((3/2)(\tilde{s} - \tilde{X}) : (\tilde{s} - \tilde{X}))^{0,5} \quad (5.26)$$

La condition de cohérence s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : \tilde{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}} : \dot{\tilde{X}} = 0 \quad \text{soit} \quad \tilde{n} : \tilde{\sigma} - \tilde{n} : \dot{\tilde{X}} = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{n} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{s} - \tilde{X}}{J(\tilde{\sigma} - \tilde{X})} \quad (5.27)$$

On obtient donc :

$$\tilde{n} : \tilde{\sigma} = \tilde{n} : \dot{\tilde{X}} = \tilde{n} : \left( \frac{2}{3} H \tilde{n} \dot{\tilde{\lambda}} \right) = H \dot{\tilde{\lambda}} \quad (5.28)$$

Il vient donc de nouveau :

$$\dot{\tilde{\lambda}} = (\tilde{n} : \tilde{\sigma}) / H \quad (5.29)$$

Le multiplicateur plastique a la même expression formelle que dans le cas de l'érouissage isotrope ; il faut néanmoins noter que la définition de  $\tilde{n}$  est modifiée, et que  $H$  est constant. Sous chargement uniaxial,  $\tilde{\sigma} = \sigma_{11}$  étant la seule composante non nulle du tenseur des contraintes, et en posant  $\tilde{X} = (3/2)X_{11}$ , la fonction de charge et la condition de cohérence s'écrivent :

$$|\tilde{\sigma} - \tilde{X}| = \sigma_y \quad \tilde{\sigma} = \dot{\tilde{X}} = H \dot{\tilde{\lambda}} \quad (5.30)$$

### 5.3.4 Écoulement à vitesse de déformation totale imposée

Comme l'indiquent les deux exemples du paragraphe précédent, la condition de cohérence se met toujours sous la même forme, pour les lois de comportement courantes des matériaux isotropes. Par comparaison avec le cas du matériau parfaitement plastique, seule va changer cette condition de cohérence ; il faut donc maintenant partir de :

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\Lambda} : (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^p) \quad \text{et} \quad \tilde{n} : \tilde{\sigma} = H \dot{\tilde{\lambda}} \quad (5.31)$$

Après multiplication des deux membres de la première relation par  $\tilde{n}$ , il vient cette fois-ci :

$$\dot{\tilde{\lambda}} = \frac{\tilde{n} : \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}}{H + \tilde{n} : \tilde{\Lambda} : \tilde{n}} \quad (5.32)$$

#### Remarques :

- Dans le cas de l'élasticité isotrope et d'un matériau de von Mises, l'expression du multiplicateur devient :

$$\dot{\tilde{\lambda}} = \frac{2\mu \tilde{n} : \tilde{\varepsilon}}{H + 3\mu} \quad (5.33)$$

- On appelle tenseur élastoplastique tangent l'opérateur qui permet d'obtenir la vitesse de déformation plastique en fonction de la vitesse de déformation totale. Les équations 5.31 et 5.32 permettent d'écrire :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^p = \Lambda_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}^p - \Lambda_{ijkl} \left( \frac{n_{mn} \Lambda_{mnpq} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{pq}}{H + n_{rs} \Lambda_{rstu} n_{tu}} \right) n_{kl} \quad (5.34)$$

$$= \Lambda_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}^p - \frac{(\Lambda_{ijkl} n_{kl}) (n_{mn} \Lambda_{mnpq})}{H + n_{rs} \Lambda_{rstu} n_{tu}} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{pq} \quad (5.35)$$

$$(5.36)$$

Soit :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \underline{\underline{L}}^{ep} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{avec :} \quad \underline{\underline{L}}^{ep} = \underline{\underline{\Lambda}} - \frac{(\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}) \otimes (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}})}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}} \quad (5.37)$$

## Résumé

- Expression de l'énergie libre pour introduire écrouissages isotrope et cinématique :

$$\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, R, X) = \Psi_e(\underline{\underline{\varepsilon}}^e) + \frac{1}{2} H r^2 + \frac{1}{2} X : \underline{\underline{C}} : X$$

- Définition de la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  et des variables d'écrouissage  $A_I$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad A_I = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_I}$$

- Lois d'écoulement généralisées :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} \quad \dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_I}$$

avec la forme de  $\Psi$  précédente, et

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, X, R) = J(\underline{\underline{\sigma}} - X) - R - \sigma_y = ((3/2)(\underline{\underline{s}} - X) : (\underline{\underline{s}} - X))^{0,5} - R - \sigma_y$$

c'est la déformation plastique cumulée  $p$  qui est la variable d'état de l'écrouissage isotrope, et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  qui est celle de l'écrouissage cinématique linéaire.

- Règle de Prandtl–Reuss :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}}}{H} \underline{\underline{n}}$$

ou :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}} \underline{\underline{n}}$$

- Opérateur élastoplastique tangent :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \underline{\underline{L}}^{ep} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{avec :} \quad \underline{\underline{L}}^{ep} = \underline{\underline{\Lambda}} - \frac{(\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}) \otimes (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}})}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}}$$

## Chapitre 6

# Introduction à la mécanique des matériaux hétérogènes

Les matériaux de structures possèdent une échelle physique en deçà de laquelle ils ne peuvent plus être considérés comme homogènes. C'est évident dans le cas des composites étudiés précédemment à l'échelle des plis, fibres ou inclusions individuelles. De manière moins évidente, c'est le cas aussi des alliages métalliques qui sont en fait des assemblages de grains monocristallins présentant des orientations cristallines distinctes de grain à grain. Ces deux types de morphologie, à savoir la morphologie fibre/matrice rencontrée dans les composites et la morphologie polycristalline, sont illustrés par les figures 6.1 et 6.2 respectivement. Pour le dimensionnement d'une structure, il n'est pas raisonnable ni encore possible de prendre directement en compte l'influence de l'ensemble de ces hétérogénéités sur la réponse du composant. On cherche donc à remplacer le matériau hétérogène par un milieu dit *homogène équivalent* caractérisé par des propriétés mécaniques effectives. Ces dernières résultent de l'interaction entre eux des constituants (dits aussi phases) au sein d'un volume élémentaire  $dV$  du matériau considéré. L'objectif est donc, par exemple dans le cas des composites, de déterminer les modules d'élasticité effectifs du matériau composite à partir de la connaissance des propriétés élastiques des constituants, de leur fraction volumique et de leur arrangement. Le problème posé est très général et englobe des situations plus complexes encore que les stratifiés étudiés précédemment, pour lesquels l'intuition pouvait fournir par exemple des cinématiques raisonnables. On le verra, *les propriétés effectives ne s'obtiennent pas par une simple moyenne* des propriétés des constituants pondérées par les fractions volumiques. La distribution dans l'espace des différentes phases en présence est la clef pour optimiser par la microstructure les propriétés souhaitées.

La mécanique des matériaux hétérogènes est une discipline de la mécanique des matériaux qui est en pleine expansion. Les développements actuels concernent essentiellement les comportements non linéaires, ils sont rendus possibles par les progrès simultanés des concepts théoriques, de la puissance de calcul et des méthodes d'investigation expérimentale. La présentation faite dans ce chapitre se limite à l'élasticité, et cherche seulement par des exemples élémentaires à montrer quelques idées fondamentales et certains outils de base du domaine.

### 6.1 Moyennes de volume, moyennes de surface

On utilisera abondamment dans la suite le théorème de Stokes qui, pour une fonction scalaire  $u(x_1, x_2, x_3)$ , intégrée sur un domaine  $V$  de frontière  $\partial V$ , s'énonce de la façon suivante :

$$\int_V u_{,i} dV = \int_{\partial V} u n_i dS \quad (6.1)$$

La notation  $_{,i}$  désigne la dérivée partielle par rapport à la coordonnée cartésienne  $x_i$  (base orthonormée). Le vecteur  $\underline{n}$  de composantes cartésiennes  $n_i$  représente le vecteur normal en tout point de la surface  $\partial V$ .

On renvoie au cours de géométrie différentielle pour la démonstration de ce résultat.

On peut utiliser ce théorème pour relier la moyenne sur le volume  $V$  d'un champ de déformation compatible  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  à la moyenne des valeurs sur le bord  $\partial V$  de ce champ. La compatibilité du champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  signifie qu'il dérive d'un champ de déplacement  $\underline{u}'$ . On introduit la notation suivante pour la moyenne volumique :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}' dV \quad (6.2)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V (u'_{i,j} + u'_{j,i}) dV \quad (6.3)$$

L'application du théorème de Stokes à chaque composante de déplacement conduit à :

$$\langle u'_{i,j} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} u_i n_j dS \quad (6.4)$$

Finalement, on obtient

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \underline{u} \otimes \underline{n} dS \quad (6.5)$$

où le produit tensoriel symétrisé a été introduit :

$$\underline{u} \otimes \underline{n} = \frac{1}{2} (\underline{u} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{u}) \quad (6.6)$$

On relie de manière similaire la moyenne volumique du tenseur des contraintes à la résultante du vecteur traction sur le bord. On considère pour cela un champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  défini sur  $V$  que l'on suppose statiquement admissible. Cela signifie ici que sa divergence est nulle en tout point :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* = \sigma^*_{ik,k} \underline{e}_i = 0 \quad (6.7)$$

où les  $\underline{e}_i$  désignent les vecteurs de la base cartésienne. On vérifiera alors que

$$\begin{aligned} \langle \sigma^*_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \sigma^*_{ij} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V (\sigma^*_{ik} x_j)_{,k} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma^*_{ik} n_k x_j dS \end{aligned}$$

En notation intrinsèque ce résultat s'écrit

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}) \otimes \underline{x} dS \quad (6.8)$$

On remarquera que la symétrie du membre de droite de l'équation (6.8) n'est pas apparente. Pourtant, on montrerait de la même façon que le résultat est identique à l'expression obtenue en remplaçant dans le second membre le signe  $\otimes$  par  $\otimes^s$ .

Le travail des forces internes associé aux champs admissibles  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  se calcule alors de la façon suivante :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma^*_{ij} u'_{i,j} dV = \frac{1}{V} \int_V (\sigma^*_{ij} u'_i)_{,j} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}' dV \quad (6.9)$$

Les formules de moyennes précédentes supposent la continuité des champs au sein du volume considéré. Des termes supplémentaires apparaissent dans le cas où des discontinuités sont présentes (fissures, pores...).

## 6.2 Volume élémentaire représentatif, propriétés effectives

Les propriétés effectives du milieu homogène équivalent cherché peuvent être obtenues en résolvant un problème aux limites sur le volume élémentaire  $dV$ , à condition que celui-ci soit suffisamment grand pour être représentatif de la microstructure du matériau hétérogène. Ce volume doit pour cela contenir suffisamment d'hétérogénéités (grains, inclusions ou fibres). Si la distribution des constituants est périodique (comme dans le cas du composite de la figure 6.1b), le volume nécessaire se réduit à une cellule élémentaire permettant de reconstituer l'ensemble de la microstructure par simple translation (pavage). On soumet alors le volume retenu à des sollicitations élémentaires pour déterminer la réponse résultante. La difficulté réside en fait dans le choix des conditions aux limites à appliquer au volume considéré pour imposer une déformation ou contrainte globale moyenne donnée (dite macroscopique).

On mentionne ici trois types de conditions aux limites permettant d'imprimer au volume considéré une déformation ou une contrainte moyenne :

- Conditions de déformations homogènes au contour (problème  $\mathcal{PE}$ ) :

$$\underline{u} = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (6.10)$$

où  $\underline{E}$  est un tenseur symétrique imposé indépendant de  $\underline{x}$ .

- Conditions de contraintes homogènes au contour (problème  $\mathcal{PS}$ ) :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (6.11)$$

où  $\underline{\Sigma}$  est un tenseur symétrique imposé indépendant de  $\underline{x}$ .

- Conditions de périodicité (problème  $\mathcal{PP}$ ) : lorsque le milieu est périodique, la cellule  $V$  est connue dans ses moindres détails géométriques et sa forme est telle que l'on peut paver l'espace en translatant  $V$ . On cherche alors un champ solution de la forme :

$$\underline{u} = \underline{E} \cdot \underline{x} + \underline{v} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (6.12)$$

où  $\underline{v}$  est périodique, *i.e.*  $\underline{v}$  prend des valeurs égales en des points homologues sur des faces opposées de  $V$  ; on impose d'autre part que le vecteur contrainte  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  prenne des valeurs opposées sur des faces opposées. Il existe aussi une formulation duale du problème périodique.

On peut alors prouver l'existence et l'unicité de la solution de ces trois problèmes aux limites, au moins dans le cas linéaire (éventuellement à un mouvement de corps rigide ou un translation près). Dans tous les cas, il résulte des calculs de moyennes de la section précédente (équations (6.5) et (6.8)) que :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{E} \quad (6.13)$$

dans le cas des conditions de déformations homogènes au contour et le cas périodique, et

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{\Sigma} \quad (6.14)$$

pour les conditions duales en contraintes. Les moyennes sont effectuées sur le volume  $V$  et les majuscules (resp. minuscules) désignent les grandeurs macroscopiques (resp. microscopiques). On peut aussi calculer la moyenne du travail des forces internes au sein du volume élémentaire sollicité et montrer, à nouveau grâce au théorème de Stokes, que pour les trois conditions aux limites précédentes :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle : \langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{\Sigma} : \underline{E} \quad (6.15)$$

On voit que le travail des forces internes macroscopique est alors égal à la moyenne du travail des forces internes microscopiques.

La solution des problèmes aux limites correspondants n'est en général pas analytique. On a recours à des simulations numériques, par exemple par la méthode des éléments finis. Un exemple de volume élémentaire représentatif (VER) est donné sur la figure 6.3, dans le cas de la morphologie polycristalline.

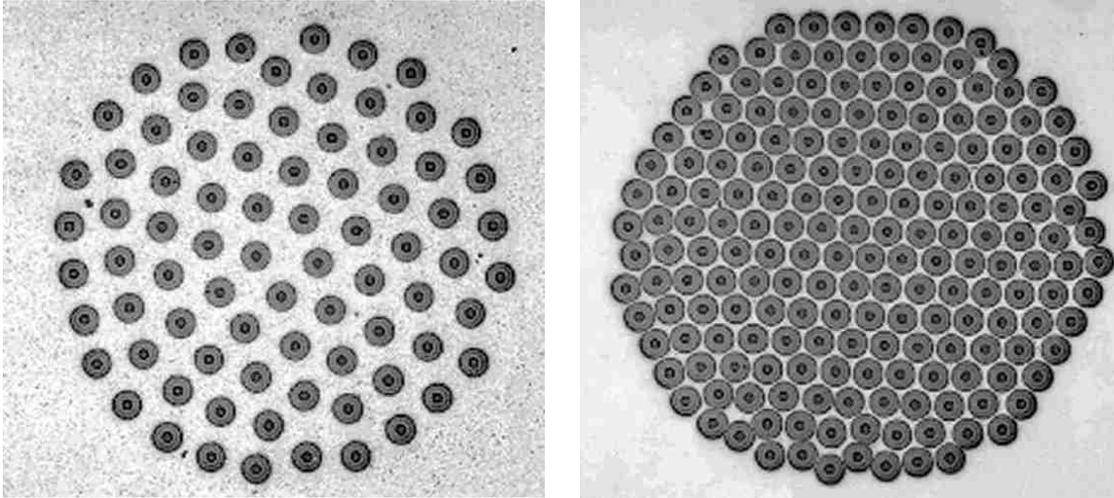
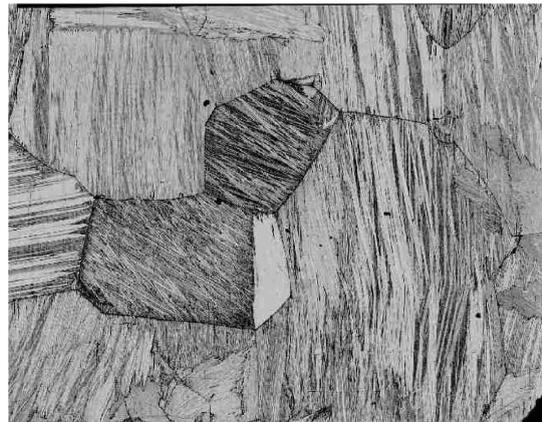


FIG. 6.1 – Composite à matrice métallique SiC-titane pour application aéronautique pour deux fractions volumiques de fibres différentes (diamètre des fibres  $600\ \mu\text{m}$ )



a. Microstructure d'un revêtement de tôle d'acier galvanisée.



b. Microstructure d'un alliage à mémoire de forme Cu-Zn-Al.

FIG. 6.2 – Morphologie polycristalline dans les matériaux hétérogènes

### 6.3 Propriétés élastiques effectives

Le problème aux limites précédent posé sur le VER admet, dans le cas élastique linéaire, une solution unique qui dépend linéairement du chargement macroscopique  $\tilde{E}$  imposé. Il existe donc un champ de tenseur unique dit de concentration permettant d'exprimer la déformation en un point  $\underline{x}$  au sein du VER

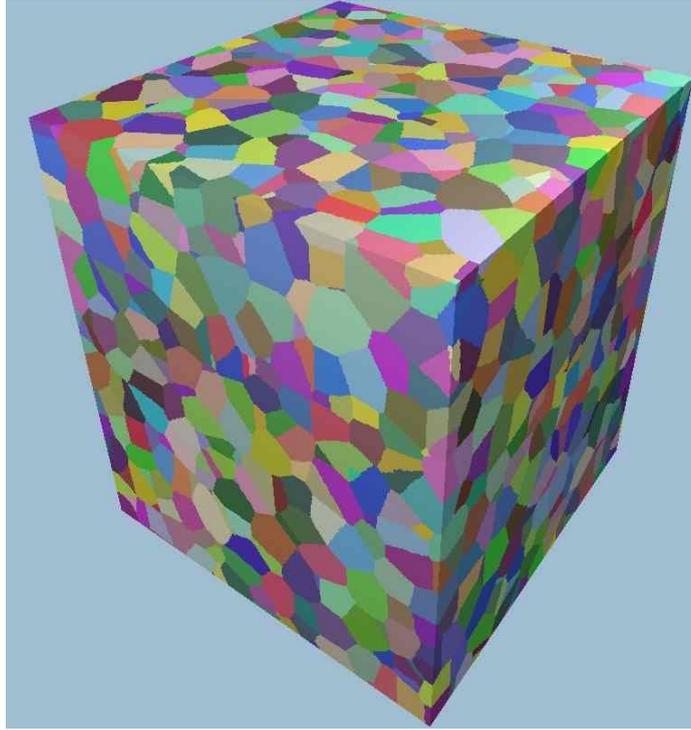


FIG. 6.3 – Volume élémentaire représentatif d'un polycristal

en fonction de la déformation macroscopique appliquée :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (6.16)$$

Il est en général impossible d'obtenir une expression analytique de  $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$  mais on peut le déterminer de manière numérique. Puisque la moyenne des déformations locales doit donner  $\underline{\underline{E}}$ , il s'ensuit que le tenseur de concentration vérifie la propriété suivante :

$$\langle \underline{\underline{A}} \rangle = \underline{\underline{1}} \quad (6.17)$$

où  $\underline{\underline{1}}$  désigne le tenseur identité d'ordre 4 sur les tenseurs d'ordre 2 symétriques. Les contraintes macroscopiques sont alors liées aux déformations macroscopiques imposées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle \\ &= \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \rangle \\ &= \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{C}} = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle \end{aligned} \quad (6.18)$$

On voit que la loi de comportement macroscopique prend la forme d'une loi d'élasticité avec un tenseur des modules effectifs  $\underline{\underline{C}}$ . En particulier, il apparaît clairement que  $\underline{\underline{C}}$  n'est pas une simple moyenne des modules locaux  $\underline{\underline{c}}(\underline{x})$  mais une moyenne pondérée par le tenseur de concentration  $\underline{\underline{A}}$  qui dépend explicitement de la distribution des phases au sein du VER. Le cas particulier d'un VER homogène conduit bien sûr à  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$  et  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{c}}$ . Ce n'est plus le cas dès que le matériau est hétérogène.

De même, si le VER est soumis au tenseur de contraintes macroscopiques  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , il existe un tenseur de localisation  $\underline{\underline{B}}$  donnant le tenseur des contraintes en chaque point du VER en fonction de la charge

imposée :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{B}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (6.19)$$

Les modules de souplesse effectifs s'expriment alors en fonction de  $\underline{\underline{B}}$  :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{S}} = \langle \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{s}} \rangle \quad (6.20)$$

où  $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{c}}^{-1}$ . Lorsque le volume de matériau considéré est représentatif (i.e. suffisamment grand), la détermination des propriétés effectives ne dépend pas du choix des conditions aux limites de sorte que l'on a

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (6.21)$$

Le tenseur d'élasticité macroscopique peut aussi être défini à l'aide d'une définition énergétique de la forme :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (6.22)$$

On vérifiera que les modules effectifs s'expriment alors de la façon suivante à l'aide des tenseurs de concentration  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{B}}$  précédents :

$$\underline{\underline{C}} = \langle \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle = \langle \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{B}} \rangle^{-1} \quad (6.23)$$

On montre, à l'aide des propriétés (6.15) et (6.17), qu'en fait les définitions directe (équations (6.18) et (6.20)) et énergétique (équation (6.22)) sont équivalentes. En particulier les modules effectifs obtenus sont les mêmes.

## 6.4 Potentiel élastique

Dans la suite on étudie les propriétés de matériaux hétérogènes dont les constituants ont un comportement élastique éventuellement non linéaire décrit par un potentiel  $W(\underline{\underline{\varepsilon}})$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = W'(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (6.24)$$

Le potentiel élastique choisi est l'énergie libre de Helmholtz. Chaque constituant du matériau hétérogène étudié possède un potentiel distinct. On suppose qu'il existe pour le milieu homogène équivalent cherché un potentiel effectif  $W^{eff}(\underline{\underline{E}})$  :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = W^{eff'}(\underline{\underline{E}}) = \frac{\partial W^{eff}}{\partial \underline{\underline{E}}} \quad (6.25)$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire, ces potentiels sont les formes quadratiques suivantes :

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad W(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} \quad (6.26)$$

On demande à tous les potentiels rencontrés d'être convexes par rapport à leurs arguments. Cette condition est trivialement remplie dans le cas de l'élasticité linéaire.

