



Adaptation de maillages et estimation d'erreurs  
et  
Journée en l'honneur de Michel Fortin

Québec  
25 au 27 mai 2010

Comptes rendus édités par  
André Fortin et  
José Manuel Urquiza

# Table des matières

<b>1 Programme</b>	<b>3</b>
1.1 Mardi 25 mai	3
1.2 Mercredi 26 mai	4
1.3 Jeudi 27 mai	5
<b>2 Résumés et articles</b>	<b>6</b>
2.1 Belhamadia Y.	7
2.2 Bertrand F.	14
2.3 Bois R. Fortin M. et Fortin A.	15
2.4 Bourgault Y. Rousseau O. et Rioux M.	24
2.5 Bruchon J. Pino-Munoz D. Drapier S. et Valdivieso F.	27
2.6 Chamberland É. et Fortin A.	34
2.7 Coupez T.	43
2.8 Delfour M. C.	49
2.9 Dompierre J.	52
2.10 Farhloul M.	53
2.11 Gander M. et Wanner G.	63
2.12 Guénette R.	108
2.13 Guibault F. et Sirois Y.	112
2.14 Habashi W.	114
2.15 Hecht F.	115
2.16 Manouzi H.	117
2.17 Mghazli Z. Alla A. et Masmoudi M.	118
2.18 Mokwinski Y. Guibault F. et Dufour S.	121
2.19 Pelletier D. Étienne S. et Garon A.	123
2.20 Picasso M.	146
2.21 Pierre R.	147
2.22 Remacle J.-F. Geuzaine C. et Marchandise É.	158
2.23 Rioux M. Bourgault Y. et Rousseau O.	159
2.24 Serghini A.	160
2.25 Sigouin O. Pierre P. et Deteix J.	161
2.26 Soulaïmani A.	171
2.27 Turbis P.	173
2.28 Wane B.	174

# 1 Programme

## 1.1 Mardi 25 mai

Mardi 25 mai			
08h45-09h00	<b>Mot de bienvenue</b>		
09h00-09h45	M. Gander <a href="#">63</a>	Université de Genève	<i>From Euler, Ritz and Galerkin to modern computing</i>
09h45-10h30	M. Picasso <a href="#">146</a>	École Polytechnique fédérale de Lausanne	<i>Adaptive finite elements with large aspect ratio</i>
10h30-11h00	<b>Pause café</b>		
11h00-11h30	É. Chamberland <a href="#">34</a>	Université Laval	<i>Défis de l'adaptation de maillages pour le contact en grandes déformations</i>
11h30-12h00	J. Bruchon <a href="#">27</a>	École des Mines de Saint-Étienne	
12h00-13h45	<b>Lunch</b>		
13h45-14h30	F. Hecht <a href="#">115</a>	Université Paris 6	<i>Error indicator and mesh adaptation in Freefem++</i>
14h30-15h15	T. Coupez <a href="#">43</a>	CEMEF	<i>Métrie par tenseur des distributions de longueur et erreur par arête pour maillage anisotrope</i>
15h15-15h45	<b>Pause café</b>		
15h45-16h30	D. Pelletier <a href="#">123</a>	École Polytechnique de Montréal	<i>Vérification, validation, incertitudes et maillages adaptatifs</i>
16h30-17h00	O. Sigouin <a href="#">161</a>	Université Laval	<i>Analyse de chaussées rigides aux arrêts d'autobus par éléments finis avec adaptation de maillages</i>
17h00-17h30	F. Guibault <a href="#">112</a>	École Polytechnique de Montréal	<i>Adaptation de maillages hybrides pour les problèmes de combustion</i>