On associe à  $W(\underline{\underline{\varepsilon}})$  le potentiel dual  $W^*(\underline{\underline{\sigma}})$ , appelé énergie complémentaire, tel que

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = W^{*'}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\partial W^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (6.27)$$

Les potentiels direct et dual sont représentés schématiquement sur la figure 6.4 dans le cas uniaxial. On voit en particulier que, puisque  $W$  désigne l'aire sous la courbe,  $W^*$  représente le complément d'aire dans le rectangle  $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$  :

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - W(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}} = W'(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (6.28)$$

On peut donner l'expression équivalente suivante faisant intervenir la transformée de Legendre–Fenchel :

$$W^*(\underline{\sigma}) = \max_{\underline{\varepsilon}} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} - W(\underline{\varepsilon})) \quad (6.29)$$

Pour montrer l'équivalence entre les définitions (6.28) et (6.29), on s'appuie sur la convexité du potentiel  $W(\underline{\varepsilon})$ . On voit sur la figure 6.5 que, pour un  $\underline{\sigma}$  donné, l'écart entre  $\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}$  et  $W$  est maximal pour la déformation  $\underline{\varepsilon}$  telle que la tangente à la courbe  $W$  en  $\underline{\varepsilon}$  est parallèle à la droite  $\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}$ . Cette situation correspond donc bien à  $\underline{\sigma} = W'(\underline{\varepsilon})$ . La démonstration s'étend au cas tridimensionnel. Le potentiel dual est convexe par rapport à ses arguments dès que le potentiel élastique l'est.

De même, on peut définir le potentiel dual pour les propriétés effectives du milieu homogène équivalent  $W^{eff*}(\underline{\Sigma})$  tel que

$$\underline{E} = \frac{\partial W^{eff*}}{\partial \underline{\Sigma}} \quad (6.30)$$

Le cas particulier de l'élasticité linéaire prend la forme très simple :

$$W^*(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} - \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{c} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{c} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{s} : \underline{\sigma} = W(\underline{\varepsilon}) \quad (6.31)$$

$$W^*(\underline{\Sigma}) = \frac{1}{2} \underline{\Sigma} : \underline{S} : \underline{\Sigma} \quad (6.32)$$

On admet qu'alors les souplesses s'obtiennent à partir des modules d'élasticité effectifs par la relation

$$\underline{S} = \underline{C}^{-1} \quad (6.33)$$

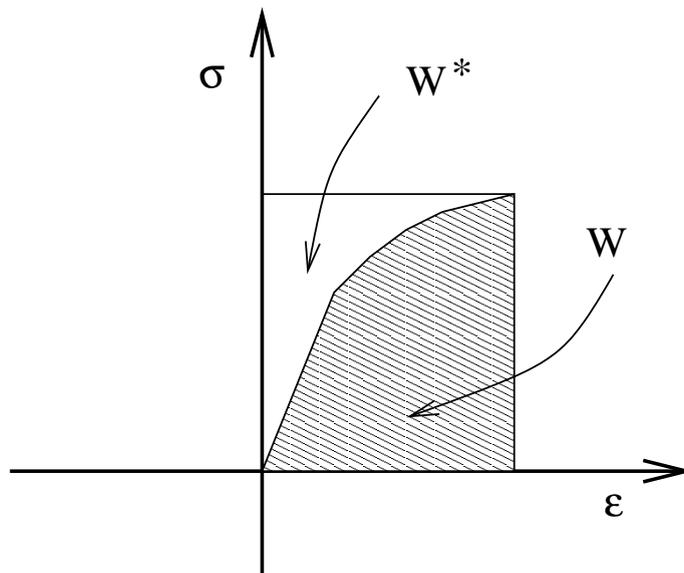


FIG. 6.4 – Réponse non linéaire du matériau dans le cas uniaxial et définition du potentiel élastique et de l'énergie complémentaire :  $W(\underline{\varepsilon}) = \int_0^{\underline{\varepsilon}} W'(\underline{\varepsilon}) d\underline{\varepsilon}$ ,  $W^*(\underline{\sigma}) = \int_0^{\underline{\sigma}} W'^*(\underline{\sigma}) d\underline{\sigma}$ . On en déduit que  $W$  est l'aire sous la courbe et  $W^*$  l'aire complémentaire

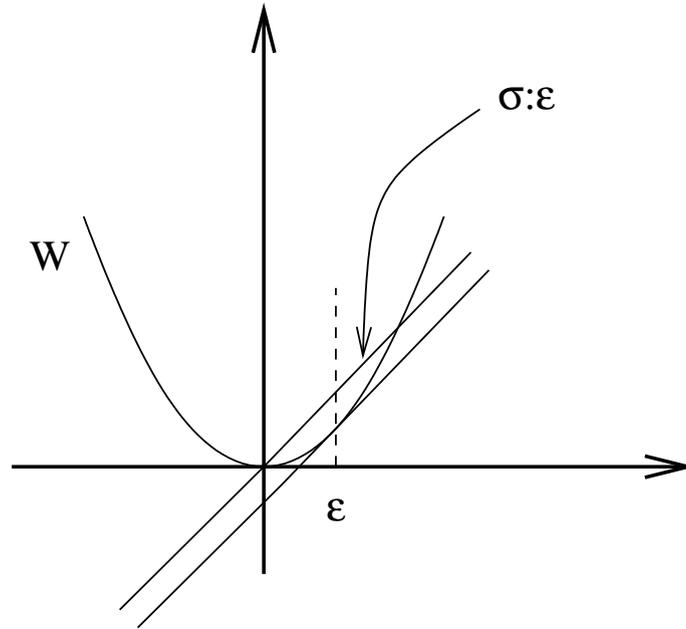


FIG. 6.5 – Transformée de Legendre–Fenchel d’un potentiel d’élasticité convexe

## 6.5 Théorème de l’énergie potentielle : borne supérieure de Voigt

On considère le problème aux limites suivant sur le volume  $V$  de matériau hétérogène :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} &= 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} &= W'(\underline{\underline{\varepsilon}}) \\ \underline{\underline{u}} &= \underline{\underline{u}}^d \quad \forall \underline{\underline{x}} \in \partial V\end{aligned}$$

où  $\underline{\underline{u}}$  désigne le champ de déplacement dont dérive  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ,  $\underline{\underline{f}}$  d’éventuels efforts volumiques. Dans ce problème, le déplacement est imposé sur le contour de  $V$ . Le théorème de l’énergie potentielle stipule alors que la solution  $\underline{\underline{u}}$  sur  $V$  minimise l’énergie potentielle  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{F}(\underline{\underline{u}}) = \int_V (W(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}}) dV \quad (6.34)$$

par rapport aux champs de déplacement cinématiquement admissibles  $\underline{\underline{u}}'$ . On dit que  $\underline{\underline{u}}'$  est cinématiquement admissible s’il vérifie les conditions aux limites  $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}^d$  sur  $\partial V$ .

La démonstration de ce théorème est basée à nouveau sur la propriété de convexité du potentiel  $W$ , ainsi que sur le théorème de Stokes. Si  $\underline{\underline{u}}$  est la solution du problème aux limites considéré et  $\underline{\underline{u}}'$  un champ cinématiquement admissible, on établit que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\underline{\underline{u}}') - \mathcal{F}(\underline{\underline{u}}) &= \int_V (W(\underline{\underline{\varepsilon}}') - W(\underline{\underline{\varepsilon}})) dV \\ &\geq \int_V W'(\underline{\underline{\varepsilon}}) : (\underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{\varepsilon}}) dV \\ &\geq \int_V (\underline{\underline{\sigma}}_{ij}(\underline{\underline{u}}'_i - \underline{\underline{u}}_i))_{,j} dV \\ &\geq \int_{\partial V} \underline{\underline{\sigma}}_{ij}(\underline{\underline{u}}'_i - \underline{\underline{u}}_i) n_j dS = 0\end{aligned}$$

puisque  $\underline{\underline{u}}$  et  $\underline{\underline{u}}'$  coïncident sur le bord de  $V$ . Ceci démontre le théorème de l’énergie potentielle. La figure 6.6 illustre la propriété de convexité de  $W$  utilisée.

Explorons les conséquences de ce théorème dans le cas particulier du problème aux limites  $\mathcal{PE}$  posé sur le VER, pour lequel

$$\underline{u}^d = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (6.35)$$

On se restreint en outre au cas de constituants élastiques linéaires. Le théorème de l'énergie potentielle s'écrit alors

$$\frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon} : \underline{c} : \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV = V \frac{1}{2} \underline{\Sigma} : \underline{E} = \frac{1}{2} V \underline{E} : \underline{C} : \underline{E} \leq \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}' : \underline{c} : \underline{\varepsilon}' dV \quad (6.36)$$

On peut utiliser cette inégalité pour borner les propriétés élastiques effectives en choisissant des champs tests cinématiquement admissibles  $\underline{u}'$ . Le choix le plus simple compatible avec les conditions aux limites du problème  $\mathcal{PE}$  est :

$$\underline{u}' = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in V \quad (6.37)$$

ce qui implique

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{E} \quad (6.38)$$

On choisit donc comme champ test le champ de déformation homogène  $\underline{E}$  lui-même, qui n'est qu'une grossière approximation du champ réel  $\underline{\varepsilon}$ . Le théorème de l'énergie potentielle s'écrit alors

$$\underline{E} : \underline{C} : \underline{E} \leq \underline{E} : \langle \underline{c} \rangle : \underline{E}, \quad \forall \underline{E} \quad (6.39)$$

Cette relation fournit une borne supérieure pour les propriétés effectives  $\underline{C}$ . Cette borne est la moyenne des propriétés locales  $\langle \underline{c} \rangle$ . Elle est appelée borne supérieure de Voigt. Elle indique que quel que soit l'arrangement des phases au sein du matériau hétérogène, les propriétés effectives ne peuvent excéder la moyenne volumique des propriétés des constituants.

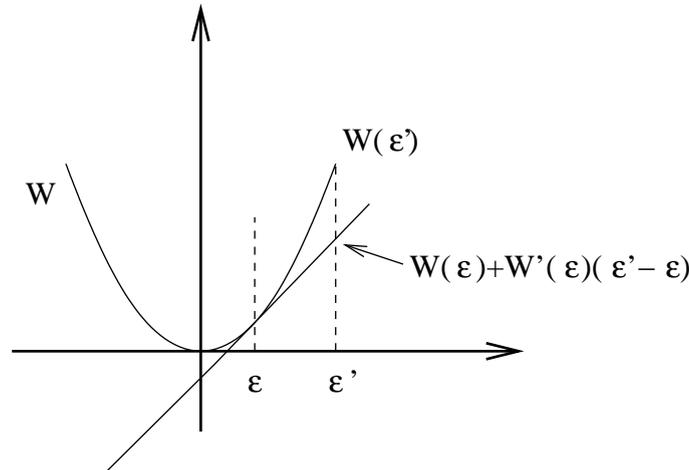


FIG. 6.6 – Propriété de convexité du potentiel élastique

## 6.6 Théorème de l'énergie complémentaire : borne inférieure de Reuss

La formulation duale du théorème de l'énergie potentielle constitue le théorème de l'énergie complémentaire. On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} &= 0 \\ \underline{\varepsilon} &= \underline{W}^{*'}(\underline{\sigma}) \\ \underline{T} &= \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \quad \forall \underline{x} \in \partial V \end{aligned}$$

La solution en contrainte  $\tilde{\sigma}$  minimise alors la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}^*(\tilde{\sigma}^*) = \int_V W^*(\tilde{\sigma}^*) dV \quad (6.40)$$

pour tout champ de contrainte  $\tilde{\sigma}^*$  statiquement admissible (i.e. autoéquilibré ( $\text{div } \tilde{\sigma}^* + \underline{f} = 0$ ) et vérifiant les conditions aux limites  $\tilde{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}^d$ ). La démonstration est tout à fait similaire à celle mise en œuvre pour le théorème de l'énergie potentielle. Elle s'appuie sur la propriété de convexité de  $W^*$  qui est acquise dès que  $W$  est convexe.

Explorons les conséquences de ce théorème dans le cas particulier du problème aux limites  $\mathcal{PS}$  posé sur le VER, pour lequel

$$\underline{T}^d = \underline{\Sigma} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (6.41)$$

On se restreint en outre au cas de constituants élastiques linéaires. Le théorème de l'énergie complémentaire s'écrit alors

$$\frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{s} : \underline{\sigma} dV = \frac{1}{2} V \underline{\Sigma} : \underline{S} : \underline{\Sigma} \leq \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^* : \underline{s} : \underline{\sigma}^* dV \quad (6.42)$$

On peut utiliser cette inégalité pour borner les propriétés élastiques effectives en choisissant des champs tests statiquement admissibles  $\tilde{\sigma}^*$ . Le choix le plus simple compatible avec les conditions aux limites du problème  $\mathcal{PS}$  est :

$$\tilde{\sigma}^* = \underline{\Sigma} \quad (6.43)$$

On choisit donc comme champ test le champ de contraintes homogène  $\underline{\Sigma}$  lui-même. Le théorème de l'énergie potentielle s'écrit alors

$$\underline{\Sigma} : \underline{S} : \underline{\Sigma} \leq \underline{\Sigma} : \langle \underline{s} \rangle : \underline{\Sigma}, \quad \forall \underline{\Sigma} \quad (6.44)$$

Cette relation fournit une borne supérieure pour les propriétés effectives  $\underline{S}$  et par conséquent une borne inférieure pour les modules effectifs  $\underline{C}$ . Cette borne est l'inverse de la moyenne des propriétés locales  $\langle \underline{s} \rangle^{-1} = \langle \underline{c}^{-1} \rangle^{-1}$ . Elle est appelée borne inférieure de Reuss. Elle indique que quel que soit l'arrangement des phases au sein du matériau hétérogène, les souplesses effectives ne peuvent excéder la moyenne volumique des souplesses des constituants.

## 6.7 Application à l'élasticité isotrope

On considère le cas particulier d'un matériau hétérogène dont les constituants sont élastiques linéaires et isotropes. On suppose en outre que l'arrangement des phases est tel que le matériau résultant est isotrope au niveau macroscopique. La loi de comportement locale de chaque constituant s'écrit

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon} \quad (6.45)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé ( $\mu$  module de cisaillement). On définit le module de compressibilité

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (6.46)$$

Les modules de cisaillement et de compressibilité effectifs sont notés  $\mu^{eff}$  et  $k^{eff}$  respectivement. On établit ici les bornes de Voigt et Reuss correspondantes. Considérons d'abord le champ de déformation test homogène

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

L'inégalité de Voigt s'écrit alors

$$\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} = 9k^{eff} \leq \langle \langle 9k \rangle \rangle \quad (6.48)$$

Considérons ensuite le champ de contrainte test homogène

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

L'inégalité de Reuss s'écrit alors

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{3}{k^{eff}} \leq \langle \langle \frac{3}{k^{eff}} \rangle \rangle \quad (6.50)$$

On obtient finalement un encadrement du module de compressibilité effectif :

$$\langle \langle \frac{1}{k} \rangle \rangle^{-1} \leq k^{eff} \leq \langle \langle k \rangle \rangle \quad (6.51)$$

Dans le cas d'un matériau biphasé, en appelant 1 et 2 les deux phases et  $f, 1 - f$  les fractions volumiques correspondantes, la borne de Voigt s'écrit explicitement

$$\langle \langle k \rangle \rangle = fk_1 + (1 - f)k_2 \quad (6.52)$$

Considérons de même le champ de déformation test homogène

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

L'inégalité de Voigt s'écrit alors

$$\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} = 4\mu^{eff} \leq \langle \langle 4\mu \rangle \rangle \quad (6.54)$$

Considérons ensuite le champ de contrainte test homogène

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

L'inégalité de Reuss s'écrit alors

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{\mu^{eff}} \leq \langle \langle \frac{1}{\mu^{eff}} \rangle \rangle \quad (6.56)$$

On obtient finalement un encadrement du module de cisaillement effectif :

$$\langle \langle \frac{1}{\mu} \rangle \rangle^{-1} \leq \mu^{eff} \leq \langle \langle \mu \rangle \rangle \quad (6.57)$$

Ces inégalités montrent que les propriétés réelles sont comprises entre les moyennes arithmétiques et géométriques des propriétés des constituants, ce qui n'était pas du tout évident de prime abord. L'approche naïve consistant à estimer les propriétés par une simple moyenne ne permet donc que d'obtenir des bornes. On remarquera que ces bornes peuvent être atteintes au moins dans certaines directions particulières pour des composites stratifiés ou à fibres longues par exemple. Si toutes les fibres sont parallèles au sein d'une matrice isotrope, alors on vérifiera que les propriétés dans le sens des fibres sont données par la moyenne de Voigt. Au contraire, dans un laminé, on obtient la borne de Reuss en sollicitant dans la direction transverse normale aux couches.

**Résumé**

- En conditions de déformations ou de contraintes homogènes aux contours, et en conditions périodiques, on montre :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{\Sigma} : \underline{E}$$

On suppose que cela reste valable pour des conditions aux limites quelconques (lemme de Hill-Mandel)

- Tenseurs de concentration :

$$\text{Déformations} \quad \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{A}(\underline{x}) : \underline{E}$$

$$\text{Contraintes} \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{B}(\underline{x}) : \underline{\Sigma}$$

- Tenseurs effectifs :

$$\text{Raideur} \quad \underline{C} = \langle \underline{c} : \underline{A} \rangle$$

$$\text{Souplesse} \quad \underline{S} = \langle \underline{B} : \underline{s} \rangle$$

- Bornes :

$$\text{Voigt} \quad \underline{E} : (\underline{C} - \langle \underline{c} \rangle) : \underline{E} \leq 0$$

$$\text{Reuss} \quad \underline{\Sigma} : (\underline{S} - \langle \underline{s} \rangle) : \underline{\Sigma} \leq 0$$

- Bornes en élasticité isotrope :

$$\text{Compressibilité} \quad \langle \frac{1}{k} \rangle^{-1} \leq k^{eff} \leq \langle k \rangle$$

$$\text{Cisaillement} \quad \langle \frac{1}{\mu} \rangle^{-1} \leq \mu^{eff} \leq \langle \mu \rangle$$

# Chapitre 7

## Eléments de théorie des poutres planes

La théorie des poutres s'applique sur des «solides élancés». De façon traditionnelle, le calcul de poutres fait partie du domaine de la *résistance des matériaux (RDM)* [23]. Cette discipline, longtemps enseignée en tant que telle, a permis pendant longtemps de calculer de façon analytique des treillis complexes, des ponts, des ouvrages d'art divers. Les mêmes calculs sont maintenant effectués numériquement, au moyen de codes de calcul par éléments finis. On abordera ici deux approches de la théorie des poutres :

- au travers d'une brève revue du problème de Saint-Venant, solution analytique tridimensionnelle sur un tronçon de poutre,
- au moyen du principe des puissances virtuelles, qui permet d'évaluer des solutions approchées.

### 7.1 Définitions

#### 7.1.1 Modélisation géométrique

Les poutres ne sont pas forcément des prismes. Le modèle géométrique qui est employé se résume à :

- une *ligne moyenne*  $C$ , de point courant  $G$ , avec  $s$ , abscisse curviligne à partir de  $O$ . On définit le long de cette ligne  $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ , trièdre de Fresnet orthonormé, ainsi que  $R$ , *rayon de courbure*. On rappelle les égalités suivantes :

$$\underline{t} = \frac{OG}{ds} \quad \underline{n} = R \frac{d\underline{t}}{ds} \quad \underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n} \quad (7.1)$$

- une *section droite*,  $S$  de la poutre, dans le plan  $(\underline{n}, \underline{b})$ , de contour  $\Gamma$ , de centre de gravité  $G$ .

Pour que la théorie soit applicable, il est nécessaire que les sections droites soient lentement variables ou constantes en fonction de  $s$ , et que la plus grande dimension de la section droite soit petite devant  $R$ , et devant la longueur de la poutre. Ces hypothèses permettent d'assimiler localement la poutre à un tronçon de prisme. On considère dans la suite une théorie en petites déformations et petits déplacements. Les actions mécaniques, charges et actions de liaison, s'appliquent sur la géométrie simplifiée. Elles sont représentées par des torseurs (un vecteur résultant et un moment résultant), que l'on définit donc sur la ligne moyenne. On construira également une cinématique simplifiée, permettant de reconstruire les déplacements approchés du milieu continu à partir de translations et de rotations d'un point de la ligne moyenne.

Le but de la théorie des poutres est de remplacer la solution tridimensionnelle par une solution *globale*, dans laquelle on écrira des *équations d'équilibre* entre les quantités moyennes qui définissent les efforts, une *cinématique* définissant les déplacements sur la structure simplifiée, et des *lois de comportement* qui relient les deux. Il s'agit de trouver une solution acceptable pour un problème qui est, en toute rigueur, incomplet, puisqu'on ne spécifiera pas de façon précise les efforts extérieurs sur la

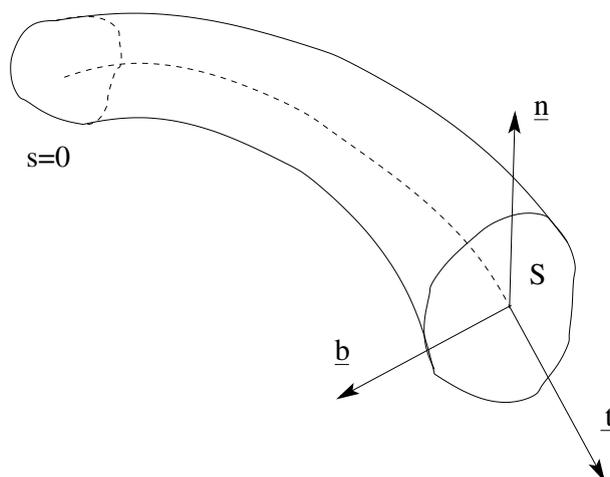


FIG. 7.1 – Représentation géométrique d'une poutre

géométrie tridimensionnelle. On ne cherchera à représenter que les moyennes, en termes de résultantes et de moments.

La figure 7.1 montre la forme générale d'une poutre. Dans chaque section droite, on définit le centre de gravité par :

$$\int_S \underline{GM} dS = 0 \quad (7.2)$$

On définit le *moment quadratique* par rapport à une droite  $\Delta$  de la section droite, en introduisant  $H$ , projection de  $M \in S$  sur  $\Delta$

$$I(S, \Delta) = \int_S ||\underline{HM}||^2 dS \quad (7.3)$$

Cette grandeur présente une analogie avec le moment d'inertie d'un solide autour d'une droite, mais dans le cas présent, le solide est plan et la masse surfacique est de 1. Il reste qu'on parle de moment d'inertie de la surface  $S$  autour de  $\Delta$ . On peut donc construire un tenseur d'inertie, qui est du second ordre, défini positif :

$$(I) = \begin{pmatrix} I_{22} = \int_S x_3^2 dS & I_{23} = - \int_S x_2 x_3 dS \\ I_{32} = - \int_S x_2 x_3 dS & I_{33} = \int_S x_2^2 dS \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Ce tenseur est diagonalisable. Il existe donc des *directions centrales principales*, pour lesquelles on définit les *moments quadratiques centraux principaux*

$$(I) = \begin{pmatrix} I_2 = \int_S x_3^2 dS & 0 \\ 0 & I_3 = \int_S x_2^2 dS \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Pour la suite du chapitre, on travaillera dans les axes ainsi définis. Dans le cas où la section présente deux axes de symétrie, ceux-ci correspondent bien entendu aux directions principales.

### 7.1.2 Principe de Saint-Venant

Le traitement de la théorie des poutres s'appuie sur le principe de Saint-Venant. Celui-ci considère le cas où, ayant résolu un problème de mécanique des milieux continus tridimensionnels, on évalue à l'aide de la solution obtenue les torseurs des efforts extérieurs dans une section quelconque. Si ceux-ci sont effectivement égaux à ceux qui sont appliqués, le principe de Saint-Venant indique que, même si

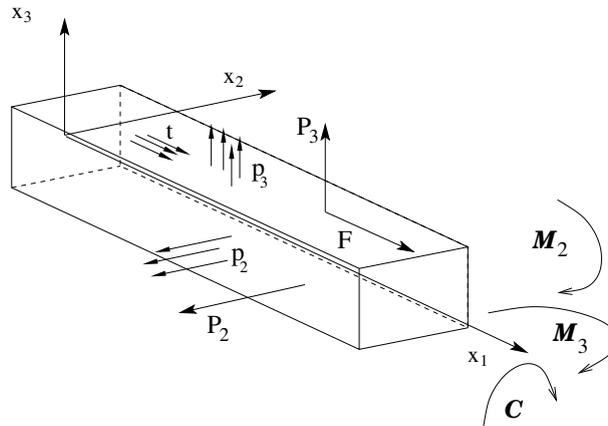


FIG. 7.2 – Bilan des efforts extérieurs

la répartition des contraintes n'est pas la même dans les deux cas, la solution trouvée sera valable, si on se place «suffisamment loin» du point d'application des charges. En d'autres termes, la perturbation n'est que locale. Dans la pratique, la solution est valide lorsqu'on a parcouru sur la ligne moyenne une distance qui est de l'ordre de deux à trois diamètres, si bien que la schématisation de type poutre est en général acceptée à partir d'un rapport 10 à 15 entre la longueur et la plus grande dimension de la section droite.

### 7.1.3 Modélisation des actions mécaniques

La figure 7.2 définit la manière dont on prend en considération les efforts extérieurs. Dans la mesure où la géométrie se résume en fait à une ligne et des sections droites, la représentation de la section elle-même n'est présente que de façon indicative. On prend en compte des forces et des moments, selon les trois directions de l'espace, et sous forme répartie ou ponctuelle. On définit donc :

- des forces concentrées  $F$  selon  $x_1$ ,  $P_2$  selon  $x_2$ ,  $P_3$  selon  $x_3$
- des forces surfaciques  $t$  selon  $x_1$ ,  $p_2$  selon  $x_2$ ,  $p_3$  selon  $x_3$
- des moments de flexion  $\mathcal{M}_2$  autour de  $x_2$ ,  $\mathcal{M}_3$  autour de  $x_3$
- un couple de torsion autour de  $x_1$ ,  $C$ .

On introduit les efforts intérieurs correspondants. Ils sont définis de manière globale sur une section courante. Les notations seront les suivantes :

- une résultante  $N$  selon  $x_1$ ,  $T_2$  selon  $x_2$ ,  $T_3$  selon  $x_3$  ;  $N$  est l'effort normal,  $T_2$  et  $T_3$  les composantes de l'effort tranchant
- un Moment de flexion  $M_2$  autour de  $x_2$ ,  $M_3$  autour de  $x_3$
- un Couple de torsion autour de  $x_1$ ,  $M_1$ .

On définit ainsi un torseur, qui est obtenu en intégrant les composantes suivantes du tenseur de contrainte :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T_2 = \int_S \sigma_{12} dS \quad T_3 = \int_S \sigma_{13} dS \quad (7.6)$$

$$C = \int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dS \quad M_2 = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad M_3 = - \int_S x_2 \sigma_{11} dS \quad (7.7)$$

Il n'est donc pas utile de connaître les composantes  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  pour calculer les efforts résultants. Ceci va inspirer la solution de Saint-Venant qui est exposée en section suivante. Il faut noter également qu'il est possible de construire une infinité de champs de contraintes qui redonnent le torseur indiqué. Dans la pratique, la théorie des poutres ne précise pas la manière dont sont distribués les efforts (en application du principe de Saint-Venant).

## 7.2 Solution de Saint-Venant

### 7.2.1 Contraintes

L'hypothèse de Saint-Venant consiste à chercher la solution d'un tronçon de poutre droite sous la forme d'un état de contrainte contenant uniquement deux cisaillements et un terme de contrainte axiale :

$$(\sigma_{..}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Chaque composante dépend pour le moment de la position  $(x_1, x_2, x_3)$  d'un point courant au sein de la poutre. On cherche à résoudre le problème à l'aide d'une formulation en contraintes. Le tenseur recherché doit vérifier :

- les équations d'équilibre

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \quad (7.9)$$

$$\sigma_{21,1} = 0 \quad (7.10)$$

$$\sigma_{31,1} = 0 \quad (7.11)$$

$$(7.12)$$

- les équations de Beltrami

$$-\Delta\sigma_{11} - \sigma_{11,11} = 0 \quad (7.13)$$

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{12} + \sigma_{11,12} = 0 \quad (7.14)$$

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{13} + \sigma_{11,13} = 0 \quad (7.15)$$

$$-\sigma_{11,22} + \nu\Delta\sigma_{11} = 0 \quad (7.16)$$

$$-\sigma_{11,23} = 0 \quad (7.17)$$

$$-\sigma_{11,33} + \nu\Delta\sigma_{11} = 0 \quad (7.18)$$

$$(7.19)$$

On déduit des équations précédentes la forme générale de la solution, dans laquelle on a introduit une fonction  $\phi$  dépendant de  $x_2$  et  $x_3$ , telle que  $\Delta\phi = 0$  :

$$\sigma_{11} = a_0 + a_1x_1 + (b_0 + b_1x_1)x_2 + (c_0 + c_1x_1)x_3 \quad (7.20)$$

$$\sigma_{12} = \phi_{,3} - \frac{a_1}{2}x_2 - c_1x_2x_3 - \frac{b_1}{1+\nu} \frac{x_3^2}{2} \quad (7.21)$$

$$\sigma_{13} = -\phi_{,2} - \frac{a_1}{2}x_3 - b_1x_2x_3 - \frac{c_1}{1+\nu} \frac{x_2^2}{2} \quad (7.22)$$

$$(7.23)$$

Lors du calcul des intégrales sur la section droite, un certain nombre de termes sont nuls, dans la mesure où les axes  $x_2$  et  $x_3$  sont des axes principaux. C'est le cas de  $\int_S x_2 dS$ ,  $\int_S x_3 dS$ ,  $\int_S x_2x_3 dS$ . On voit par ailleurs apparaître les moments quadratiques principaux. La forme finale de la solution en contrainte est :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} + \frac{M_2}{I_2}x_3 - \frac{M_3}{I_3}x_2 \quad (7.24)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{T_3}{I_2}x_2x_3 - \frac{1}{1+\nu} \frac{T_2}{I_3} \frac{x_3^2}{2} \quad (7.25)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{T_2}{I_3}x_2x_3 - \frac{1}{1+\nu} \frac{T_3}{I_2} \frac{x_2^2}{2} \quad (7.26)$$

$$(7.27)$$

La fonction  $\phi$  est solution de  $\Delta\phi = A$ , équation différentielle qu'il faut résoudre en prenant en compte respectivement une condition aux limites sur le contour de la section droite, et l'expression du moment de torsion :

$$d\phi = \left( -\frac{T_2}{I_3}x_2x_3 - \frac{T_3}{2(1+\nu)I_2}x_2^2 \right) dx_2 + \left( -\frac{T_3}{I_2}x_2x_3 + \frac{T_2}{2(1+\nu)I_3}x_3^2 \right) dx_3 \quad (7.28)$$

$$C = S \int_S \phi dS + \int_{\Gamma} \phi (x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \quad (7.29)$$

$$+ \frac{T_2}{I_3} \int_S \left( -x_2^2x_3 + \frac{x_3^2}{2(1+\nu)} \right) dS + \frac{T_3}{I_2} \int_S \left( -x_3^2x_2 + \frac{x_2^2}{2(1+\nu)} \right) dS \quad (7.30)$$

### 7.2.2 Déplacements

On passe des contraintes aux déplacements par la loi de comportement. Le calcul des déplacements se fait de façon traditionnelle en calculant d'abord les rotations, puis les composantes du vecteur déplacement (voir le cours MMC en pages 46 et suivantes). Les rotations sont calculées à l'aide d'un tenseur  $\omega$ , partie antisymétrique du gradient de déplacement, dont les composantes  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{23}$  et  $\omega_{31}$  vérifient des équations différentielles du type :

$$\omega_{12,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{12,1} \quad \omega_{12,2} = \varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1} \quad \omega_{12,3} = \varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{32,1} \quad (7.31)$$

et permutation circulaire.

Les composantes du déplacement sont obtenues par des équations du type :

$$u_{1,1} = \varepsilon_{11} \quad u_{1,2} = \varepsilon_{12} + \omega_{12} \quad u_{1,3} = \varepsilon_{13} + \omega_{13} \quad (7.32)$$

et permutation circulaire.

On trouve [6] :

$$u_1 = \frac{N}{ES}x_1 - \left( \frac{T_2}{EI_3}x_2 + \frac{T_3}{EI_2}x_3 \right) \left( Lx_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) + \left( \frac{M_2}{EI_2}x_3 - \frac{M_3}{EI_3}x_2 \right) x_1 \quad (7.33)$$

$$+ \frac{T_2}{EI_3} \left( v \frac{x_2^3}{6} - (2+v) \frac{x_2x_3^2}{2} \right) + \frac{T_3}{EI_2} \left( v \frac{x_3^3}{6} - (2+v) \frac{x_3x_2^2}{2} \right) \quad (7.34)$$

$$+ \frac{1+v}{E} \Phi + \gamma x_2 - \beta x_3 + \alpha_0 \quad (7.35)$$

$$u_2 = -v \frac{N}{ES}x_3 + \left( \frac{T_2}{2EI_3}(x_2^2 - x_3^2) + \frac{T_3}{EI_2}x_2x_3 \right) v(L - x_1) \quad (7.36)$$

$$+ v \left( \frac{M_3}{2EI_3}(x_2^2 - x_3^2) - \frac{M_2}{EI_2}x_2x_3 \right) + \frac{1+v}{E} Ax_1x_3 \quad (7.37)$$

$$+ \left( \frac{M_3}{EI_3} + \frac{T_2}{EI_3} \left( L - \frac{x_1}{3} \right) \right) \frac{x_1^2}{2} - \gamma x_1 - \alpha x_3 + \beta_0 \quad (7.38)$$

$$u_3 = -v \frac{N}{ES}x_3 + \left( \frac{T_3}{2EI_2}(x_3^2 - x_2^2) + \frac{T_2}{EI_3}x_2x_3 \right) v(L - x_1) \quad (7.39)$$

$$+ v \left( \frac{M_2}{2EI_2}(x_3^2 - x_2^2) - \frac{M_3}{EI_3}x_2x_3 \right) - \frac{1+v}{E} Ax_1x_2 \quad (7.40)$$

$$+ \left( -\frac{M_2}{EI_2} + \frac{T_3}{EI_2} \left( L - \frac{x_1}{3} \right) \right) \frac{x_1^2}{2} + \beta x_1 - \alpha x_2 + \gamma_0 \quad (7.41)$$

$$(7.42)$$

### 7.2.3 Discussion

La solution est bien donc relativement complexe, cependant la solution est adaptée pour une large gamme de problèmes, en flexion et en torsion. C'est la présence de  $\Phi$  qui rend la résolution analytique délicate (voire impossible), et dépendante de la forme de la section. Dans le cas général, il y a un couplage entre les sollicitations, c'est-à-dire par exemple qu'un effort tranchant conduit à un déplacement en torsion. Les couplages disparaissent lorsque les sections présentent des axes de symétrie. On obtient un résultat analytique dans le cas où la section est circulaire. En torsion pure, on trouve tout simplement que  $\phi$  vaut  $(R^2 - x_2^2 - x_3^2)/2$ , et on vérifie que la section reste plane ; sous l'effet d'un effort tranchant  $T_2$  uniquement, on trouve :

$$\sigma_{12} = \frac{T_2}{I_3} \left( \frac{3+2v}{8(1+v)} (x_3^2 - x_2^2 + R^2) - \frac{x_3^2}{2(1+v)} \right) \quad \sigma_{13} = -\frac{T_2}{I_3} \left( \frac{1+2v}{4(1+v)} x_3x_2 \right) \quad (7.43)$$

On note que le vecteur contrainte est bien nul sur la surface latérale.

D'une façon générale, le déplacement de la ligne moyenne est obtenu pour  $x_2 = x_3 = 0$ . Les sections droites restent planes sous l'action d'un effort normal ou d'un moment. Dans le cas d'un effort tranchant, on a un gauchissement des sections droites, ainsi, sous l'action de  $T_2$ , en notant  $U$  le déplacement selon  $x_1$  d'un point courant de la ligne moyenne, on a :

$$u_1 - U = \frac{T_2}{EI_3} \left( v \frac{x_2^3}{6} - (2+v) \frac{x_2x_3^2}{2} + (1+v) \Phi'_{x_2, x_3} \right) \quad (7.44)$$

Ce gauchissement reste néanmoins relativement peu important, ce qui encouragera en fait à construire des solutions dans lesquelles on conserve les sections planes.

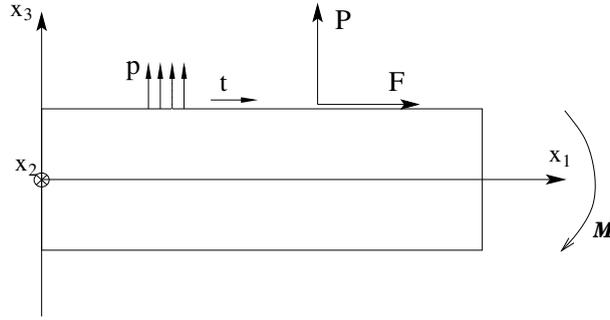


FIG. 7.3 – Géométrie et efforts extérieurs considérés

### 7.3 Approche par le principe des travaux virtuels

On va maintenant reprendre le problème en partant d'une hypothèse cinématique et en appliquant le principe des travaux virtuels. Pour plus de concision, on se résume à la résolution dans un plan. La figure 7.3 montre la géométrie et résume les efforts appliqués. La ligne moyenne est l'axe  $x_1$ , la poutre se déforme dans le plan  $x_1 - x_3$ , qui est plan principal d'inertie. Comme l'axe  $x_1$  joint est le lieu des centres d'inerties des sections, on a  $\int_S x_3 dS = 0$ .

#### 7.3.1 Rappel : le principe des travaux virtuels

La figure 7.4 rappelle les grandeurs fondamentales que l'on considère sur un milieu continu.

On introduit les définitions suivantes :

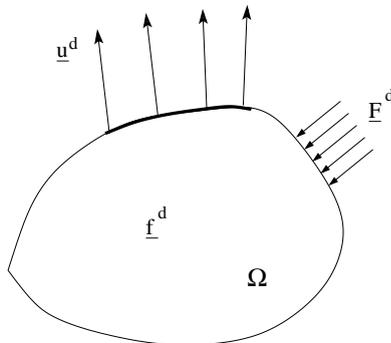
- Champ  $\underline{u}'$  CCA (cinématiquement admissible) :

$$\underline{u}' = \underline{u}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \quad \underline{\varepsilon}' = 0.5 (\underline{\text{grad}} \underline{u}' + \underline{\text{grad}}^T \underline{u}') \quad (7.45)$$

- Champ  $\underline{\sigma}^*$  CSA (statiquement admissible) :

$$\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_F \quad \underline{\text{div}} \underline{\sigma}^* + \underline{f}^d = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (7.46)$$

L'évaluation du travail développé par  $\underline{\sigma}^*$  dans  $\underline{u}'$  conduit à l'enchaînement suivant, pour tout  $\underline{\sigma}^*$  CSA et  $\underline{u}'$  CCA *non* forcément reliés par la loi de comportement :



- Déplacement imposé  $\underline{u}^d$  sur la surface  $\partial\Omega_u$
- Force répartie imposée  $\underline{F}^d$  sur la surface  $\partial\Omega_F$
- Force volumique imposée  $\underline{f}^d$  à l'intérieur de  $\Omega$

FIG. 7.4 – Notations dans le milieu continu

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* (u'_{i,j} + u'_{j,i}) d\Omega \quad (7.47)$$

$$= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u'_{i,j} d\Omega \quad (7.48)$$

$$= \int_{\Omega} \left( (\sigma_{ij}^* u'_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}^* u'_i \right) d\Omega \quad (7.49)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^* n_j u'_i dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u'_i d\Omega \quad (7.50)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega = \int_{\partial\Omega} F_i u'_i dS + \int_{\Omega} f_i^d u'_i d\Omega \quad (7.51)$$

$$(7.52)$$

Le principe des travaux virtuels s'énonce alors de la façon suivante :  $\forall u'_i$ , variation autour d'un état d'équilibre ( $u'_i = 0$  sur  $\partial\Omega_u$ )

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon'_{ij} d\Omega = -\delta W_{int} = \delta W_{ext} = \int_{\partial\Omega_F} F_i^d u'_i dS + \int_{\Omega} f_i^d u'_i d\Omega \quad (7.53)$$

Dans la suite, on va appliquer ce principe sur les quantités globales définies sur la poutre.

### 7.3.2 Cinématique de la poutre de Timoshenko

L'idée consiste, pour un solide élancé, à postuler une description simplifiée, globale, de la structure, au lieu de chercher une résolution exacte. Les solutions obtenues sont d'autant plus satisfaisantes que l'élançement est important.

Pour traiter le cas d'une poutre *plane*, on conserve dans la description géométrique deux translations et un angle. Il leur correspondra deux forces et un moment, conjugués (au sens du travail virtuel). Pour le cas d'une poutre mince, on négligerait le cisaillement (modèle  $N, M$ , Navier–Bernoulli).