## 1.2 Mercredi 26 mai

<b>Mercredi 26 mai</b>			
08h30-09h15	W. Habashi <a href="#">114</a>	Université McGill	<i>Toward a CFD-integrated approach to aircraft-rotorcraft-engine-propeller ice protection system design</i>
09h15-09h45	R. Pierre <a href="#">147</a>	Université Laval	<i>L'héritage étudiant de Michel Fortin : une étude archéologique récente</i>
09h45-10h15	F. Bertrand <a href="#">14</a>	École Polytechnique de Montréal	<i>Une mixture de techniques numériques pour un meilleur mélange</i>
10h15-10h45	<b>Pause café</b>		
10h45-11h15	Y. Bourgault <a href="#">24</a>	Université d'Ottawa	<i>Défis du calcul en électrophysiologie cardiaque</i>
11h15-11h45	M. Farhloul <a href="#">53</a>	Université de Moncton	<i>Méthodes d'éléments finis mixtes duales pour les fluides non Newtoniens</i>
11h45-12h15	R. Guénette <a href="#">108</a>	Université Laval	<i>Discrétisation d'une formulation mixte du Laplacien de Hodge à l'aide des formes différentielles</i>
12h15-14h00	<b>Lunch</b>		
14h00-14h45	M. Delfour <a href="#">49</a>	Université de Montréal	<i>Représentation et régularité minimale de la surface moyenne en théorie des coques</i> <i>Approximation des EDP stochastiques par la méthode des éléments finis</i>
14h45-15h15	H. Manouzi <a href="#">117</a>	Université Laval	
15h15-15h45	<b>Pause café</b>		
15h45-16h15	Z. Mghazli <a href="#">118</a>	Université Ibn Tofail	<i>Développement asymptotique topologique et adaptation de maillage</i>
16h15-16h45	A. Serghini <a href="#">160</a>	Université Laurentienne	<i>Quelques techniques de stabilisation pour les problèmes d'advection-diffusion</i>
16h45-17h15	A. Soulaïmani <a href="#">171</a>	ETS	<i>Méthodes numériques pour des problèmes à frontières mobiles</i>
18h00	<b>Coquetel et Banquet</b>		

### 1.3 Jeudi 27 mai

<b>Jeudi 27 mai</b>			
09h00-09h45	M. Fortin <a href="#">15</a>	Université Laval	<i>Adaptation et maillages optimaux</i>
09h45-10h30	J.-F. Remacle <a href="#">158</a>	Université catholique de Louvain	<i>High quality surface remeshing using harmonic maps</i>
10h30-11h00	<b>Pause café</b>		
11h00-11h30	M. Rioux <a href="#">159</a>	Université d'Ottawa	<i>Le couplage coeur-thorax avec interfaces définies par ensembles de niveau</i>
11h30-12h00	P. Turbis <a href="#">173</a>	Université de Montréal	<i>Estimation d'erreur a posteriori pour les modèles de flammelette sous-maille</i>
12h00-13h45	<b>Lunch</b>		
13h45-14h30	J. Dompierre <a href="#">52</a>	Université Laurentienne	<i>Vérification of 3D anisotropic adaptative methods</i>
14h30-15h15	Y. Belhamadia <a href="#">7</a>	Université d'Alberta	<i>Adaptation de maillages en électrocardiologie</i>
15h15-15h45	<b>Pause café</b>		
15h45-16h15	Y. Mokwinski <a href="#">121</a>	École Polytechnique de Montréal	<i>Adaptation de maillages pour les problèmes à surfaces libres instationnaires</i>
16h15-16h45	R. Bois <a href="#">15</a> et B. Wane <a href="#">174</a>	Université Laval	<i>Adaptation, estimateur hiérarchique et applications</i>
16h45	<b>Mot de la fin</b>		

## 2 Résumés et articles

Le lecteur trouvera dans ce qui suit une liste de résumés des présentations mais aussi, dans certains cas, des articles plus élaborés tous classés par ordre alphabétique.

# Adaptation de maillages en électrocardiologie

Youssef Belhamadia

*Université de l'Alberta,*

*Campus saint-Jean et département de mathématiques*

*Correspondance à: [youssef.belhamadia@ualberta.ca](mailto:youssef.belhamadia@ualberta.ca)*

## Résumé

Dans cet article, nous proposons une méthode numérique tridimensionnelle basée sur les techniques d'adaptation de maillage anisotrope pour les problèmes en électrocardiologie. Cette méthode permet de déterminer une solution numérique précise tout en réduisant le nombre des noeuds des maillages. Les résultats numériques seront validés par un cas test tridimensionnel des ondes spirales.