Sollicitation	axe de la poutre	perp à l'axe	moment de flexion
«force»	$N$	$T$	$M$
«déplacement»	$U$	$V$	$\theta$

On calcule donc successivement les déplacements et les déformations, en suivant les notations illustrées par la figure 7.5

$$u_1 = U'(x_1) + \theta' x_3 \quad u_3 = V'(x_1) \quad (7.54)$$

$$\varepsilon'_{11} = U'_{,1} + \theta'_{,1} x_3 \quad 2\varepsilon'_{13} = V'_{,1} + \theta' \quad (7.55)$$

### 7.3.3 Traitement des équations

#### Travaux virtuels des efforts internes

$$\delta W_{int} = - \int_V (\varepsilon'_{11} \sigma_{11} + 2\varepsilon'_{13} \sigma_{13}) dV \quad (7.56)$$

$$= - \int_L \left( U'_{,1} \int_S \sigma_{11} dS + \theta'_{,1} \int_S x_3 \sigma_{11} dS + (V'_{,1} + \theta') \int_S \sigma_{13} dS \right) dx_1 \quad (7.57)$$

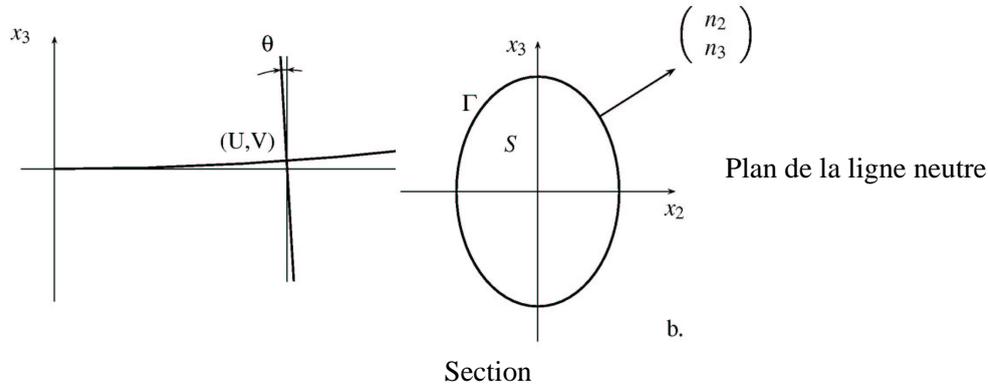


FIG. 7.5 – Schématisation de la poutre de Timoshenko

On introduit alors naturellement les quantités  $N$ ,  $T$ ,  $M$  conjuguées de  $U$ ,  $V$ ,  $\theta$  :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T = \int_S \sigma_{13} dS \quad M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad (7.58)$$

ce qui donne :

$$\delta W_{int} = - \int_L (NU'_{,1} + M\theta'_{,1} + T(V'_{,1} + \theta')) dx_1 \quad (7.59)$$

#### Traitement du travail des efforts intérieurs

A partir de :

$$\delta W_{int} = - \int_L (NU'_{,1} + M\theta'_{,1} + T(V'_{,1} + \theta')) dx_1 \quad (7.60)$$

On intègre classiquement par parties le travail des efforts intérieurs, par exemple :

$$\int_L NU'_{,1} dx_1 = \int_L ((NU')_{,1} - N_{,1}U') dx_1 = [NU']_0^L - \int_L N_{,1}U' dx_1 \quad (7.61)$$

d'où :

$$\delta W_{int} = - \int_L (-N_{,1}U' - M_{,1}\theta' - T_{,1}V' + T\theta') dx_1 \quad (7.62)$$

$$+ N(0)U'(0) - N(L)U'(L) + T(0)V'(0) - T(L)V'(L) \quad (7.63)$$

$$+ M(0)\theta'(0) - M(L)\theta'(L) \quad (7.64)$$

#### Travail des efforts extérieurs

On suppose que les forces concentrées sont appliquées aux extrémités ( $x_1 = 0$  et  $x_1 = L$ ), et on intègre entre 0 et  $L$  les efforts répartis. Les données sont :

- les forces normales  $F_0$  et  $F_L$ , tangentielles  $P_0$  et  $P_L$ ,
- les moments  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_L$ ,
- les efforts répartis sur la surface, représentés par des densités linéiques normales  $p$  et tangentielle  $t$  :

$$\delta W_{ext} = F_0U'(0) + F_LU'(L) + P_0V'(0) + P_LV'(L) + \mathcal{M}_0\theta'(0) + \mathcal{M}_L\theta'(L) \quad (7.65)$$

$$+ \int_L (pV' + tU') dx_1 \quad (7.66)$$

## 7.3.4 Caractérisation de l'équilibre

$$\delta W_{int} = - \int_L (-N_{,1}U' - M_{,1}\theta' - T_{,1}V' + T\theta') dx_1 \quad (7.67)$$

$$+ N(0)U'(0) - N(L)U'(L) + T(0)V'(0) - T(L)V'(L) \quad (7.68)$$

$$+ M(0)\theta'(0) - M(L)\theta'(L) \quad (7.69)$$

$$\delta W_{ext} = F_0U'(0) + F_LU'(L) + P_0V'(0) + P_LV'(L) + \mathcal{M}_0\theta'(0) + \mathcal{M}_L\theta'(L) \quad (7.70)$$

$$+ \int_L (pV' + tU') dx_1 \quad (7.71)$$

Comme l'égalité  $\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0$  est valable quel que soit le triplet  $(U', V', \theta')$ , on trouve, en identifiant terme à terme les expressions de  $\delta W_{int}$  et  $\delta W_{ext}$  :

$$N(0) = -F_0 \quad N(L) = F_L \quad T(0) = -P_0 \quad T(L) = P_L \quad (7.72)$$

$$M(0) = -\mathcal{M}_0 \quad M(L) = \mathcal{M}_L \quad (7.73)$$

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0 \quad (7.74)$$

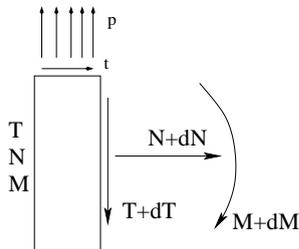
On pose :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T = \int_S \sigma_{13} dS \quad M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad (7.75)$$

On obtient :

$$\boxed{N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0} \quad (7.76)$$

La figure 7.6 illustre la signification physique des équations précédentes pour une «tranche» de la poutre.



$$dN = -t dx_1 \quad (7.77)$$

$$dT = -p dx_1 \quad (7.78)$$

$$dM = T dx_1 \quad (7.79)$$

FIG. 7.6 – Equilibre d'une «tranche» de poutre

### 7.3.5 Lois de comportement

Pour établir les lois de comportement, il faut trouver des relations raisonnables entre les déplacements définis sur la ligne moyenne et les efforts globaux. L'approche par le principe des travaux virtuels laisse le choix du champ de contraintes statiquement admissible que l'on considère. Dans la suite, on va considérer une théorie très simplifiée, qui n'aura pas le même degré de raffinement que la solution de Saint-Venant : on s'inspire en effet directement du champ cinématiquement admissible pour évaluer un champ de contrainte, qui sera, en fait obtenu au travers de la loi de comportement, et qui ne sera pas rigoureusement statiquement admissible. On traite successivement les cas de la force axiale, du moment et de l'effort tranchant.

#### Lois de comportement : force axiale

On évalue la composante 11 du tenseur de contrainte comme  $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})$ , et on néglige  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$ . Il vient :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS = \int_S E\varepsilon_{11} dS = \int_S E u_{1,1} dS = \int_S E U_{,1} dS + \int_S E (\theta x_3)_{,1} dS \quad (7.80)$$

Le deuxième terme du développement est nul, si bien que :

$$\boxed{N = U_{,1} E S} \quad (7.81)$$

#### Lois de comportement : moment

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS = \int_S x_3 E \varepsilon_{11} dS = \int_S x_3 U_{,1} dS + \int_S x_3 (\theta x_3)_{,1} dS \quad (7.82)$$

Le premier terme du développement est nul, il vient :

$$M = \theta_{,1} \int_S x_3^2 dS = \theta_{,1} I \quad (7.83)$$

avec  $I = \int_S x_3^2 dS$ , moment quadratique par rapport à  $x_2$ , si bien que :

$$\boxed{M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS = EI \theta_{,1}} \quad (7.84)$$

Pour une section rectangulaire, de hauteur  $2h$  et de largeur  $b$ ,  $I = \frac{2bh^3}{3}$

#### Lois de comportement : cisaillement

$$T = \int_S \sigma_{13} = \int_S 2\mu \varepsilon_{13} dS = \int_S \mu (u_{1,3} + u_{3,1}) dS = \int_S \mu (\theta + V_{,1}) dS \quad (7.85)$$

si bien que :

$$\boxed{T = \mu S (\theta + V_{,1})} \quad (7.86)$$

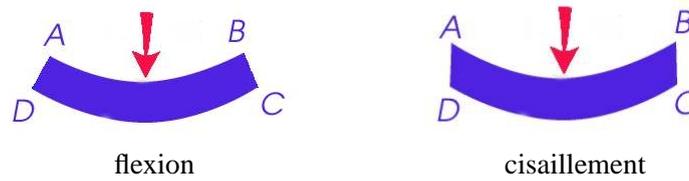


FIG. 7.7 – Forme de la déformée de la ligne moyenne

### Lois de comportement

Les relations suivantes constituent les lois de comportement globales de la structure.

$$\boxed{N = ESU_{,1} \quad T = \mu S(\theta + V_{,1}) \quad M = EI\theta_{,1}} \quad (7.87)$$

$$V_{,1} = -\theta + T/\mu S \quad (7.88)$$

$$\theta_{,1} = M/EI \quad (7.89)$$

$$M_{,1} - T = 0 \quad (7.90)$$

$$T_{,1} + p = 0 \quad (7.91)$$

### 7.3.6 Remarques

#### Déformées

La forme de la déformée de la ligne moyenne (fig. 7.7) dépend du type de chargement :

- Le terme de cisaillement, produit une évolution linéaire de la flèche.
- La flèche est obtenue comme solution d'un problème d'ordre 4 par rapport aux efforts appliqués :

$$V_{,11} = -\theta_{,1} = -\frac{M}{EI} \quad V_{,111} = -\frac{M_{,1}}{EI} = \frac{T}{EI} \quad V_{,1111} = -\frac{p}{EI} \quad (7.92)$$

- En présence d'un moment appliquée, la forme de la ligne moyenne sera circulaire, elle sera de degré 3 en cas d'effort concentré, et de degré 4 en cas d'effort réparti tout au long de la poutre.

#### Méthode de résolution

Le déplacement horizontal  $s$  s'obtient en intégrant la relation :

$$\boxed{U_{,1} = N/ES} \quad (7.93)$$

La rotation relative entre les sections  $s$  s'obtient en intégrant la relation :

$$\boxed{\theta_{,1} = M/EI} \quad (7.94)$$

La flèche est le résultat de la somme de deux termes, l'un provenant de la rotation elle même, et l'autre de l'effort tranchant  $T$  :

$$\boxed{V_{,1} = -\theta + T/\mu S} \quad (7.95)$$

### Expression des contraintes locales

La connaissance de  $U$ ,  $V$  et  $\theta$  permet de remonter aux champs de déformation et de contrainte locaux. ( $\simeq E\varepsilon_{11} = Eu_{1,1}$ ) est la somme de deux termes, dus à l'élongation et à la flexion :

$$\sigma_{11} \cong N/S + Mx_3/I \quad (7.96)$$

Si le cisaillement est négligeable

$$\theta = -V_{,1} \quad M = -EIV_{,11} \quad (7.97)$$

### Théorie de Navier–Bernoulli

Dans la théorie qui a été développée jusque là, une section plane reste plane, mais pas perpendiculaire à l'axe neutre. Si les cisaillements sont faibles (effet du moment dominant), il est raisonnable de rajouter cette dernière hypothèse. On retrouve alors la théorie dite classiquement de Navier-Bernoulli. Dans ce cas, il faut assurer  $\varepsilon_{13} = 0$ , ce qui entraîne la condition suivante sur l'hypothèse cinématique :

$$2\varepsilon_{13} = V_{,1} + \theta = 0 \quad (7.98)$$

La conséquence immédiate est que  $T$  est nul.

### Prise en compte du gauchissement de section

Comme on peut le constater en se référant à la solution de Saint-Venant, la méthode présentée ici n'est qu'approchée, surtout dans le cas où le cisaillement est important. Ainsi, il est facile de vérifier par exemple que le résultat en contrainte  $\sigma_{13}$  ne vérifie pas les conditions aux limites, puisque,  $\sigma_{13}$  étant uniforme, le cisaillement calculé n'est pas nul en surface. Par ailleurs, les équations d'équilibre non utilisées ne sont pas vérifiées. L'approximation se justifie néanmoins en raison des ordres de grandeur respectifs de chacune des composantes de contrainte mises en jeu. Il est relativement simple d'apporter une première amélioration en considérant que la section  $S$  peut devenir gauche. Cela conduit à postuler un champ de déplacement tridimensionnel de la forme, où  $\eta_i$  désigne le "gauchissement longitudinal" :

$$\begin{aligned} u_1(X) &= u(s) + \theta(s)x_3 + \eta_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(X) &= \eta_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(X) &= v(s) + \eta_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

La seule modification à apporter aux équations consiste à introduire un coefficient  $k$ , dit *de section réduite* dans l'expression du cisaillement, qui devient :

$$T = \mu(S/k)(\theta + V_{,1}) \quad (7.99)$$

Ce coefficient vaut 6/5 pour le cas d'une poutre de section rectangulaire.

## 7.4 Poutre sandwich

On continue ici à utiliser une approche relativement grossière, qui consiste à évaluer le champ de contrainte à partir du champ de déplacement. On suppose donc que, en présence de plusieurs couches, on continue à avoir la même cinématique. Contrairement au cas du matériau homogène, il y a maintenant une distribution spatiale des propriétés élastiques, qui dépendent de la cote  $x_3$  dans la section. Ceci interdit de sortir les modules des intégrales, et conduit donc à des moyennes différentes, prenant en compte à la fois la géométrie et le comportement.

### 7.4.1 Evaluation des efforts intérieurs

#### Effort normal

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad (7.100)$$

La contrainte  $\sigma_{11}$  est *discontinue*, et :  $\sigma_{11}(x_3) = E(x_3)\epsilon_{11}$

$$\sigma_{11} = E(x_3)(U_{1,1} + \theta_{1,1}x_3) \quad (7.101)$$

$$N = U_{1,1} \int_S E(x_3) dS + \theta_{1,1} \int_S E(x_3)x_3 dS \quad (7.102)$$

Si  $E(x_3)$  est une fonction paire en  $x_3$ , et indépendante de  $x_2$  ; la seconde intégrale est nulle. On a :

$$N = \langle ES \rangle U_{1,1} \quad \text{avec} \quad \langle ES \rangle = \int_S E(x_3) dS \quad (7.103)$$

#### Poutre sandwich : moment

$$M = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \quad (7.104)$$

$$\sigma_{11} = E(x_3)(U_{1,1} + \theta_{1,1}x_3) \quad (7.105)$$

$$M = U_{1,1} \int_S x_3 E(x_3) dS + \theta_{1,1} \int_S E(x_3)x_3^2 dS \quad (7.106)$$

Si  $E(x_3)$  est une fonction paire en  $x_3$ , et indépendante de  $x_2$  ; la première intégrale est nulle. On a :

$$M = \langle EI \rangle \theta_{1,1} \quad \text{avec} \quad \langle EI \rangle = \int_S E(x_3)x_3^2 dS \quad (7.107)$$

#### Poutre sandwich : cisaillement

On ne peut pas comme dans les deux cas précédents accepter d'évaluer directement les composantes de contrainte à partir du comportement. On commet en effet une grossière erreur en ne prenant pas en compte la continuité de la composante  $\sigma_{13}$  à l'interface. La valeur de  $\sigma_{13}$  est limitée par le faible module de la mousse à l'intérieur de la poutre, et elle doit être nulle en surface externe, de normale  $x_3$ , qui est libre. Une pratique courante admet tout simplement de négliger la contribution des plaques métalliques externes ; on se limite à l'intégrale sur le cœur de la poutre, soit, en supposant que celui-ci est compris entre  $\pm h$  :

$$T = \int_S \sigma_{13} dS \approx \int_0^b \int_{-h}^{+h} \sigma_{13} dx_2 dx_3 = (V_{1,1} + \theta) \int_{-h}^{+h} 2b\mu(x_3) dx_3 \quad (7.108)$$

$$T \approx \langle \mu S \rangle_{-h}^{+h} (V_{1,1} + \theta) \quad (7.109)$$

### 7.4.2 Forme générale

Si la distribution des modules n'est pas paire en  $x_3$ , il y a un couplage entre traction et flexion. On doit écrire :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_S E_i dS & \int_S E_i x_3 dS & 0 \\ \int_S E_i x_3 dS & \int_S E_i x_3^2 dS & 0 \\ 0 & 0 & \int_S \mu_i dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{,1} \\ \theta_{,1} \\ V_{,1} + \theta \end{pmatrix} \quad (7.110)$$

On a introduit les quantités suivantes :

- ligne moyenne définie par :  $\int_S E_i x_3 dS = 0$
- rigidité équivalente de traction :  $\langle ES \rangle = \int_S E_i dS$
- rigidité équivalente de flexion :  $\langle EI \rangle = \int_S E_i x_3^2 dS$
- rigidité équivalente de cisaillement :  $\langle \mu S \rangle = \int_S \mu_i dS$

On a donc établi des lois de comportement simplifiées :

$$\boxed{N = \langle ES \rangle U_{,1} \quad T = \langle \mu S \rangle (\theta + V_{,1}) \quad M = \langle EI \rangle \theta_{,1}} \quad (7.111)$$

Tout ceci permet de retrouver les contraintes  $\sigma_{11}$  locales :

$$\boxed{\sigma_{11} \simeq E_i \left( \frac{N}{\langle ES \rangle} + \frac{M x_3}{\langle EI \rangle} \right)} \quad (7.112)$$

La composante  $\sigma_{11}$  présente donc à l'interface une discontinuité qui est dans la rapport des modules d'Young en direction 1. Ceci explique que ce sont les peaux qui assurent la résistance au moment de flexion. Si la poutre est suffisamment épaisse, et la peau mince, les peaux sont pratiquement en traction et en compression simple. Comme l'assemblage a permis de les éloigner de la ligne moyenne, la rigidité sera donc nettement plus grande.

Pour une bonne conception de l'assemblage, il faut vérifier que les contraintes de cisaillement qui se développent aux interfaces restent compatibles avec la résistance des joints de colle entre les différents matériaux.

## Résumé

La théorie de Timoshenko pour les poutres suppose qu'une section plane reste plane, mais pas forcément perpendiculaire à la ligne moyenne. La cinématique est :

$$\begin{aligned} u_1 &= U'(x_1) + \theta' x_3 & u_3 &= V'(x_1) \\ \varepsilon'_{11} &= U'_{,1} + \theta'_{,1} x_3 & 2\varepsilon'_{13} &= V'_{,1} + \theta' \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre global sont :

$$N_{,1} + t = 0 \quad T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0$$

Les équations de comportement global sont :

$$N = ESU_{,1} \quad T = \mu S(\theta + V_{,1}) \quad M = EI\theta_{,1}$$

Schéma de résolution :

$$T_{,1} + p = 0 \quad M_{,1} - T = 0 \quad \theta_{,1} = M/EI \quad V_{,1} = -\theta + T/\mu S$$

Dans le cas de poutre sandwich symétrique, il n'y a pas de couplage traction-flexion, et on peut appliquer les mêmes équations, à condition d'effectuer des moyennes pondérées par le module de Young sur la section complète, et, dans le cas du cisaillement, en première approximation, sur la section de mousse.

## Chapitre 8

# Structures et matériaux composites

Au sens strict du terme, il faut parler de matériau ou de structure composite dès lors qu'une pièce est constituée de plusieurs types de constituants. Le but recherché dans ces associations est de combiner les propriétés de plusieurs classes de matériau en vue d'obtenir des propriétés moyennes améliorées. Les métaux sont en général *tenaces* (ils présentent une bonne résistance à la propagation brutale de fissures) et *ductiles* (ils présentent des déformations importantes avant de se rompre), mais de *masse volumique élevée*. Les matières plastiques sont *légères* mais présentent de faibles propriétés mécaniques. Les céramiques sont *rigides et résistantes*, mais *fragiles*. L'art de l'ingénieur dans la conception et l'utilisation de matériaux ou de structures composites réside dans le fait de placer le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition spatiale).

Les composites sont donc intrinsèquement des matériaux hétérogènes. Pris sous cette acception, le terme "composite" recouvre pratiquement l'ensemble des matériaux. Ainsi les matériaux métalliques eux-mêmes sont des alliages, composés de plusieurs phases, de microstructure et/ou de composition distinctes : il suffit de changer d'échelle pour passer de l'image d'un milieu homogène à celle d'un milieu hétérogène. Le type d'approche à utiliser se décidera d'une part en fonction du rapport entre les dimensions de la structure à modéliser et une dimension caractéristique du milieu à représenter, d'autre part en fonction du but poursuivi (schématisation globale d'un système ou étude locale).

Ceci conduit à utiliser plutôt le terme de *structure composite* lorsqu'il est naturel de modéliser séparément chaque matériau dans la pièce à traiter, par exemple pour :

- le béton armé, ou encore le béton pré- ou post-contraint, pour lesquels béton et acier sont pris en compte chacun de leur côté, avec en première approximation un modèle où le béton apporte une résistance à la compression, et l'acier une résistance à la traction ;
- les plaques *sandwich* étudiées au chapitre précédent ; ici encore, la dimension de l'«élément de volume représentatif» est choisie plus petite que celle de la plaque, si bien que la variation des contraintes et des déformations à l'intérieur d'une telle plaque en flexion est modélisée ;
- les pneumatiques, qui sont calculés comme de véritables structures, assemblages de caoutchouc et de câbles métalliques en acier à très forte limite d'élasticité.

Cependant, dans un système mécanique complexe, la représentation individuelle précise de chaque élément n'est plus possible, si bien qu'il faut se résoudre à ne retenir qu'un comportement moyen. La modélisation effectuée comporte alors une opération d'*homogénéisation*, qui fournit par exemple des rigidités équivalentes dépendant des propriétés élémentaires de chaque matériau et de leur géométrie.

Le terme de *matériau composite* est donc réservé aux cas où la taille caractéristique de la microstructure est faible devant celle de la pièce, comme pour :

- les matériaux composites à matrice continue renforcée par des fibres ou des particules ; les matrices peuvent être minérales, résineuses ou métalliques, les fibres sont en verre, kevlar, carbone, bore, etc..., et leur diamètre typique est de l'ordre du centième de millimètre : matrices époxydes renforcés de fibre de verre ou de fibre de carbone, verre-polyester, aluminium-carbure de silicium, cobalt-carbure de tungstène, le béton (graviers dans du ciment), le macadam (graviers dans un

polymère, le bitume),

- les mousses et les matériaux cellulaires, composites particuliers composés d'un matériau et... de trous ; les cellules peuvent être ouverte (éponges) ou fermées (ceintures de sauvetage) ; de nombreux matériaux naturels sont cellulaires, le bois, le liège, le corail par exemple.

Pour cette dernière catégorie de matériau, le cheminement inverse peut être repris, et, dans le but de caractériser précisément les propriétés mécaniques, il est possible de considérer ce qui était précédemment un élément de volume représentatif sur lequel était défini un comportement homogénéisé comme une structure, de dimensions millimétriques ou centimétriques, pour avoir accès aux champs de contraintes et de déformation de l'échelon inférieur. L'étude porte alors sur une *cellule élémentaire*, comportant une fibre et la matrice environnante.

Cette partie s'intéresse dans un premier temps aux matériaux eux-mêmes, et aux modèles élémentaires que leurs propriétés suscitent. On trouvera des compléments à cette approche dans [7]. Pour une approche plus axée sur les aspects mécanique, on consultera [1], ou un ouvrage classique [24]. La fin du chapitre donne un bref aperçu de la théorie des stratifiés pour les plaques chargées dans leur plan, et de la théorie des plaques de Love–Kirchhoff, pour les plaques en traction et flexion.

## 8.1 Les composants élémentaires des matériaux composites

### 8.1.1 Renforts

Les composites artificiels sont souvent renforcés soit par des fibres, soit par des composants fabriqués à base de fibres (torons, assemblage de fibres tordues ensemble ; tissus ; mats, ou nappes). Chacune d'entre elles s'impose dans une application particulière en raison de ses propriétés spécifiques et de son prix. Le tableau 8.1 résume les principales caractéristiques mécaniques.

1. Les fibres de verre sont les plus anciennes (1940) et les moins chères (environ 1 euro/kg) des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage. Elles sont fabriquées par extrusion du verre au travers d'une filière percée de trous de 1 à 2mm de diamètre, puis étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15mm, enduites et bobinées. Il existe différentes variétés (E,R,S) selon la proportion de chaque composant ( $SiO_2$ ,  $Al_2O_3$ ,  $B_2O_3$ ,  $CaO$ ,  $MgO$ ), les meilleures propriétés étant obtenues pour les plus fortes proportions de silice (verre S, 65%).
2. Les fibres de carbone doivent leurs propriétés à la très forte anisotropie des cristallites de graphite qui les composent. Leur prix décroît régulièrement, il est de l'ordre de 10 euros/kg. Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère (par exemple polyacrylonitrile) préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 à 200°C), puis pyrolyse (1500-2500°C). Selon la température et le temps de cuisson, les fibres présentent une "haute résistance" (HR) ou un "haut module" (HM).
3. Les fibres de polymère les plus connues sont des fibres de polyamides aromatiques, connues sous la marque commerciale de "Kevlar". De prix élevé (20 euros/kg), elles servent essentiellement à fabriquer des câbles.
4. Les fibres métalliques ou céramiques sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (de l'ordre de 1000 euros/kg). Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100°C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15mm de diamètre. Le diamètre résultant est de 100 à 200µm pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC). Les derniers développements concernent la production de trichites, ("whiskers") qui sont des monocristaux filamenteux obtenus par décomposition d'un sel métallique en ambiance réductrice. Leur longueur est de quelques millimètres, pour un diamètre d'environ 1µm. Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.
5. Les microbilles pleines ou creuses peuvent être produites en verre, carbone ou polystyrène. Elles ont des diamètres compris entre 10 et 150µm ; le taux volumique de charge peut atteindre 50%.

Matériau	Module d'Young (GPa)	Résistance en traction (MPa)	Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	Température d'utilisation max (°C)	Allongement à rupture (%)
Verre R	80	2500	2500	650	3
Kevlar 49	130	3600	1450	200	2
Carbone HM	400	2000	1900	2500	
Bore	400	3500	2650	700	0,8
SiC (fibre)	480	2300	3200	900	0,5
SiC (trichite)	840	21000	3200	1600	2,5

TAB. 8.1 – Propriétés de quelques éléments de renfort

Le composite résultant a des propriétés mécaniques isotropes.

6. Les principaux renforts minéraux sont le mica et l'amiante. L'un et l'autre sont des composés naturels dont les propriétés ne permettent pas d'atteindre les résistances obtenues avec les fibres. Le mica se présente sous forme de paillettes, dont l'intérêt est d'offrir un renforcement bidirectionnel. L'amiante (mélange d'oxydes de magnésium, de silice et d'eau, comportant également du sodium, du fer,...) se présente sous forme de fibrilles de 20nm, dont il est possible de détacher des fibres de plusieurs centimètres. Son caractère cancérigène a maintenant conduit à un abandon complet.

### 8.1.2 Matrices

La matrice incorpore les fibres ou les éléments de renfort, auxquels elle doit adhérer suffisamment bien pour que le transfert de charge soit optimal.

1. Les matrices organiques sont faites de matière plastiques. Il convient de distinguer les matrices thermoplastiques, à chaîne linéaire, très répandues, et les polymères thermodurcissables, ou résines, aux propriétés mécaniques plus élevées. Dans cette dernière catégorie se rangent les résines de polyester, les résines époxydes, qui peuvent être utilisées jusque vers 200°C, les résines phénoliques ou les résines polyimides, qui supportent des températures de 400°C.
2. Les matrices carbonées sont fabriquées par décomposition d'une matière organique à haute température. La matière peut être un liquide (imprégnation en phase liquide), ou un hydrocarbure gazeux (décomposition chimique en phase vapeur). Le second procédé est plus rapide que le premier, qui peut durer plusieurs mois pour obtention d'une densification suffisante, mais moins reproductible. Le carbone se dépose en grains sur les fibres, assurant leur bonne liaison. Il est possible par exemple d'obtenir un composite carbone-carbone dont la densité est égale à celle du carbone massif.
3. Les matrices métalliques présentent plusieurs avantages, comme une bonne ductilité, une bonne résistance à certains solvants, une meilleure tenue en température que les résines, une meilleure usinabilité. A l'inverse, elles sont plus difficiles à mettre en oeuvre, de densité plus élevée, et des problèmes peuvent apparaître aux interfaces fibres-matrice du fait de la réactivité des matériaux. Comme pour le cas des matrices carbonées, la fabrication du composite peut s'effectuer par imprégnation en phase liquide, décomposition chimique en phase vapeur, mais encore par co-extrusion ou co-laminage.
4. Les matrices céramiques sont particulièrement intéressantes en raison de leur caractère réfractaire. Elles sont utilisées dans des pièces qui doivent subir sans dommage de très hautes températures (tuiles de protection thermique, brûleurs). Le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction, est partiellement masqué par l'insertion de fibres dans la matrice. Les techniques de fabrication les plus courantes sont l'imprégnation en phase liquide (SiC-SiC par exemple) ou le dépôt plasma (par exemple dépôt de silicium puis nitruration à l'aide

d'un traitement sous azote à 1450°C, qui produit une augmentation de volume et favorise la densification).

## 8.2 Rappel : milieux élastiques anisotropes

### 8.2.1 Notation de Voigt pour les relations de comportement

L'expression des relations de l'élasticité,  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$  porte sur des tenseurs du second et du quatrième ordre symétriques. Ils peuvent être respectivement représentés par des vecteurs de dimension 6 (pour  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ), et par une matrice carrée de dimension 6 (pour  $\underline{\underline{C}}$ ). Les relations de symétrie  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ , et  $C_{ijkl} = C_{klij}$  s'expriment alors par le fait que la matrice (6 x 6) est symétrique. La notation de Voigt, à deux indices I et J variant de 1 à 6, met respectivement en correspondance les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 de I et J avec les doublets (1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,1), (1,2). Dans le cas le plus général, il y a 21 coefficients élastiques. En notant par  $\gamma$  le "cisaillement de l'ingénieur", tel que  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ , pour  $i$  différent de  $j$ , en désignant par  $C_{IJ}$  les composantes de la matrice représentant le tenseur  $\underline{\underline{C}}$ , par  $S_{IJ}$  celles de son inverse, et en posant (i)  $C_{IJ} = C_{ijkl}$ ; (ii)  $S_{IJ} = S_{ijkl}$ , dans le cas où I et J sont inférieurs ou égaux à 3, (iii)  $S_{IJ} = 2S_{ijkl}$ , si l'un des indices I ou J est inférieur ou égal à 3, l'autre supérieur, (iv)  $S_{IJ} = 4S_{ijkl}$ , si I et J sont supérieurs à 3, on obtient le vecteur contenant les 6 composantes de déformation en réalisant le produit de la matrice  $C$  par le vecteur contenant les 6 composantes de contrainte, et l'opération inverse étant réalisée à partir de la matrice  $S$ .

### 8.2.2 Respect des symétries matérielles

Si le matériau est invariant par la transformation définie par la matrice  $P$ , le changement de repère défini par  $P$  ne modifie pas la loi de comportement, qui doit toujours s'écrire à l'aide de la même représentation du tenseur  $\underline{\underline{C}}$ , soit :  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ , mais aussi  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ , avec  $\underline{\underline{\sigma}} = P^{-1} \underline{\underline{\sigma}} P$ , et  $\underline{\underline{\varepsilon}} = P^{-1} \underline{\underline{\varepsilon}} P$ . Il s'ensuit que  $\underline{\underline{C}} = P^{-1} P^{-1} \underline{\underline{C}} P P$ , soit sous forme indicielle :  $C_{ijkl} = P_{im} P_{jn} P_{kp} P_{lq} C_{mnpq}$ . L'application de cette dernière formule à des transformations particulières permet de constater dans chaque cas quel est le nombre de coefficients réellement indépendants.

1. Symétrie par rapport à un plan de coordonnées  $x_3 = 0$  : La matrice ne comporte que trois termes sur la diagonale, (1,1,-1). Les composantes  $C_{ijkl}$  qui ont un nombre impair d'indices 3 sont donc nulles, il n'y a plus que 13 coefficients indépendants :

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{64} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{65} = 0 \quad (8.1)$$

2. Symétrie par rapport à deux plans orthogonaux  $x_1 = 0$  et  $x_3 = 0$  : Il faut annuler en plus les coefficients qui possèdent un nombre impair d'indices 1, il n'y a plus donc que 9 coefficients indépendants :

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0 \quad (8.2)$$

La matrice se met alors sous la forme :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Il existe également une *formulation technique*, qui fait apparaître des modules d'élasticité et des coefficients de Poisson. Il faut prendre garde à cette formulation, qui introduit plus de 9 coefficients, ceux-ci étant bien entendu liés par les relations :

$$\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2 \quad , \quad \nu_{23}/E_2 = \nu_{32}/E_3 \quad , \quad \nu_{31}/E_3 = \nu_{13}/E_1 \quad (8.4)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_2 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_3 & -\nu_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/E_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

3. Équivalence de deux axes de symétrie (par exemple 1 et 2) : Cette hypothèse introduit 3 relations supplémentaires, il n'y a plus que 6 coefficients indépendants, il s'agit d'une symétrie quadratique (cas des cristaux tétraonaux) :

$$C_{11} = C_{22} \quad C_{13} = C_{23} \quad C_{44} = C_{55} \quad (8.6)$$

4. Équivalence des trois axes de symétrie : Cela introduit encore trois relations,  $C_{11} = C_{22} \quad C_{13} = C_{23} \quad C_{44} = C_{55}$ , c'est le cas de la symétrie cubique, il ne reste que 3 coefficients indépendants :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

5. «Isotropie» transverse : Il doit y avoir invariance par une rotation quelconque autour d'un axe particulier, par exemple  $x_3$ . Ceci implique que le matériau présente au moins la symétrie quadratique. D'autre part, si  $\alpha$  est l'angle de cette rotation, la matrice  $P$  est de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

Son application au terme  $C_{66} = C_{1212}$  conduit à  $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ . Il y a 5 coefficients indépendants. C'est le cas du système hexagonal pour les cristaux, et des structures en nid d'abeille.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{33} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

La formulation de l'ingénieur pour ce type de symétrie est la suivante, avec  $\nu_{LT}/E_L = \nu_{TL}/E_T$  et

$$\nu_{LZ}/E_L = \nu_{ZL}/E_Z :$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{ZZ} \\ \gamma_{TZ} \\ \gamma_{ZL} \\ \gamma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_L & -\nu_{LT}/E_L & -\nu_{LZ}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{TL}/E_T & 1/E_L & -\nu_{LZ}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{ZL}/E_Z & -\nu_{ZL}/E_Z & 1/E_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{LZ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{LZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_{LT})/E_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{TZ} \\ \sigma_{ZL} \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

6. Cas d'une plaque : Dans le cas d'une plaque, il suffit de ne conserver que les termes correspondants à  $\sigma_{LL}$ ,  $\sigma_{TT}$  et  $\sigma_{LT}$  dans les expressions ci-dessus.
7. Isotropie : C'est la résultat d'une symétrie cubique et d'une isotropie transverse par rapport à l'un des axes du cube. Le terme  $C_{44}$  de la symétrie cubique se calcule donc exactement en fonction de  $C_{11}$  et de  $C_{12}$  :  $C_{44} = (C_{11} - C_{12})/2$ . Il ne subsiste donc que 2 coefficients indépendants. Il est immédiat d'identifier  $C_{11}$  à  $(\lambda + 2\mu)$ , et  $C_{12}$  à  $\lambda$ .

## 8.3 Composites unidirectionnels à fibres longues

### 8.3.1 Loi de mélange

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques), il est raisonnable d'imaginer que l'approximation *en parallèle* dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée. Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module de Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens travers, les phases seront *en série*, dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme. En désignant par des indices m et f la matrice et la fibre, il vient alors :

$$E_L \text{ en sens long : } \quad E_L = c_m E_m + c_f E_f \quad (8.11)$$

$$E_T \text{ en sens travers : } \quad 1/E_T = c_m/E_m + c_f/E_f \quad (8.12)$$

Lors d'une traction en sens long, les déformations latérales de chaque phase se combinent :

$$\varepsilon_T = c_m \varepsilon_{T_m} + c_f \varepsilon_{T_f} \quad (8.13)$$

Chacune des déformations latérales  $\varepsilon_{T_m}$  et  $\varepsilon_{T_f}$  s'expriment en fonction de la déformation longitudinale  $\varepsilon_L$ , qui est supposée être la même pour les deux phases,  $\varepsilon_{T_m} = \nu_{LT_m} \varepsilon_L$ , et  $\varepsilon_{T_f} = \nu_{LT_f} \varepsilon_L$ .

Le coefficient de Poisson équivalent est donc obtenu par une moyenne directe.

$$\nu_{LT} = c_m \nu_m + c_f \nu_f \quad (8.14)$$

Pour le terme de cisaillement transverse, l'hypothèse simple la plus réaliste consiste à considérer que la contrainte de cisaillement sera conservée. La moyenne s'applique donc sur les inverses des modules :

$$1/\mu_{LT} = c_m/\mu_m + c_f/\mu_f \quad (8.15)$$

### 8.3.2 Constantes élastiques dans un repère quelconque

Les constantes  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$  et  $\mu_{LT}$  permettent de caractériser le comportement élastique dans le repère (sens long-sens travers). Le problème qui se pose est alors de connaître les propriétés dans un repère quelconque. Ce cas est traité en exercice.

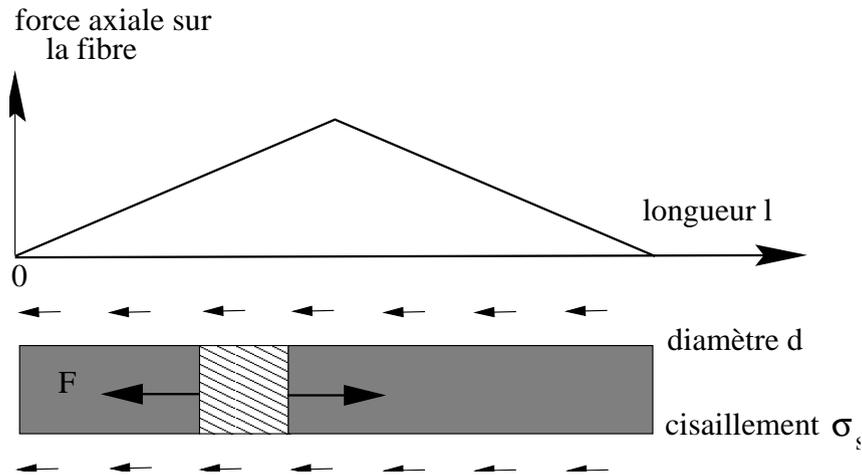


FIG. 8.1 – Reprise de charge le long d'une fibre

### 8.3.3 «Fonctionnement» du composite

Un grand nombre de composites unidirectionnels sont constitués par des fibres fragiles dans une matrice plus ductile. La contrainte maximale qui peut être atteinte en traction sur ce matériau est donc obtenue juste avant la rupture des fibres, lorsque la contrainte dans celles-ci est de l'ordre de leur contrainte de rupture,  $\sigma_{R_f}$ , et que la matrice est également soumise à une contrainte qui provoque des déformations permanentes,  $\sigma_Y$  :

$$\sigma_{MAX} = (1 - c_f)\sigma_Y + c_f\sigma_{R_f} \quad (8.16)$$

Le fait d'avoir rajouté des fibres est donc bénéfique si cette contrainte est supérieure à la contrainte de la matrice seule, supposée non renforcée par les fibres, une fois que toutes celles-ci sont rompues, qui s'exprime en fonction de la contrainte à rupture de la matrice  $\sigma_{R_m}$  :

$$\sigma_R = (1 - c_f)\sigma_{R_m} \quad (8.17)$$

Le fait que  $\sigma_{MAX}$  soit plus grand que  $\sigma_R$  produit une condition sur  $c_f$ ,

$$c_f > (\sigma_{R_m} - \sigma_Y) / (\sigma_{R_f} + \sigma_{R_m} - \sigma_Y) \quad (8.18)$$

ce qui montre qu'il existe une *fraction critique de renfort* en dessous de laquelle l'ajout de fibres détériore le comportement au lieu de l'améliorer.

Le même type de raisonnement simple suggère l'existence d'une *longueur optimale de fibre*. Il consiste à considérer que, si elle joue son rôle de façon optimum, il se transfère à la fibre une force  $\sigma_s \pi d dx$  sur une longueur élémentaire  $dx$  le long de son axe ( $\sigma_s$  est la contrainte de cisaillement à l'interface fibre-matrice,  $d$  le diamètre de la fibre (voir figure 8.1)). La force sur une section de la fibre passe donc de 0 à l'extrémité à une valeur de  $\sigma_s \pi x d$  à une distance  $x$  de celle-ci.

La longueur optimale est obtenue lorsque la force au milieu de la fibre correspond à la contrainte de rupture de la fibre, ce qui correspond à une longueur  $l$  telle que :  $\sigma_s \pi d l / 2 = (\pi d^2 / 4) \sigma_{R_f}$ , soit :

$$l = d \sigma_{R_f} / 2 \sigma_s \quad (8.19)$$

Au delà, la fibre se rompt. Ceci explique également pourquoi les résultats obtenus avec des fibres courtes sont en général du même niveau que ceux produits par des fibres longues.

Matériau	$E_L$ (GPa)	$E_T$ (GPa)	$2\mu_{LT}$ (GPa)	$\sigma_{RL}$ (MPa)	$\sigma_{RT}$ (MPa)
Verre	45	12	4,5	1250	35
Kevlar 49	85	5,6	2,1	1410	28
Carbone HM	134	7	4,2	1270	42
Bore-époxy	210	12		1400	80
Bore-alu	220	140	7,5	1400	120

TAB. 8.2 – Propriétés de quelques plis de fibres-résine époxyde (avec 60% de fibre), bore-époxyde et bore-aluminium ;  $E_L$  = module d'Young sens long,  $E_T$  = module d'Young sens travers,  $\mu_{LT}$  = module de cisaillement,  $\sigma_{RL}$  = contrainte à rupture sens long,  $\sigma_{RT}$  = contrainte à rupture sens travers.

### 8.3.4 Quelques ordres de grandeur

Le tableau 8.2 fournit des valeurs des modules et des contraintes de rupture en directions longitudinale et transverse pour plusieurs sortes de plis. La très forte anisotropie rend le pli très vulnérable seul, et explique qu'il faille avoir recours au tissage ou à la superposition de plis pour disposer de matériaux utilisables par l'ingénieur.

## 8.4 Plaques stratifiées

### 8.4.1 Tissus et mats

Le pli tissé est obtenu en disposant des fibres suivant deux directions perpendiculaires. Si les fils de trame couvrent un fil de chaîne avant de passer sous le suivant, il s'agit de toile ou taffetas, si plusieurs files de chaîne sont couverts, il s'agit de satin. Une première approximation consiste à traiter le tissu comme deux couches d'unidirectionnel superposées, ayant les mêmes déplacements. Un tissu est équilibré s'il y a le même nombre de fils dans chaque direction, et qu'ils sont de même nature.

Les mats sont des renforts bidirectionnels à fibres coupées (5 à 10 cm). Ils sont isotropes dans leur plan. Il existe également des tissages tridimensionnels (3D), dans lesquels plusieurs couches de tissus bidimensionnels (2D) sont assemblées par des fibres selon la direction du troisième axe. Les tissages "4D" comportent quant à eux des fibres dirigées selon les directions de type (1,1,1) d'un cube. Un exemple typique est le carbone-carbone, qui résiste jusqu'à de très hautes températures, et qui, en raison de la géométrie adoptée, est insensible au délaminage, ou décollement des couches entre elles.

### 8.4.2 Définition

Un stratifié résulte de la superposition de plusieurs couches (ou plis) de nappes unidirectionnelles ou de tissus. Les nappes successives sont en général orientées différemment (classiquement  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $-45^\circ$ ). Il est important de respecter dans la conception la symétrie miroir, qui caractérise une plaque dont les empilements de plis de part et d'autre du plan moyen sont symétriques. Si la plaque ne possède pas cette symétrie, elle risque de se "voiler" lors de la fabrication en raison des dilatations différentielles liées aux différences de coefficient de dilatation. Les minimums technologiques sont de 3 à 4 couches de tissu équilibré ou 8 couches d'unidirectionnel, et une épaisseur de 1 mm.

Les stratifiés risquent de rompre en traction, en compression, sous l'effet de flambements locaux, ou à cause de délaminage. Les calculs s'effectuent avec de petits programmes sur micro-ordinateur. Il faut déterminer la bonne tenue de chaque couche. La connaissance des efforts globaux (efforts normaux  $N_{11}$  et  $N_{22}$ , efforts tangentiels  $T_{12}$  dans le plan du stratifié), et des modules d'élasticité homogénéisés permet de trouver les déformations moyennes. En supposant alors que ces déformations (en l'absence de délaminage) sont valides pour toutes les couches, il ne reste plus qu'à appliquer le tenseur d'élasticité de

la couche  $i$  pour y effectuer une évaluation de la contrainte. La couche sera réputée rompue si elle atteint le critère de Hill-Tsaï :

$$\left(\frac{\sigma_L}{\sigma_{R_L}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{R_T}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_L \sigma_T}{\sigma_{R_L}}\right) + \left(\frac{\tau_{LT}}{\tau_{R_{LT}}}\right)^2 = 1 \quad (8.20)$$

### 8.4.3 Théorie des stratifiés

Un stratifié est un matériau formé par la superposition de plusieurs couches (ou plis) de nappes unidirectionnelles ou de tissus. Les nappes successives sont en général orientées différemment (classiquement  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $-45^\circ$ ). Il y a au minimum quelques couches, et jusqu'à 20 ou 30 couches.