**Mots clés:** *Modèle monodomaine, adaptation de maillage, maillages anisotropes, fibrillation ventriculaire.*

## 1. Introduction

La propagation d'ondes électriques dans le coeur provoque la contraction ventriculaire. Les problèmes de conduction électrique dans le coeur engendrent des désynchronisations de la contraction spontanée du coeur. Par conséquent, ils perturbent l'efficacité de l'éjection du sang dans tout le corps humain. La modélisation numérique joue un rôle de plus en plus prépondérant dans ce domaine et a démontré récemment sa grande utilité permettant une meilleure compréhension de ce comportement.

Du point de vue mathématique, le potentiel d'action dans le coeur est modélisé par le modèle monodomaine. La résolution numérique de ce modèle n'est pas une tâche facile et plusieurs difficultés restent à surmonter, entre autres, l'utilisation de maillage régulier ne permet pas d'obtenir une bonne prédiction de la propagation et de la durée du potentiel transmembranaire. Plusieurs méthodes ont été développées pour surmonter certains de ces défis. Nous citons par exemple les techniques du calcul parallèle (Colli Franzone et Pavarino [1]), les schémas numériques temporels implicites et semi-implicites (Bourgault et coauteurs [2] et [3]), les méthodes de séparation d'opérateur (Lines et co-auteur [4]) ainsi que les techniques de maillages non structurés (Bourgault et coauteurs [2], Ying [5] et Colli Franzone et coauteurs [6]).

Dans nos travaux [7], [8] et [9], nous avons proposé des algorithmes bi- et tri-dimensionnels d'adaptation de maillage instationnaire pour le modèle monodomaine et bidomaine. Un schéma implicite d'ordre deux a été aussi utilisé. L'ensemble de ces techniques a permis d'obtenir une très bonne solution numérique tout en réduisant le temps de calcul. Dans ce travail, nous

études l'application de l'adaptation de maillage anisotrope dans le cas tridimensionnel des ondes spirales. Ceci joue un rôle essentiel dans la compréhension du mécanisme de la fibrillation ventriculaire, qui se produit quand la propagation de l'onde électrique devient chaotique et provoque un asynchronisme total de la contraction du coeur. La méthode numérique proposée produit des maillages anisotropes parfaitement adaptés au voisinage du front de dépolarisation-repolarisation et aussi permet de réduire le nombre des noeuds du maillage.

## 2. Modèle mathématique et Adaptation de maillage

Le modèle monodomaine se décrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla U) + I_{\text{ion}}(U, V) + I_s, \\ \frac{\partial V}{\partial t} = G(U, V). \end{cases} \quad (1)$$

Le potentiel transmembranaire est représenté par la variable  $U$ .  $V$  représente la variable de recouvrement et les termes non linéaires  $I_{\text{ion}}(U, V)$  et  $G(U, V)$  dépendent du modèle ionique. Nous utilisons dans ce travail le modèle Aliev-Panfilov suivant :

$$I_{\text{ion}} = kU(U - a)(1 - U) - UV \text{ et } G(U, V) = \left( \epsilon + \frac{\mu_1 V}{\mu_2 + U} \right) (-V - kU(U - a - 1)).$$

Dans nos résultats numériques, la méthode des éléments finis est utilisée avec une approximation quadratique en espace ( $P_2$ ) et un schéma implicite d'ordre deux en temps (schéma de Gear). Les techniques d'adaptation de maillage sont basées sur l'estimateur d'erreur métrique permettant de produire des maillages adaptés fortement anisotropes. Pour plus de détails, nous référons aux Habashi et coauteurs [10, 11, 12], Hecht et Mohammadi [13] et Belhamadia et coauteurs [14].

Comme pour tous les problèmes instationnaires, un algorithme d'adaptation de maillage joue un rôle très important et nous proposons pour le modèle monodomaine l'algorithme suivant :