#### Cinématique et équilibre

Pour les plaques *travaillant dans leur plan*, il est naturel de supposer que chaque couche a la même déformation, d'où un champ de déplacement virtuel, et un champ de déformation tels que :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = U'(x_1, x_2) \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = V'(x_1, x_2) \quad (8.21)$$

$$\varepsilon'_{11} = U'_{,1} \quad \varepsilon_{22} = V'_{,2} \quad 2\varepsilon_{12} = U'_{,2} + V'_{,1} \quad (8.22)$$

$$\delta W_{int} = - \int_V (\sigma_{11} U'_{,1} + \sigma_{22} V'_{,2} + \sigma_{12} (U'_{,2} + V'_{,1})) dV \quad (8.23)$$

$$= - \int_S (U'_{,1} N_{11} + V'_{,2} N_{22} + (U'_{,2} + V'_{,1}) N_{12}) dS \quad (8.24)$$

En définissant les quantités suivantes par intégration sur l'épaisseur de la plaque, représentant respectivement les efforts intérieurs globaux en direction  $x_1$ , en direction  $x_2$ , et de cisaillement (il s'agit d'une force par unité d'épaisseur, exprimée en Pa.m, ou N/m) :

$$N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3 \quad N_{22} = \int_h \sigma_{22} dx_3 \quad N_{12} = \int_h \sigma_{12} dx_3 \quad (8.25)$$

Comme on ne considère pas de déplacement hors du plan, on ne peut pas introduire dans cette théorie d'efforts extérieurs normaux au plan de la plaque. On se limite à la partie «membrane» de la théorie de plaque plus générale qui sera envisagée par la suite. Les *efforts extérieurs* sont définis sur le contour  $\Gamma$ , par une force résultante par unité de longueur (en N/m) à deux composantes,  $T_1$  et  $T_2$ , et, en un point courant de la surface  $S$ , par une force répartie (en Pascal), de composantes  $t_1$  et  $t_2$ . Leur travail virtuel s'exprime donc :

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma} (T_1 U' + T_2 V'_2) ds + \int_S (t_1 U' + t_2 V'_2) dS \quad (8.26)$$

La procédure de traitement des efforts intérieurs est similaire à celle qui a été utilisée pour les poutres. Il comporte successivement une intégration par partie, et l'utilisation du théorème de la divergence pour transformer la divergence sur la surface de la plaque en un flux sur son contour. Les termes sont du type :

$$N_{11} U'_{,1} = (N_{11} U')_{,1} - N_{11,1} U' \quad (8.27)$$

On retrouve ainsi le fait que les efforts internes équilibrent les efforts externes sur la frontière de la plaque. Les équations d'équilibre sont obtenues en un point courant de la surface :

$$N_{11,1} + N_{12,2} + t_1 = 0 \quad (8.28)$$

$$N_{12,1} + N_{22,2} + t_2 = 0 \quad (8.29)$$

### Loi de comportement

Pour établir la loi de comportement, il faut estimer  $N_{11}$ ,  $N_{22}$ , et  $N_{12}$ . Pour cela, il faut ramener le comportement de chaque couche depuis son repère «naturel» d'orthotropie au repère général de la plaque.

Le repère  $(n-t)$  des fibres fait un angle  $\alpha$  avec le repère de la plaque :  $\alpha = \text{angle}(x_1, n)$ ,  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$ . Le changement de repère s'exprime donc, par exemple pour les contraintes :

$$(\sigma_{nt}) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} (\sigma_{ij}) \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

En passant en notation de Voigt, il vient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

Il faut utiliser une autre matrice de passage pour les déformations, en raison du facteur 2 qui est présent dans les termes de cisaillement.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ 2\varepsilon_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

On note qu'une formulation alternative permet d'utiliser la même matrice pour contraintes et déformations, en considérant plutôt un facteur  $\sqrt{2}$  sur les termes en cisaillement :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & cs\sqrt{2} \\ s^2 & c^2 & -cs\sqrt{2} \\ -cs\sqrt{2} & cs\sqrt{2} & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{nt}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & cs\sqrt{2} \\ s^2 & c^2 & -cs\sqrt{2} \\ -cs\sqrt{2} & cs\sqrt{2} & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Il s'agit alors d'établir une relation de la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

sachant que :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_n & -\nu_{nt}/E_n & 0 \\ -\nu_{nt}/E_n & 1/E_t & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

On est donc amené à utiliser l'expression du tenseur d'élasticité dans le repère de chargement, qui s'exprime par exemple pour la couche  $i$  :

$$Q_{11}^i = c^4 \bar{E}_n^i + s^4 \bar{E}_t^i + 2c^2 s^2 (\nu_{tn} \bar{E}_n^i + 2\mu_{nt}^i) \quad (8.37)$$

$$Q_{22}^i = s^4 \bar{E}_n^i + c^4 \bar{E}_t^i + 2c^2 s^2 (\nu_{tn} \bar{E}_n^i + 2\mu_{nt}^i) \quad (8.38)$$

$$Q_{66}^i = c^2 s^2 (\bar{E}_n^i + \bar{E}_t^i - 2\nu_{tn} \bar{E}_n^i + (c^2 - s^2)^2 \mu_{nt}^i) \quad (8.39)$$

$$Q_{12}^i = c^2 s^2 (\bar{E}_n^i + \bar{E}_t^i - 4\mu_{nt}^i \bar{E}_n^i + (c^4 + s^4) \nu_{tn} \bar{E}_n^i) \quad (8.40)$$

$$Q_{16}^i = cs (c^2 \bar{E}_n^i - s^2 \bar{E}_t^i - (c^2 - s^2) (\nu_{tn} \bar{E}_n^i + 2\mu_{nt}^i)) \quad (8.41)$$

$$Q_{26}^i = cs (s^2 \bar{E}_n^i - c^2 \bar{E}_t^i - (c^2 - s^2) (\nu_{tn} \bar{E}_n^i + 2\mu_{nt}^i)) \quad (8.42)$$

$$(8.43)$$

avec  $\bar{E}_n^i = E_n^i / (1 - \nu_m \nu_{tm})$   $\bar{E}_t^i = E_t^i / (1 - \nu_m \nu_{tm})$ .

Pour obtenir la rigidité d'ensemble, on doit intégrer sur l'épaisseur chacun des termes obtenus. La forme obtenue est :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_h Q_{11} dx_3 & \int_h Q_{12} dx_3 & \int_h Q_{16} dx_3 \\ \int_h Q_{12} dx_3 & \int_h Q_{22} dx_3 & \int_h Q_{26} dx_3 \\ \int_h Q_{16} dx_3 & \int_h Q_{26} dx_3 & \int_h Q_{66} dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U, 1 \\ V, 2 \\ V, 1 + U, 2 \end{pmatrix} \quad (8.44)$$

Cette expression générale appelle quelques remarques :

- En fait, l'intégration continue est remplacée par une somme discrète sur le nombre de couches, ainsi, en notant  $e_i$  l'épaisseur de la couche  $i$  :

$$A_{11} = \sum_i Q_{11}^i e_i \quad (8.45)$$

- Les couches interviennent par leur épaisseur, mais pas par l'ordre de leur empilement. Ce ne sera plus le cas dans le paragraphe suivant.
- Les termes  $Q_{16}$  et  $Q_{26}$  caractérisent le couplage traction-cisaillement. Ils indiquent qu'une plaque formée de couches présentant des orientations quelconques se déforme en cisaillement sous l'effet d'une traction simple, et vice-versa. Comme ces termes sont impairs en  $\alpha$ , le couplage disparaît dans le cas d'une plaque symétrique.

## 8.5 Plaque de Kirchhoff-Love

On considère maintenant le même type de plaque, mais il s'agit de construire une théorie qui supporte à la fois des déplacements de type membrane et de type flexion, donc prenant en compte des forces, mais aussi des moments. On utilise de façon systématique la procédure déjà suivie pour les poutres et les plaques.

### Cinématique et équilibre

La plaque est définie dans le plan  $(x_1-x_2)$ , sa normale correspond à l'axe  $x_3$ , son épaisseur est  $h$  (fig.8.2). Le déplacement est défini par 3 translations,  $U, V, W$ , et deux angles,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , *qui sont fonctions de  $x_1-x_2$  uniquement.*

On définit donc la cinématique en fonction des cinq inconnues précédentes :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = U + \theta_2 x_3 \quad (8.46)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = V - \theta_1 x_3 \quad (8.47)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = W \quad (8.48)$$

Ceci permet d'évaluer un tenseur de déformations :

$$\varepsilon_{11} = U,1 + \theta_{2,1} x_3 \quad (8.49)$$

$$\varepsilon_{22} = V,2 - \theta_{1,2} x_3 \quad (8.50)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (8.51)$$

$$2\varepsilon_{12} = U,2 + \theta_{2,2} x_3 + V,1 - \theta_{1,1} x_3 \quad (8.52)$$

$$2\varepsilon_{23} = -\theta_1 + W,2 \quad (8.53)$$

$$2\varepsilon_{31} = \theta_2 + W,1 \quad (8.54)$$

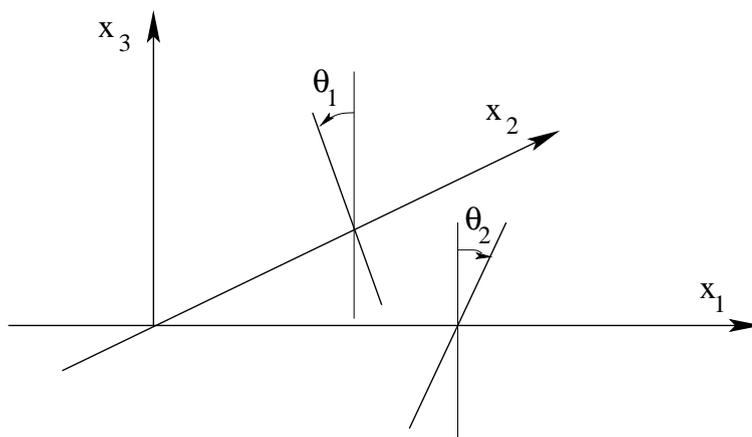


FIG. 8.2 – Géométrie d'une plaque et variables décrivant sa cinématique

Le travail virtuels des efforts intérieurs est tel que :

$$-\delta W_i = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (8.55)$$

$$= U_{,1} \int_h \sigma_{11} dx_3 + \theta_{2,1} \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3 + V_{,2} \int_h \sigma_{22} dx_3 - \theta_{1,2} \int_h \sigma_{22} x_3 dx_3 \quad (8.56)$$

$$+ (U_{,2} + V_{,1}) \int_h \sigma_{12} dx_3 + (\theta_{2,2} - \theta_{1,1}) \int_h \sigma_{12} x_3 dx_3 \quad (8.57)$$

$$+ (-\theta_1 + W_{,2}) \int_h \sigma_{23} dx_3 + (\theta_2 + W_{,1}) \int_h \sigma_{31} dx_3 \quad (8.58)$$

On en déduit donc les variables globales suivantes :

Variable associée	définition :	(8.59)
-------------------	--------------	--------

$U_{,1}$	$N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3$	(8.60)
----------	------------------------------------	--------

$\theta_{2,1}$	$M_{11} = \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3$	(8.61)
----------------	--	--------

$V_{,2}$	$N_{22} = \int_h \sigma_{22} dx_3$	(8.62)
----------	------------------------------------	--------

$\theta_{1,2}$	$-M_{22} = \int_h \sigma_{22} x_3 dx_3$	(8.63)
----------------	---	--------

$U_{,2} + V_{,1}$	$N_{12} = \int_h \sigma_{12} dx_3$	(8.64)
-------------------	------------------------------------	--------

$\theta_{2,2} - \theta_{1,1}$	$M_{12} = \int_h \sigma_{12} x_3 dx_3$	(8.65)
-------------------------------	--	--------

$-\theta_1 + W_{,2}$	$T_1 = \int_h \sigma_{23} dx_3$	(8.66)
----------------------	---------------------------------	--------

$\theta_2 + W_{,1}$	$T_2 = \int_h \sigma_{31} dx_3$	(8.67)
---------------------	---------------------------------	--------

En théorie des poutres, il existe une approche (Timoshenko) pour laquelle l'angle que fait une section droite avec la ligne neutre est déterminé de façon indépendante, et une autre (Bernoulli) dans laquelle les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne au cours de la déformation. Le dernier cas s'applique essentiellement lorsque la poutre est peu épaisse, si bien que les cisaillements restent faibles. Ceci supprime l'angle de la liste des variables indépendantes, puisqu'il peut être alors directement

déterminé si la flèche est connue. Nous allons reprendre cette simplification pour la théorie de plaque construite ici. On suppose donc qu'un segment initialement perpendiculaire au plan moyen le reste au cours de la déformation. Les cisaillements 13 et 23 sont nuls, ce qui produit les conditions cinématiques :

$$-\theta_1 + W_{,2} = 0 \quad \theta_2 + W_{,1} = 0 \quad (8.68)$$

On aura également :

$$T_1 = 0 \quad T_2 = 0 \quad (8.69)$$

Dans le cadre de cette théorie simplifiée, la liste des variables associée est :

$$\theta_{2,1} = -W_{,11} \text{ associé à } M_{11} \quad (8.70)$$

$$\theta_{1,2} = W_{,22} \text{ associé à } M_{22} \quad (8.71)$$

$$\theta_{2,2} - \theta_{1,1} = -2W_{,12} \text{ associé à } M_{12} \quad (8.72)$$

ce qui mène au tableau :

Variable associée	définition :	(8.73)
$U_{,1}$	$N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3$	(8.74)
$-W_{,11}$	$M_{11} = \int_h \sigma_{11} x_3 dx_3$	(8.75)
$V_{,2}$	$N_{22} = \int_h \sigma_{22} dx_3$	(8.76)
$W_{,22}$	$-M_{22} = \int_h \sigma_{22} x_3 dx_3$	(8.77)
$U_{,2} + V_{,1}$	$N_{12} = \int_h \sigma_{12} dx_3$	(8.78)
$-2W_{,12}$	$M_{12} = \int_h \sigma_{12} x_3 dx_3$	(8.79)

- $N_{11}$  et  $N_{22}$  sont les efforts normaux,  $N_{12}$  le cisaillement dans le plan de la plaque
- $M_{11}$  et  $M_{22}$  sont des moments de flexion, et  $M_{12}$  un moment de torsion

L'écriture du travail des efforts extérieurs et l'écriture du principe des travaux virtuels permet ici encore d'écrire les conditions aux limites en force et moment, et de définir les équations d'équilibre. On ne détaille pas ici les différents développements. On retrouve bien entendu les équations de type membrane de la théorie des stratifiés, auxquelles s'ajoute une équation concernant les moments, qui fait intervenir l'effort réparti  $p$  porté par l'axe  $x_3$  :

$$N_{11,1} + N_{12,2} + t_1 = 0 \quad (8.80)$$

$$N_{12,1} + N_{22,2} + t_2 = 0 \quad (8.81)$$

$$M_{11,11} + M_{22,22} + 2M_{12,12} + p = 0 \quad (8.82)$$

Plusieurs stratégies sont possibles pour établir ensuite une loi de comportement. L'une des plus performantes consiste à reconstruire un champ approché à partir d'une formulation élastique tridimensionnelle, comme par exemple dans [17]. On se contentera ici d'une évaluation plus simple, qui ne cherche pas à donner accès aux termes de cisaillement, et qui est raisonnable pour fournir la rigidité d'une plaque composite dont toutes les couches sont identiques, si ce n'est l'orientation des fibres. On obtient une évaluation des efforts globaux en intégrant sur l'épaisseur une contrainte que l'on estime à partir de la cinématique du problème. On introduit successivement :

- des termes de type «membrane» :

$$N_{11} = \int_h \sigma_{11} dx_3 \quad (8.83)$$

$$= \int_h (Q_{11}\varepsilon_{11} + Q_{12}\varepsilon_{22} + Q_{16}\varepsilon_{12}) dx_3 \quad (8.84)$$

$$= \int_h (Q_{11}(U_{,1} + \theta_{2,1}x_3) + Q_{12}(V_{,2} - \theta_{1,2}x_3)) \quad (8.85)$$

$$+ Q_{16}(U_{,2} + \theta_{2,2}x_3 + V_{,1} - \theta_{1,1}x_3) dx_3 \quad (8.86)$$

$$(8.87)$$

$$N_{11} = \int_h (Q_{11}U_{,1} - Q_{11}x_3W_{,11}) dx_3 \quad (8.88)$$

$$+ \int_h (Q_{12}V_{,2} - Q_{12}x_3W_{,22}) dx_3 \quad (8.89)$$

$$+ \int_h (Q_{16}(U_{,2} + V_{,1}) - 2Q_{16}x_3W_{,12}) dx_3 \quad (8.90)$$

- termes de type «flexion» :

$$M_{11} = \int_h \sigma_{11}x_3 dx_3 \quad (8.91)$$

$$= \int_h (Q_{11}\varepsilon_{11} + Q_{12}\varepsilon_{22} + Q_{16}\varepsilon_{12})x_3 dx_3 \quad (8.92)$$

$$= \int_h (Q_{11}(U_{,1}x_3 + \theta_{2,1}x_3^2) + Q_{12}(V_{,2}x_3 - \theta_{1,2}x_3^2)) \quad (8.93)$$

$$+ Q_{16}(U_{,2}x_3 + \theta_{2,2}x_3^2 + V_{,1}x_3 - \theta_{1,1}x_3^2) dx_3 \quad (8.94)$$

$$M_{11} = \int_h (Q_{11}x_3U_{,1} - Q_{11}x_3^2W_{,11}) dx_3 \quad (8.95)$$

$$+ \int_h (Q_{12}x_3V_{,2} - Q_{12}x_3^2W_{,22}) dx_3 \quad (8.96)$$

$$+ \int_h (Q_{16}x_3(U_{,2} + V_{,1}) - 2Q_{16}x_3^2W_{,12}) dx_3 \quad (8.97)$$

On obtient ainsi une forme matricielle de la loi de comportement :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{,1} \\ V_{,2} \\ V_{,1} + U_{,2} \\ -W_{,11} \\ -W_{,22} \\ -2W_{,12} \end{pmatrix} \quad (8.98)$$

La sous-matrice  $[A]$  est le résultat de l'intégration de :

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{pmatrix} \quad (8.99)$$

La sous-matrice  $[B]$  est le résultat de l'intégration de :

$$\begin{pmatrix} Q_{11}x_3 & Q_{12}x_3 & Q_{16}x_3 \\ Q_{12}x_3 & Q_{22}x_3 & Q_{26}x_3 \\ Q_{16}x_3 & Q_{26}x_3 & Q_{66}x_3 \end{pmatrix} \quad (8.100)$$

La sous-matrice  $[C]$  est le résultat de l'intégration de :

$$\begin{pmatrix} Q_{11}x_3^2 & Q_{12}x_3^2 & Q_{16}x_3^2 \\ Q_{12}x_3^2 & Q_{22}x_3^2 & Q_{26}x_3^2 \\ Q_{16}x_3^2 & Q_{26}x_3^2 & Q_{66}x_3^2 \end{pmatrix} \quad (8.101)$$

L'expression précédente appelle quelques remarques :

- La matrice de la formule 8.98 renferme des termes de différentes dimensions. On a :

$$\begin{pmatrix} N/m \\ - \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N/m & | & N \\ - & - & - \\ N & | & N.m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \\ - \\ m^{-1} \end{pmatrix} \quad (8.102)$$

- Chacun de ses termes est le résultat de la contribution de chaque couche, et est donc calculé comme une somme discrète sur toutes les couches. En appelant respectivement  $h_i^-$  et  $h_i^+$  les cotes inférieures et supérieures de la couche  $i$ ,  $e_i$  son épaisseur :

$$A_{11} = \sum_i Q_{11}^i e_i \quad (8.103)$$

$$B_{11} = \sum_i Q_{11}^i (h_i^{+2} - h_i^{-2})/2 \quad (8.104)$$

$$C_{11} = \sum_i Q_{11}^i (h_i^{+3} - h_i^{-3})/3 \quad (8.105)$$

- Les termes linéaires en  $x_3$  produisent du *couplage* membrane-flexion. Ils sont nuls pour les plaques symétriques.
- Pour tous les termes contenant soit  $x_3$ , soit  $x_3^2$ , le résultat obtenu *dépend de la séquence d'empilement*, ce qui est assez intuitif en effet lorsqu'il s'agit de calculer une résistance à la flexion : celle-ci sera meilleure si les couches les plus résistantes vis-à-vis d'une flexion donnée sont éloignées de la surface moyenne. On retrouve le cas illustré précédemment par la poutre composite.
- On reconstruit un champ de contraintes approché dans chaque couche en considérant les efforts normaux et les moments dans chaque couche (les indices  $\alpha$  et  $\beta$  varient de 1 à 2,  $\bar{h}_i$  est la cote moyenne de la couche) :

$$N_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad (8.106)$$

$$M_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} (x_3 - \bar{h}_i) dx_3 \quad (8.107)$$

Il vient alors :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}^i}{e_i} + \frac{12}{e_i^2} M_{\alpha\beta}^i \frac{x_3 - \bar{h}_i}{e_i}$$



## Chapitre 9

# Éléments de Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a pour objet essentiel l'étude des fissures macroscopiques : elle s'applique lorsqu'il existe dans le matériau des discontinuités telles dans la matière qu'elles viennent modifier l'état de contrainte, déformation et déplacement, si bien que l'homogénéisation du milieu n'a plus de sens.

### 9.1 Généralités

La séparation en deux parties disjointes d'un corps se produit à la suite de la phase d'amorçage, qui a vu le développement de microcavités, microfissures... sous l'action de sollicitations mécaniques, thermiques, chimiques.... La propagation de la ou des fissures macroscopiques peut conduire à la séparation complète de plusieurs morceaux, ou bien au contraire les fissures peuvent s'arrêter. Le mode de rupture peut être fragile, la rupture se produisant alors souvent sans déformation plastique, ou ductile, en présence d'une déformation plastique importante. L'énergie nécessaire pour produire la rupture, caractérisée par la *résilience* (rapport de l'énergie nécessaire pour rompre une pièce sur la section droite de matière rompue), est bien plus grande dans le cas de la rupture ductile. La résilience est une caractéristique importante du matériau au niveau de la conception de systèmes mécaniques. Elle évolue avec la température, la *température de transition* caractérisant le passage d'un mode à l'autre. Le mode de rupture dépend par ailleurs de l'état de contrainte, en particulier de la triaxialité des contraintes (rapport du premier sur le second invariant). Un matériau qui présente beaucoup de plasticité développera en général des ruptures ductiles, mais pourra être sujet à la rupture fragile. Un matériau sans plasticité (céramiques, métaux à très basses températures, certaines résines) présentera toujours des ruptures fragiles.

En fonction du chargement et du matériau considérés, si le milieu est globalement plastique ou viscoplastique, l'étude est du ressort de la mécanique non linéaire de la rupture, ou encore de l'*approche locale*, dans laquelle il est fait une description aussi précise que possible de l'état de contrainte et de déformation en pointe de fissure à l'aide de modèles de comportement non linéaires. Si au contraire la plasticité est absente ou reste très confinée, les théories qui permettent de traiter le problème considèrent le matériau comme élastique partout : c'est la *mécanique linéaire de la rupture*, qui va être considérée dans ce chapitre.

Les dates principales qui marquent le développement de la mécanique de la rupture sont 1920, lorsque Griffith montre que la rupture d'un milieu élastique-fragile peut être caractérisée par une variable globale, qui sera appelée plus tard le taux de restitution d'énergie, et 1956, lorsque, à partir de l'étude des singularités du champ de contrainte, Irwin introduit la notion de facteur d'intensité des contraintes. Les années 1960-1980 sont celles de l'essor puis de la maturité de la mécanique de la rupture, avec en particulier les développements numériques et le traitement des problèmes non linéaires. Les ouvrages de références les plus anciens sont épuisés [13], mais il existe une abondante littérature issue des laboratoires français [2, 11, 12, 5].

## 9.2 Taux de restitution d'énergie

### 9.2.1 Définition

Dans le cas où l'énergie cinétique est négligée, la puissance mécanique disponible pour ouvrir une fissure de surface  $\mathcal{A}$  est égale à la variation de l'énergie potentielle totale  $\mathcal{V}$ , résultat de la variation de l'énergie élastique stockée dans la structure et de la variation d'énergie liée aux forces extérieures. Cette contribution mécanique est appelée *taux de restitution d'énergie*. Elle peut se définir quel que soit le type de comportement. Son unité est le joule/m<sup>2</sup>.

$$G = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{A}} \quad (9.1)$$

Cette énergie sert à créer de nouvelles surfaces libres, ce qui implique des apports d'énergie. En appelant  $\gamma^s$  l'énergie spécifique de rupture par unité de surface, il est donc nécessaire pour que la fissure se propage que la contribution mécanique équilibre au moins l'énergie dissipée (théorie de Griffith pour la rupture fragile), soit dans un milieu plan d'épaisseur unité :

$$\text{—propagation si :} \quad G - 2\gamma^s \geq 0 \quad (9.2)$$

$$\text{—arrêt si :} \quad 0 \geq G - 2\gamma^s \quad (9.3)$$

Si le matériau est élastique, et dans le cas où les forces de volume sont négligées, l'expression de l'énergie potentielle se réduit à deux termes, le premier correspondant à l'énergie de déformation élastique (dans le volume  $V$  du solide), le second au travail des forces extérieures appliquées en surface, (force  $\underline{F}^d$  sur les frontières où la force est imposée  $S_F$ ) :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV - \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \underline{u} dS \quad (9.4)$$

L'application du théorème de la divergence au terme volumique permet de le transporter en surface (théorème "du travail"), le terme obtenu se partageant ensuite sur les surfaces à force et déplacement imposés ( $\underline{u}^d$ ) :

$$\frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_S \underline{F} \cdot \underline{u} dS = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \underline{u} dS + \frac{1}{2} \int_{S_u} \underline{F} \cdot \underline{u}^d dS \quad (9.5)$$

Le calcul de  $G$  s'effectue par simple dérivation à partir de la nouvelle expression de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{S_u} \underline{F} \cdot \underline{u}^d dS - \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \underline{u} dS \quad (9.6)$$

et :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \mathcal{A}} \cdot \underline{u}^d dS \quad (9.7)$$

### 9.2.2 Cas d'une charge ponctuelle

Dans le cas particulier où il n'y a qu'une charge ponctuelle, les expressions se simplifient en introduisant la raideur  $\mathcal{R}$  de la structure ou sa complaisance  $\mathcal{C}$ . La force  $\mathcal{F}$  et le déplacement  $\mathcal{U}$  deviennent alors ponctuels, et :  $\mathcal{F} = \mathcal{R} \mathcal{U}$  ;  $\mathcal{U} = \mathcal{C} \mathcal{F}$ . L'avancée de fissure peut se schématiser comme en figure 9.1, selon que l'avancée se fait à déplacement imposé (Fig.9.1a), ou à force imposée (Fig.9.1b).

Dans chaque cas l'expression de  $G$  devient :

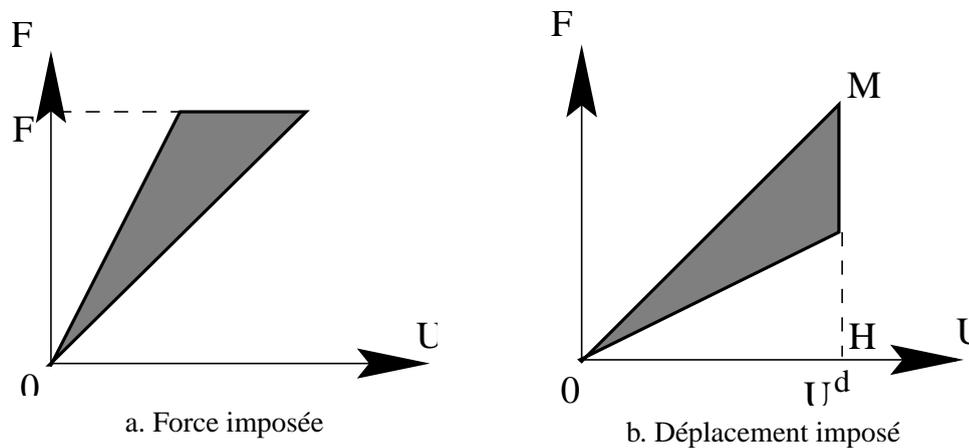


FIG. 9.1 – Evaluation de l'énergie mise en jeu lors d'une avancée de fissure

- à déplacement imposé, comme  $\mathcal{F} = \mathcal{R} \mathcal{U}^d$  :

$$G = -\frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{A}} \cdot \underline{u}^d dS \quad (9.8)$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{d\mathcal{R}}{d\mathcal{A}} \mathcal{U}^d \right) \cdot \mathcal{U}^d = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}^2} \right) \frac{d\mathcal{R}}{d\mathcal{A}} \quad (9.9)$$

$$(9.10)$$

- à force imposée, comme  $\mathcal{U} = C \mathcal{F}^d$  :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS \quad (9.11)$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{F}^d \cdot \left( \frac{dC}{d\mathcal{A}} \mathcal{F}^d \right) \quad (9.12)$$

$$(9.13)$$

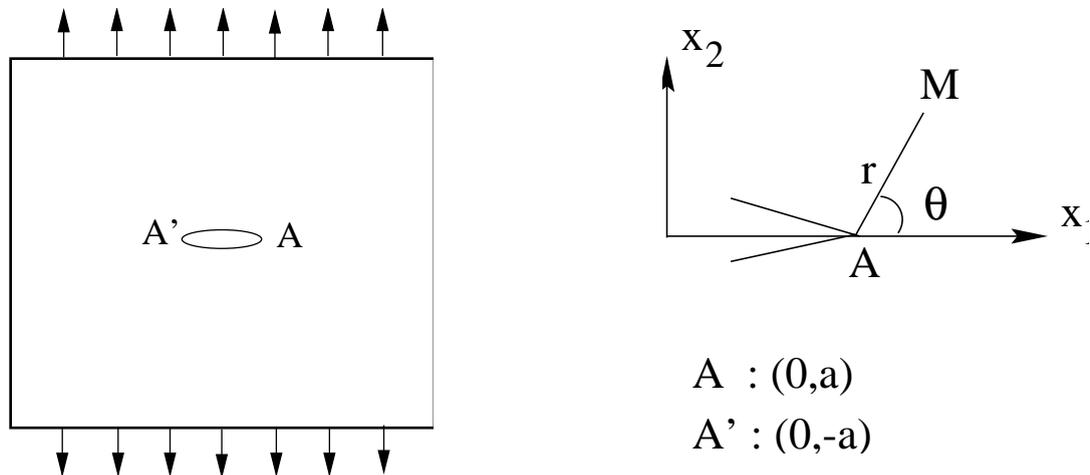
Les deux cas aboutissent formellement à la même expression :

$$G = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{dC}{d\mathcal{A}} \quad (9.14)$$

Il faut néanmoins noter que l'évolution de la force n'est pas la même (chute de force lors de l'avancée de fissure à déplacement imposé, la structure devenant plus souple, et bien entendu force constante à force imposée, avec augmentation du déplacement résultant). L'énergie récupérable dans le cas du déplacement imposé est finie (égale à l'aire du triangle  $OMH$ ), si bien que  $G$  va décroître avec la progression de fissure, et que la fissure pourra éventuellement s'arrêter. Ces expressions sont utilisées pour mesurer expérimentalement  $G$ .

### 9.2.3 Quelques valeurs critiques de $G$

Le verre et les céramiques ont des valeurs très faibles du taux de restitution d'énergie critique, de l'ordre de  $10 \text{ J/m}^2$ . Viennent ensuite les résines fragiles, avec des valeurs de l'ordre de  $100$  à  $500 \text{ J/m}^2$ . Les composites verre-résine possèdent des valeurs de l'ordre de  $7000 \text{ J/m}^2$ , ce qui les place au voisinage des alliages d'aluminium ( $20000 \text{ J/m}^2$ ). Les matériaux les plus résistants à la déchirure sont les aciers ( $100 \text{ kJ/m}^2$ ), et, bien entendu, les métaux purs ( $100$ – $1000 \text{ kJ/m}^2$ ).

FIG. 9.2 – Plaque infinie en traction simple selon  $x_2$ 

### 9.3 Facteur d'intensité de contrainte

Sauf mention contraire, les développements des chapitres suivants concernent des milieux bidimensionnels. La fissure y sera linéaire, définie par sa longueur  $a$ . En toute rigueur, l'extension en tridimensionnel n'est possible que si le front de fissure dans la pièce réelle est perpendiculaire au plan d'étude, et alors :  $\mathcal{A} = ab$ ,  $b$  étant l'épaisseur de la pièce.

#### 9.3.1 Solution de Muskhelishvili

La figure 9.2 montre le système qui est considéré ici. Il s'agit d'un panneau "infini", contenant une fissure de longueur  $2a$  selon l'axe  $x_1$ , et sollicité en traction uniforme selon l'axe  $x_2$ . Dans la pratique, un modèle de ce type pourra être raisonnablement utilisé dès lors que les dimensions de la fissure seront de 10 à 20 fois plus faibles que celle de la plaque. Il existe une solution analytique exacte de ce problème, sur l'axe  $x_2 = 0$ , en supposant un état de contraintes planes :

$$- \text{Si } x_1 \geq a \quad \sigma_{22} = \sigma_{\infty} / (1 - (a/x_1)^2)^{1/2} \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} - \sigma_{\infty} \quad (9.15)$$

$$\varepsilon_{22} = \left( \frac{\sigma_{\infty}}{E} \right) \left( \nu + \frac{1 - \nu}{(1 - (a/x_1)^2)^{1/2}} \right) \quad (9.16)$$

$$- \text{Si } 0 \leq x_1 \leq a \quad [u_2] = 2u_2 = \left( \frac{4a\sigma_{\infty}}{E} \right) (1 - (x_1/a)^2)^{1/2} \quad (9.17)$$

La formule du déplacement  $u_2$  sur la frontière de la fissure montre que l'ouverture des lèvres de la fissure est représentée par une ellipse. Le changement de variable  $x_1 = a + r$  montre qu'il existe au voisinage de la pointe de fissure une singularité en  $r^{1/2}$  lorsque  $r$  tend vers 0.

$$\sigma_{22} \propto \sigma_{\infty} (a/2r)^{1/2} \quad (9.18)$$

#### 9.3.2 Solution asymptotique de Westergaard

Le problème précédent peut également être abordé en introduisant la "fonction d'Airy"  $\Psi(x_1, x_2)$  telle que :  $\sigma_{11} = \Psi_{,22}$ ;  $\sigma_{22} = \Psi_{,11}$ ;  $\sigma_{12} = \Psi_{,12}$ . Les équations d'équilibre sont alors automatiquement vérifiées.

En élasticité linéaire, le report de ces égalités dans les conditions de compatibilité  $2\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{22,22}$  conduit à chercher  $\Psi$  comme solution de l'équation biharmonique  $\Delta\Delta\Psi = 0$ . Ce problème se résout par la méthode des fonctions complexes. On obtient ainsi la solution asymptotique au voisinage de la pointe de fissure (Fig.9.3). Irwin a montré que le premier terme du développement limité est le même, à un facteur multiplicatif près, pour tous les problèmes correspondant à un mode d'ouverture donné. La sollicitation d'une fissure linéaire dans un milieu plan perpendiculairement à son axe correspond au mode I; on introduit ainsi le *facteur d'intensité de contrainte en mode I*,  $K_I$ , tel que :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sigma_{22} \sqrt{2\pi r} \right) \quad (9.19)$$

### 9.3.3 Différents modes de sollicitation

Le chargement étudié jusqu'à présent fait intervenir un champ de contrainte "lointain" comportant une seule composante, normale à la direction de la fissure, il s'agit du mode d'ouverture, ou mode I. C'est celui qui est physiquement le plus important, puisqu'une fissure en mode I se propage dans son propre plan, par raison de symétrie, sans bifurcation, l'ouverture de la fissure conduisant facilement à la rupture. Dans le cas du mode II, le champ lointain de sollicitation extérieure est un cisaillement perpendiculaire au front de fissure (Fig.9.3.b), et dans le cas du mode III un cisaillement parallèle au front de fissure (Fig.9.3.c).

### 9.3.4 Remarques

1. L'unité de  $K$  est le  $N.m^{-3/2}$ . On utilise couramment le  $MPa.\sqrt{m}$ .  $K$  dépend à la fois du matériau et de la géométrie.
2. La singularité en  $r$  permet à l'énergie de déformation élastique de rester finie en pointe de fissure (le matériau ne devient pas localement indéformable) :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV \propto \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{r}} r dr d\theta \quad (9.35)$$

3. La comparaison de la solution précédente en  $\theta = 0$  et de la solution de Muskhelishvili lorsque  $r$  tend vers 0 fournit l'expression de  $K_I$  pour une fissure horizontale de longueur  $2a$  chargée selon  $x_2$  à l'infini avec une contrainte  $\sigma_\infty$  :

$$\text{Westergaard : } \sigma_{22} \propto \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad ; \quad \text{Muskhelishvili : } \sigma_{22} \propto \sigma_\infty \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad (9.36)$$

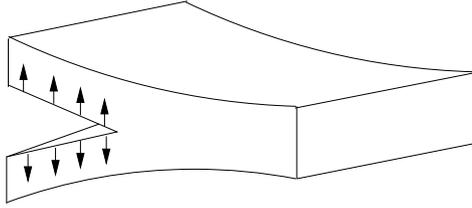
$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (9.37)$$

4. Il ne faut pas confondre  $K_I$  avec  $K_t$  *facteur de concentration de contrainte*, qui est sans dimension, et qui caractérise le rapport entre la contrainte normale maximale et la contrainte à l'infini au voisinage d'une entaille. Ainsi, au voisinage d'un défaut elliptique de longueur  $2a$  et de rayon de courbure  $\rho$  le facteur de concentration de contrainte vaut :

$$K_t = \sigma_{22max} / \sigma_\infty = 2\sqrt{a/\rho} \quad (9.38)$$

Cette valeur peut se retrouver à l'aide de la solution de Muskhelishvili pour un trou elliptique. La valeur de  $K_t$  devient infinie lorsque le rayon  $\rho$  tend vers 0, ce qui n'est bien sûr pas le cas de  $K_I$ .

5. En mode I, il est possible de trouver la relation entre  $K$  et  $G$  en évaluant le travail nécessaire pour refermer une fissure de longueur  $a + \Delta a$ , comme indiqué en figure 9.4. Il s'agit d'exprimer que la densité d'effort sur le segment  $OO'$  passe de 0 lorsque la fissure est en  $O'$  à  $\sigma_{22}$  lorsque la



a. Mode I : ouverture

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (9.20)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (9.21)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (9.22)$$

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (9.23)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad (9.24)$$

$$\text{avec : } \kappa = 3 - 4\nu \text{ en déformations planes} \quad (9.25)$$

$$\text{et : } \kappa = \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \text{ en contraintes planes} \quad (9.26)$$



b. Mode II : glissement dans le plan

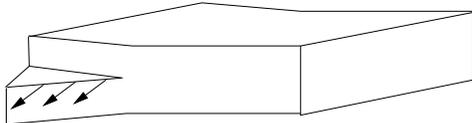
$$\sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (9.27)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (9.28)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (9.29)$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad (9.30)$$

$$u_2 = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (9.31)$$



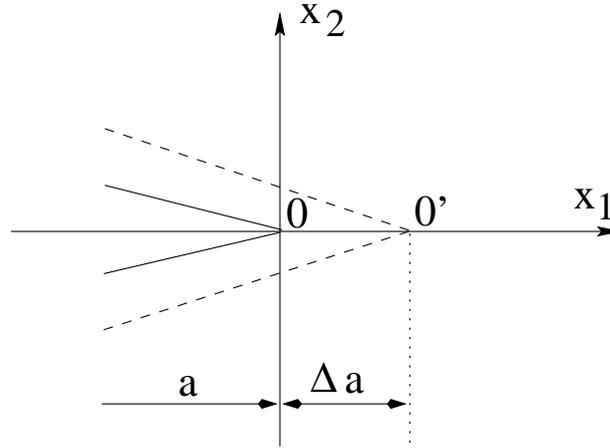
c. Mode III : glissement antiplan

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.32)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (9.33)$$

$$u_3 = -\frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.34)$$

FIG. 9.3 – Les différents modes de fissuration et les champs singuliers associés

FIG. 9.4 – Opération de refermeture de fissure pour le calcul de la relation  $K-G$ 

fissure est en  $O$ , alors que dans le même temps l'ouverture passe de  $u_2$  à 0. Le résultat obtenu est :  $G = K_I^2(k+1)/8\mu$  avec  $k = 3 - 4\nu$  en déformations planes, et  $k = (3 - \nu)/(1 - \nu)$  en contraintes planes, soit :

$$\text{Contraintes planes : } G = K_I^2/E \quad (9.39)$$

$$\text{Déformations planes : } G = (1 - \nu^2)K_I^2/E \quad (9.40)$$

Pour effectuer la démonstration des formules précédentes, le taux de restitution d'énergie est pris sous la forme :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS \quad (9.41)$$

Le calcul consiste à évaluer, par unité d'épaisseur :

$$G \cdot \Delta a = \frac{1}{2} \int_a^{a+\Delta a} \sigma_{22}(O) u_2(O') dx_1 \quad (9.42)$$

Par ailleurs, les relations générales sont, en cas de mélange des modes :

$$\text{Contraintes planes : } G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \quad (9.43)$$

$$\text{Déformations planes : } G = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \quad (9.44)$$

6. Dans le cas des matériaux anisotropes, il existe un couplage entre les différents modes même pour les configurations les plus simples, comme la plaque en traction étudiée précédemment. On définit alors un tenseur de facteurs d'intensité de contraintes :

$$K_{ij} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij} \sqrt{2\pi r} \quad (9.45)$$

## 9.4 Analyse de l'état de contrainte tridimensionnel

Après avoir examiné le problème d'élasticité bidimensionnelle, il est utile de considérer l'état de contrainte 3D qui s'établit dans les structures.

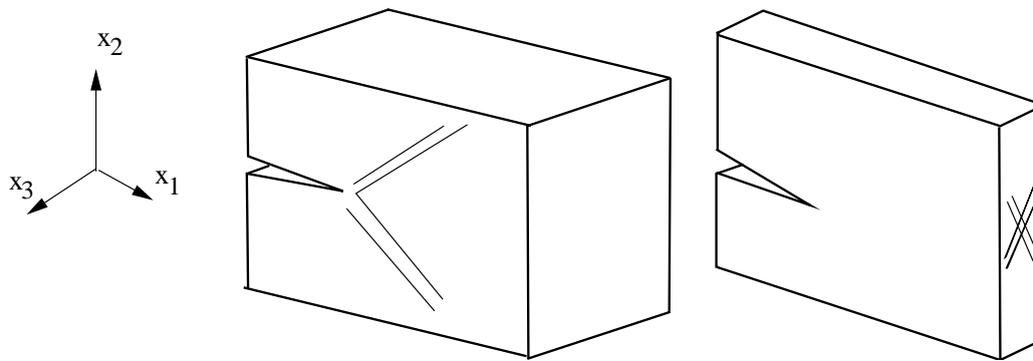


FIG. 9.5 – Etat de contrainte tridimensionnel en pointe de fissure

- Dans les structures épaisses (exemple de l'éprouvette de la figure 9.5.a), l'état de contrainte est triaxial, et  $0 < \sigma_{11} < \sigma_{33} < \sigma_{22}$ . Les directions de glissement préférentielles sont donc dans le plan de cisaillement maximum,  $x_1 - x_2$ , si bien que l'éprouvette périt "par l'arrière" de la fissure.
- Dans les structures minces (exemple de l'éprouvette de la figure 9.5.b), la composante 33 du tenseur de contrainte est négligeable ( $0 < \sigma_{33} < \sigma_{11} < \sigma_{22}$ ), si bien que le plan de cisaillement maximum est maintenant le plan  $x_2 - x_3$ , et que l'épaisseur de la structure va diminuer au devant de la fissure, provoquant la ruine par amincissement exagéré.