1. À partir des solutions  $U^{(n-1)}, U^{(n)}, V^{(n-1)}$  et  $V^{(n)}$  sur le maillage  $\mathcal{M}^{(n)}$  au temps  $t^{(n)}$  ;
2. Résoudre le système (1) sur le maillage  $\mathcal{M}^{(n)}$  pour obtenir une première approximation des solutions  $\tilde{U}^{(n+1)}$  et  $\tilde{V}^{(n+1)}$  au temps  $t^{(n+1)}$  ;
3. Adapter le maillage sur les solutions  $\frac{\tilde{U}^{(n+1)} + U^{(n)} + U^{(n-1)}}{3}$  et  $\frac{\tilde{V}^{(n+1)} + V^{(n)} + V^{(n-1)}}{3}$  pour obtenir le nouveau maillage  $\mathcal{M}^{(n+1)}$  ;
4. Réinterpoler  $U^{(n-1)}, U^{(n)}, V^{(n-1)}$  et  $V^{(n)}$  sur le maillage  $\mathcal{M}^{(n+1)}$  ;

5. Résoudre le système (1) sur  $\mathcal{M}^{(n+1)}$  pour obtenir les solutions  $U^{n+1}$  et  $V^{n+1}$ .

L'étape 3 dépend du schéma numérique utilisé pour la discrétisation en temps. Dans notre cas, nous adaptons le maillage sur les solutions au temps  $t^{(n-1)}$ ,  $t^{(n)}$ , et  $t^{(n+1)}$  car un schéma implicite d'ordre deux est utilisé.

### 3. Résultats Numériques

La méthode d'adaptation de maillage instationnaire sera maintenant appliquée à un cas tridimensionnel des ondes spirales. Le domaine de calcul est un cube de dimension  $[0, 100] \times [0, 100] \times [0, 100]$ . Des conditions de Neumann sont imposées sur les frontières et les autres paramètres sont :

$k = 8$	$a = 0.15$
$\epsilon = 0.002$	$\mu_1 = 0.2$
$\mu_2 = 0.3$	$D = 1$
$\Delta t = 0.5$	

Pour produire une onde spirale, les conditions initiales sont construites de la façon suivante :

$$U(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{(x-100)^2 + (y-100)^2 + (z-100)^2} < 30 \\ 0 & \text{si } \sqrt{(x-100)^2 + (y-100)^2 + (z-100)^2} \geq 30, \end{cases} \quad \text{et } V(\mathbf{x}, 0) = 0.$$

Au temps  $t = 50$  nous appliquons un stimulus sur une partie du domaine de calcul. La figure 1 illustre les conditions initiales au temps  $t = 50$  et  $t = 65$  et ce pour une coupe  $z = 50$ . La spirale sera complètement formée à partir du  $t = 100$  et ensuite cette spirale peut être considérée comme solution de départ pour les autres résultats numériques.

Pour obtenir des résultats numériques précis, le nombre de noeuds nécessaires dans un maillage doit être très élevé ce qui engendre un coût en temps de calcul énorme (voir [1], et [5]). Nous référons aussi à Belhamadia et coauteurs [9] pour plus de résultats quantitatifs dans le cas d'un cube. La figure 2 illustre l'évolution en temps des maillages. Nous avons adapté sur les deux solutions  $U$  et  $V$  ce qui nous a permis d'avoir une concentration d'éléments près de front de dépolarisation-repolarisation aussi de réduire le nombre total d'éléments (181000 tétraèdres). Le potentiel transmembranaire et le front  $U = 0.5$  au temps  $t = 35$  sont présentés à la figures 3.