## 9.5 Propagation de fissure en fatigue

### 9.5.1 Amorçage–propagation dans les matériaux métalliques

Le phénomène de fatigue se manifeste sur les matériaux soumis à des chargements de faible intensité, qui individuellement ne présenteraient pas de danger, mais qui, appliqués de façon cyclique, conduisent à l'amorçage puis à la propagation de fissures, d'abord microscopiques, puis macroscopiques. La figure 9.6 schématise ce processus, dans un diagramme où la vitesse de propagation par cycle est reportée en fonction de la longueur de la fissure.

Comme indiqué en introduction, les fissures courtes sont noyées dans des champs locaux, imposés par les efforts extérieurs et la géométrie locale (cristallographie par exemple), et leur étude individuelle n'est pas aisée. Celles qui sont observées lors d'une étude microstructurale sont celles qui ont progressé de façon préférentielle, donc qui se trouvaient dans les zones les plus sollicitées. Il est donc normal que, dans le diagramme ( $da/dN-a$ ), elles présentent des vitesses grandes. Certaines d'entre elles s'arrêtent, tandis qu'un petit nombre (en général une seule) dépasse la taille de la microstructure, pour devenir une "grande" fissure, qui peut être étudiée à l'aide de la mécanique linéaire de la rupture.

La zone de non-propagation peut se représenter également dans un diagramme ( $\log \sigma - \log a$ ), dit de Kitagawa (Fig.9.7). La partie horizontale de la frontière du domaine correspond à la *limite d'endurance*, ou *limite de fatigue*. Il s'agit du niveau de contrainte cyclique en dessous duquel aucune micro-fissure ne se développera. Une structure sans défaut macroscopique, ou une éprouvette lisse soumise à ce type de chargement ne présenteront pas de risque de rupture. Pour des longueurs de fissure plus importantes, la structure résistera d'autant moins bien que la fissure sera longue, la frontière du domaine présentant alors une pente  $-1/2$ , ce qui est cohérent avec le fait que c'est l'amplitude de facteur d'intensité de contrainte,  $\Delta K \propto \Delta \sigma a^{1/2}$  qui est le moteur de l'avancée de fissure. De même qu'il existe une limite d'endurance, il est possible de définir un *facteur d'intensité de contrainte seuil* en dessous duquel la fissure ne progresse pas.

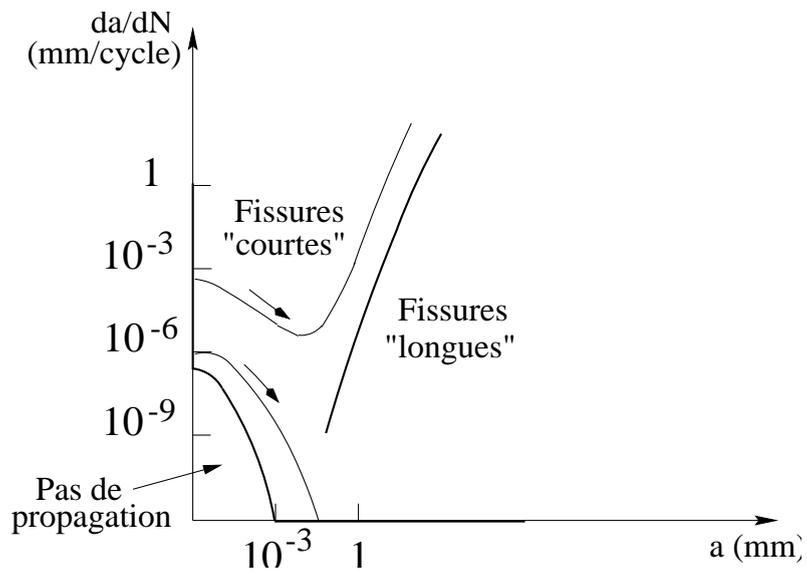


FIG. 9.6 – Schématisation de la propagation de fissures de fatigue

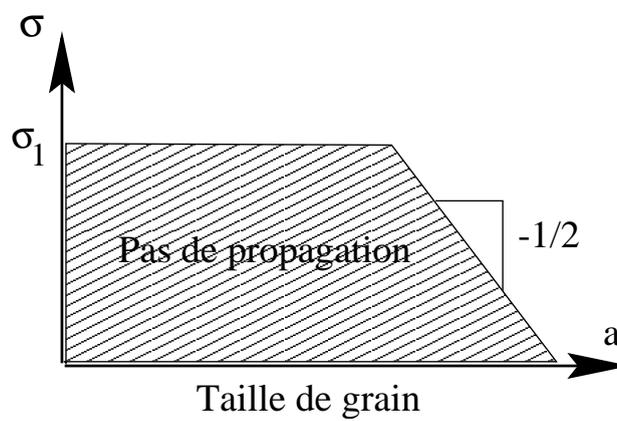
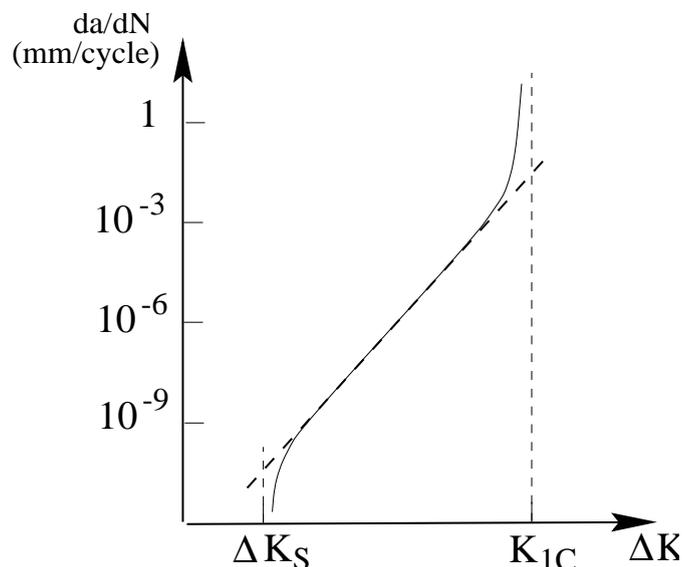


FIG. 9.7 – Diagramme définissant les limites de fatigue et de propagation de fissure

FIG. 9.8 – Illustration de la loi de Paris dans le diagramme  $da/dN-\Delta K$ 

Matériau	$K_{Ic}$ ( $MPa\sqrt{m}$ )	$\Delta K_s$ ( $MPa\sqrt{m}$ )
acier haute résistance (ex : 35NCD16)	60	1 à 4
acier moyenne résistance (ex : 15MND6) ...		
... (basse température)	40	3
... (palier ductile)	200	8
alliages d'aluminium (ex : 7075)	30	1,5 à 4
alliages de titane (ex : TA6V)	80	2 à 8
composite verre-résine	7	
polyéthylène	6,5	
polystyrène	0,4	
résine époxyde	0,1	
verre	0,01	

TAB. 9.1 – Valeur critique et valeur seuil du facteur d'intensité de contrainte pour quelques matériaux

### 9.5.2 Loi de Paris

Les courbes  $da/dN-\Delta K$  présentent la forme indiquée en figure 9.8. En régime établi, elles présentent une partie linéaire dans un diagramme log-log, ce qui permet de les modéliser par la loi de Paris, qui définit la vitesse de propagation par cycle comme une fonction puissance de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m \quad (9.46)$$

Dans le même diagramme est également reportée la valeur de  $K_{Ic}$ , qui correspond à une rupture instantanée, par dépassement de la valeur critique de  $K$  sous chargement monotone. Le tableau 9.1 fournit donc, en même temps que  $K_s$ , quelques valeurs typiques de  $K_{Ic}$  pour les alliages usuels, auxquelles sont ajoutées pour comparaison celles qui sont classiquement obtenues pour des matériaux non métalliques (valeurs en  $MPa \cdot \sqrt{m}$ ).

## Résumé

- Taux de restitution d'énergie, défini à partir de la variation d'énergie potentielle

$$G = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{A}} = \frac{1}{2} \int_{S_F} \underline{F}^d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{A}} dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \mathcal{A}} \cdot \underline{u}^d dS$$

- Charge ponctuelle, à déplacement imposé

$$G = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}^2} \right) \frac{d\mathcal{R}}{d\mathcal{A}}$$

- Charge ponctuelle, à force imposée

$$G = \frac{1}{2} \mathcal{F}^d \cdot \left( \frac{dC}{d\mathcal{A}} \mathcal{F}^d \right)$$

- Facteur d'intensité de contrainte en mode I

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sigma_{22} \sqrt{2\pi r} \right)$$

- ... pour une fissure de longueur  $2a$  dans une plaque infinie

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

- Relation  $G-K$

- ★ En contraintes planes

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2$$

- ★ En déformations planes

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2$$

- ★ Unité de  $G = \text{J.m}^{-2}$  ; unité de  $K = \text{Pa.m}^{1/2} = \text{N.m}^{-3/2}$

- Loi de Paris

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m$$



# Chapitre 10

## Annexe

### 10.1 Quelques tenseurs particuliers

Les tenseurs d'ordre 4  $\underset{\sim}{J}$  et  $\underset{\sim}{K}$  permettent respectivement d'obtenir le déviateur  $\underset{\sim}{s}$  et le tenseur sphérique  $\underset{\sim}{S}$  associés à un tenseur symétrique du second ordre  $\underset{\sim}{\sigma}$ .

On a :

$$\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{J} : \underset{\sim}{\sigma} \quad \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{K} : \underset{\sim}{\sigma} \quad (10.1)$$

On introduit également le tenseur unité d'ordre 4,  $\underset{\sim}{I}$ . On peut facilement vérifier que :

$$\underset{\sim}{I} \text{ tel que } I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (10.2)$$

$$\underset{\sim}{K} = \frac{1}{3}\underset{\sim}{I} \otimes \underset{\sim}{I} \quad \text{ou encore} \quad K_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (10.3)$$

$$\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{K} \quad \text{ou encore} \quad J_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (10.4)$$

Propriétés remarquables :

$$\underset{\sim}{J} : \underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{J} \quad \underset{\sim}{K} : \underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K} \quad \underset{\sim}{J} : \underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K} : \underset{\sim}{J} = 0 \quad (10.5)$$

Donc, bien sûr :

$$\underset{\sim}{J} : \underset{\sim}{S} = 0 \quad \underset{\sim}{K} : \underset{\sim}{s} = 0 \quad (10.6)$$

En élasticité isotrope, le tenseur d'élasticité  $\underset{\sim}{\Lambda}$  et son inverse  $\underset{\sim}{S}$  s'expriment :

$$\underset{\sim}{\Lambda} = 3\kappa\underset{\sim}{K} + 2\mu\underset{\sim}{J} \quad \underset{\sim}{S} = \frac{\underset{\sim}{K}}{3\kappa} + \frac{\underset{\sim}{J}}{2\mu} \quad (10.7)$$

Si bien que :

$$\underset{\sim}{J} : \underset{\sim}{\Lambda} = 2\mu\underset{\sim}{J} \quad \underset{\sim}{K} : \underset{\sim}{\Lambda} = 3\kappa\underset{\sim}{K} \quad (10.8)$$

En plasticité,  $\underset{\sim}{J}$  est utile pour évaluer la direction d'écoulement. Ainsi, dans le cas du critère de von Mises :

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{s}} : \frac{\partial \underset{\sim}{s}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J} : \underset{\sim}{J} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J} : \underset{\sim}{I} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J} \quad (10.9)$$

## 10.2 Sur le critère de von Mises

Une conférence a été organisée en août 2004 à Cracovie pour célébrer les 100 ans du «critère de Huber», et son inventeur, le Professeur M.T. Huber (<http://www.huber2004.agh.edu.pl>).

*Exactly a hundred years ago, in 1904, the pioneer paper of Maksymilian Tytus Huber (1872-1950) entitled Specific Strain Work as a Measure of Material Effort - A Contribution to Foundations of the Theory of Material Strength appeared in Polish in the transactions of the Polytechnic Society in Lwow - Czasopismo Techniczne. M.T. Huber distinguished two cases ; if the hydrostatic component of stress was compression, he proposed that yielding or fracture was determined by the elastic energy of distortion, and in the case of tension, he determined the criterion of limit state by the total elastic energy, referring to the earlier suggestion of E. Beltrami in 1885. As it appeared later, J.C. Maxwell anticipated the criterion of elastic energy of distortion in the letter to W. Thompson, 18 Dec. 1856. The importance of Huber's achievement for the development of the theory of plasticity found confirmation in further works on yield criteria of R. von Mises (1913), B.P. Haigh (1919) and H. Hencky (1924). The strength hypothesis formulated by M.T. Huber determined the upper limit of the applications of linear theory of elasticity and, at the same time, laid the foundations for the development of theory of plasticity as well as the theories of limit states in anisotropic materials. Since the works of M.T. Huber and of his student W. Burzynski (1900-1972) the Polish school of energy-based approach to diverse aspects of limit states in isotropic and anisotropic solids grew up.*

### 10.3 Glossaire des notations les plus courantes

$\varepsilon, \varepsilon^e$	Tenseur de déformations (petites perturbations), déformation élastique
$\tilde{\varepsilon}^h$	Tenseur de dilatation thermique
$\varepsilon^p, \varepsilon^{vp}$	Tenseur de déformation plastique, viscoplastique
$\tilde{\sigma}$	Tenseur de contrainte de Cauchy
$f, n$	Fonction de charge ; dérivée par rapport aux contraintes $\partial f / \partial \tilde{\sigma}$
$I_1, I_2, I_3$	Invariants du tenseur de contrainte (voir page 24)
$J_1, J_2, J_3$	Invariants du déviateur de contrainte (voir page 24)
$J$	Second invariant du déviateur des contraintes
$A_i, \alpha_i$	Variables d'écroûissage
$R, \tilde{X}$	Variables d'écroûissage isotrope, cinématique
$\sigma_y$	Limite d'élasticité initiale
$H$	Module plastique
$W, W^*$	Potentiels élastiques
$\Omega$	Potentiel viscoplastique
$\tilde{\Sigma}$	Tenseur de contraintes moyennes (chapitre homogénéisation uniquement)
$\tilde{E}$	Tenseur de déformations moyennes (chapitre homogénéisation uniquement)



# Références citées dans le texte

- [1] J.-M. Berthelot. *Matériaux composites – Comportement mécanique et analyse des structures*. Masson, 1993.
- [2] H.D. Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.
- [3] Coulomb C.A. Essai sur une application des règles de maxims et minims à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. *Mémoires de l'Académie Royale*, pages 343–382, 1776.
- [4] S. Forest, M. Amestoy, G. Damamme, and S. Kruch. *Mécanique des milieux continus*. Cours 1ère année, Ecole des Mines de Paris, 2004.
- [5] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux. Volume 2 : endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact*. Hermès, 1993.
- [6] Jean Garrigues. Cours de statique des poutres. <http://esm2.imt-mrs.fr/gar/poutre.html>, may 1999.
- [7] D. Gay. *Matériaux composites*. Hermès, 1991.
- [8] P. Germain, Q.S. Nguyen, and P. Suquet. Continuum thermodynamics. *J. of Applied Mechanics*, 50 :1010–1020, 1983.
- [9] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I— Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 44 :2–15, 1977.
- [10] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity (1st ed, 1950)*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, 1998.
- [11] R. Labbens. *Introduction à la mécanique de la rupture*. Pluralis, 1980.
- [12] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [13] H. Liebowitz. *Fracture, tomes I, II, III, IV*. Hermès, 1968.
- [14] D.G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison–Wesley Pub. Comp., 1984.
- [15] Q.S. Nguyen. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley, 2000.
- [16] W. Prager. The theory of plasticity : a survey of recent achievements. *Inst. Mech. Eng. London*, 169 :41–57, 1955.
- [17] E. Reissner. On a variational theorem in elasticity. *J.Math.Phys.*, 29 :90–95, 1950.
- [18] J.R. Rice. On the structure of stress-strain relations for time–dependent plastic deformation in metals. *J. of Applied Mechanics*, 37 :728, 1970.
- [19] J.R. Rice. Inelastic constitutive relations for solids : An internal variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Sol.*, 19 :433–455, 1971.
- [20] G.I. Taylor. A connexion between the criterion of yield and the strain ratio relationship in plastic solids. *Proc. Royal Soc. London, A*, pages 441–446, 1931.
- [21] G.I. Taylor and M.A. Quinney. On the stability of loose earth. *Phil. Trans. Royal Society, A*, 147 :9–27, 1857.
- [22] G.I. Taylor and M.A. Quinney. The Plastic Distorsion of Metals. *Phil. Trans. Royal Society, A*, 230 :323–362, 1931.

- [23] S. Timoshenko. *Résistance des matériaux, tomes I et II*. Dunod, 1968.
- [24] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Kreiger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw–Hill, 1964.
- [25] R. von Mises. Mechanik des plastischen Formänderung von Kristallen. 8 :161–185, 1928.

unrst

# Références d'intérêt général

- [1] A.S. Argon. *Constitutive Equations in Plasticity*. MIT Press, 1975.
- [2] M.F. Ashby and D.R.H. Jones. *Engineering materials, vol.1 : An Introduction to their Properties and Applications*. Pergamon Press, 1980.
- [3] M.F. Ashby and D.R.H. Jones. *Engineering materials, vol.2 : An Introduction to Microstructures*. Pergamon Press, 1988.
- [4] J.-M. Berthelot. *Matériaux composites – Comportement mécanique et analyse des structures*. Masson, 1993.
- [5] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, and S. Forest. *Mécanique non-linéaire des matériaux*. Hermès, 2001.
- [6] H.D. Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.
- [7] O. Coussy. *Mécanique des milieux poreux*. Technip, 1991.
- [8] F. Darve. *Manuel de rhéologie des géomatériaux*. Presses des Ponts et Chaussées, 1987.
- [9] I. Doghri. *Mechanics of Deformable Solids. Linear and Nonlinear, Analytical and Computational Aspects*. Springer Verlag, 2000.
- [10] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux. Volume 1 : élasticité et élastoplasticité*. Hermès, 1991.
- [11] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux. Volume 2 : endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact*. Hermès, 1993.
- [12] D. Gay. *Matériaux composites*. Hermès, 1991.
- [13] P. Germain. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1973.
- [14] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity (1st ed, 1950)*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, 1998.
- [15] M. Jirásek and Z.P. Bažant. *Inelastic Analysis of Structures*. Wiley, 2002.
- [16] R. Labbens. *Introduction à la mécanique de la rupture*. Pluralis, 1980.
- [17] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [18] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Mc Millan, 1990.
- [19] J. Mandel. *Cours de mécanique des milieux continus – Tomes I et II*. Gauthier-Villars / réédition 1994, J. Gabay, 1966.
- [20] J.C. Simo and T.R.J. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer Verlag, 1997.

# Index

- Anisotropie, 29
- Bingham
  - modèle de viscoplasticité, 18
- Clausius–Duhem, 44
- Cohérence, 15, 39, 45
- Contrainte
  - interne, 14
- Critère
  - anisotrope, 29
  - Drucker–Prager, 26
  - Gurson, 28
  - Hill, 29
  - Mohr–Coulomb, 27
  - Rankine, 28
  - Tresca, 25
  - Tsai, 30
  - von Mises, 25
- Dilatation
  - changement de phase, 12
  - irradiation, 12
  - thermique, 12
- Direction d’écoulement
  - Drucker–Prager, 39
  - Tresca, 39
  - von Mises, 38
- Écoulement plastique
  - déformation imposée, 47
- Écrouissage
  - cinématique, 15
  - isotrope, 15
  - multiplicatif, 21
  - variables, 43
- Effacement, 20
- Facteur d’intensité de contrainte, 96
- Fluage, 16
- Griffith, 93
- Hencky–Mises, 46
- Invariant, 24
- Kelvin–Voigt
  - modèle de viscoélasticité, 17
- Kirchhoff–Love, 87
- Lode
  - angle, 24
- Matériaux hétérogènes, 49
- Maxwell
  - modèle de viscoélasticité, 16
- Modèle
  - de Prager, 14
- Modèle rhéologique, 12
- Multiplicateur plastique
  - écrouissage cinématique, 47
  - écrouissage isotrope, 45
  - plasticité parfaite, 40
- Muskhelishvili, 96
- Navier–Bernoulli
  - poutre, 73
- Norton
  - modèle de viscoplasticité, 21
- Paris, 102
- Plasticité, 13
- Potentiel élastique, 54
- Prager, 14
  - expression tridimensionnelle, 47
- Prandtl–Reuss, 45
- Principe de Hill, 36
- Principe des travaux virtuels, 67
- Recouvrance, 20
- Relaxation, 16
- Reuss
  - borne inférieure, 57
- Rhéologie, 11
- Saint-Venant
  - principe, 62
  - solution, 64

- sandwich, 74
- Standard généralisé, 43
- Stratifiés, 85
  
- Taux de restitution d'énergie, 94
- Température, 21
- Timoshenko
  - poutre, 68
- Travail maximal, 36
- Tsai, 85
  
- Viscoélasticité, 16
- Viscoplasticité, 18
- Voigt
  - borne supérieure, 56
  - modèle de viscoélasticité, 16
  - notation de, 80
- Volume élémentaire représentatif, 51
  
- Westergaard, 96
  
- Zener
  - modèle de viscoélasticité, 18