## 4. Conclusions

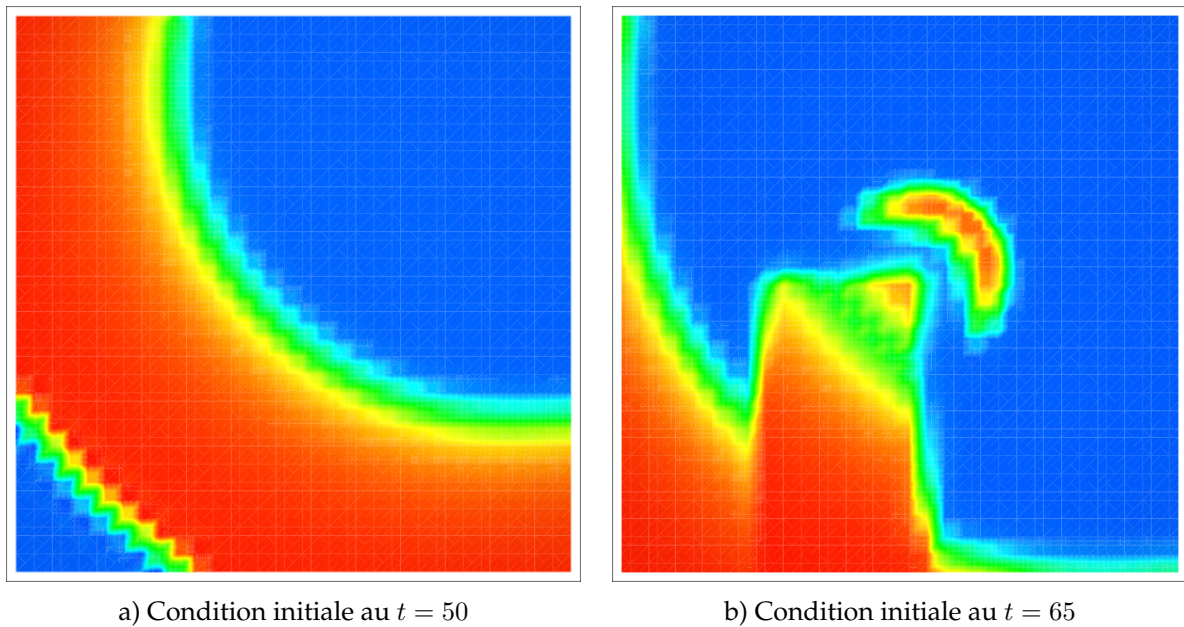
Une stratégie adaptative a été utilisée pour un cas tridimensionnel des ondes spirales. Nous avons obtenu des maillages anisotropes raffinés au voisinage de front de dépolarisation repolarisation. Le nombre total d'éléments a été réduit tout en produisant des solutions numériques précises.

## 5. Remerciement

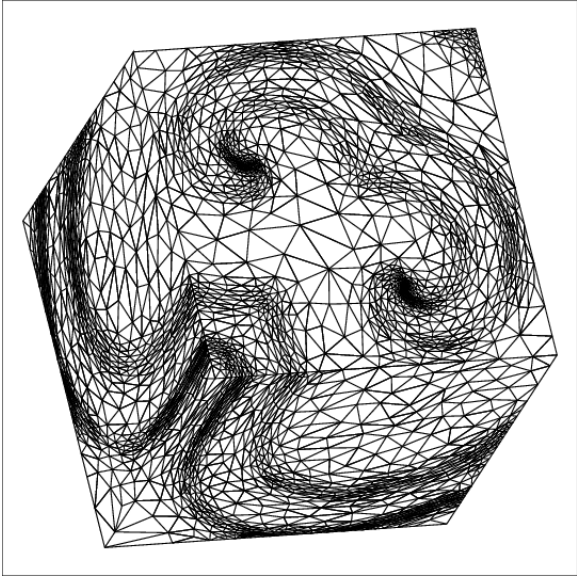
L'auteur remercie le conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) pour le support financier.

## Références

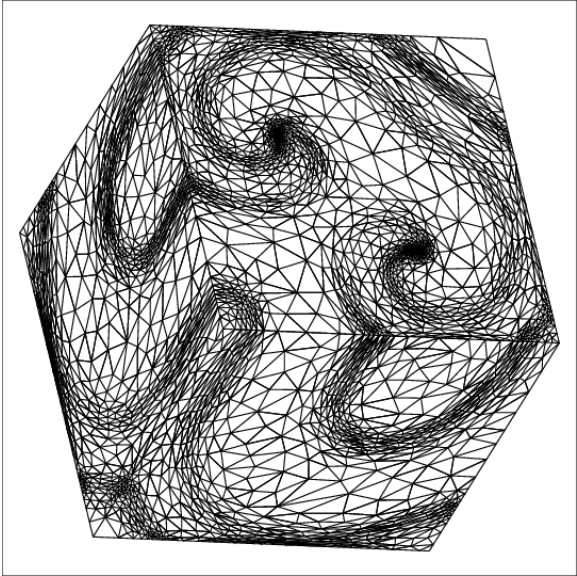
- [1] P. Colli Franzone and L. F. Pavarino. A Parallel Solver for Reaction-Diffusion Systems in Computational Electrophysiology. *Math. Models and Methods in Applied Sciences*, 14(6) :883–911, 2004.
- [2] Y. Bourgault, M. Ethier, and V.G. LeBlanc. Simulation of Electrophysiological Waves With an Unstructured Finite Element Method. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(4) :649–662, 2003.
- [3] M. Ethier and Y. Bourgault. Semi-implicit time-discretization schemes for the bidomain model. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 46(5) :2443–2468, 2008.
- [4] G.T. Lines, P. Grottum, and A. Tveito. Modeling the electrical activity of the heart : A bidomain model of the ventricles embedded in a torso. *Comput. Visual. Sc.*, 5 :195–213, 2003.
- [5] W. Ying. *A Multilevel Adaptive Approach for Computational Cardiology*. PhD thesis, Duke University, Durham, USA, 2005.
- [6] P. Colli Franzone, P. Deufhard, B. Erdmann, J. Lang, and L. F. Pavarino. Adaptivity in Space and Time for Reaction-Diffusion Systems in Electrophysiology. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(3) :942–962, 2006.
- [7] Y. Belhamadia. A Time-Dependent Adaptive Remeshing for Electrical Waves of the Heart. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 55(2, Part-1) :443–452, 2008.
- [8] Y. Belhamadia. An Efficient Computational Method for Simulation of Electrophysiological Waves. *Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc.*, pages 5922–5925, 2008.

FIGURE 1 – Coupe  $z = 0$  des conditions initiales

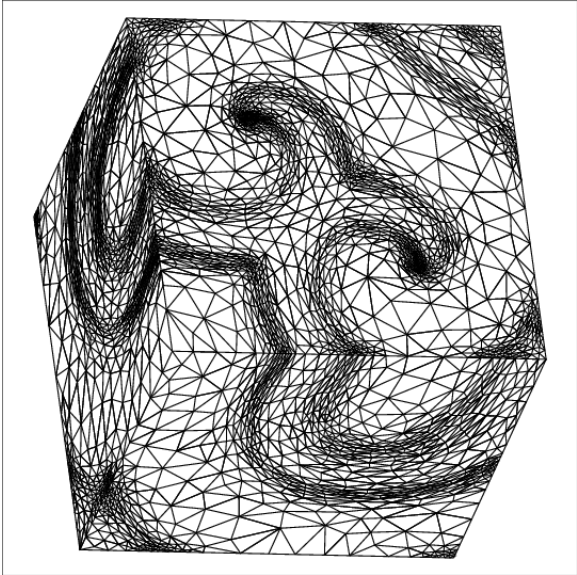
- [9] Y. Belhamadia, A. Fortin, and Y. Bourgault. An Accurate Numerical Method for Monodomain Equations Using a Realistic Heart Geometry. *Mathematical Biosciences*, 220(2) :89–101, 2009.
- [10] W. G. Habashi, J. Dompierre, Y. Bourgault, D. Ait Ali Yahia, M. Fortin, and M.-G. Vallet. Anisotropic Mesh Adaptation : Towards User-Independent, Mesh-Independent and Solver-Independent CFD. Part I : General Principles. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 32 :725–744, 2000.
- [11] D. Ait Ali Yahia, G. Baruzzi, W. G. Habashi, M. Fortin, J. Dompierre, and M.-G. Vallet. Anisotropic Mesh Adaptation : Towards User-Independent, Mesh-Independent and Solver-Independent CFD. Part II : Structured Grids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 39 :657–673, 2002.
- [12] J. Dompierre, M.-G. Vallet, Y. Bourgault, M. Fortin, and W. G. Habashi. Anisotropic Mesh Adaptation : Towards User-Independent, Mesh-Independent and Solver-Independent CFD. Part III : Unstructured Meshes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 39 :675–702, 2002.
- [13] F. Hecht and B. Mohammadi. Mesh Adaptation by Metric Control for Multi-Scale Phenomena and Turbulence. *AIAA*, 97–0859, 1997.
- [14] Y. Belhamadia, A. Fortin, and É. Chamberland. Three-Dimensional Anisotropic Mesh Adaptation for Phase Change Problems. *Journal of Computational Physics*, 201(2) :753–770, 2004.



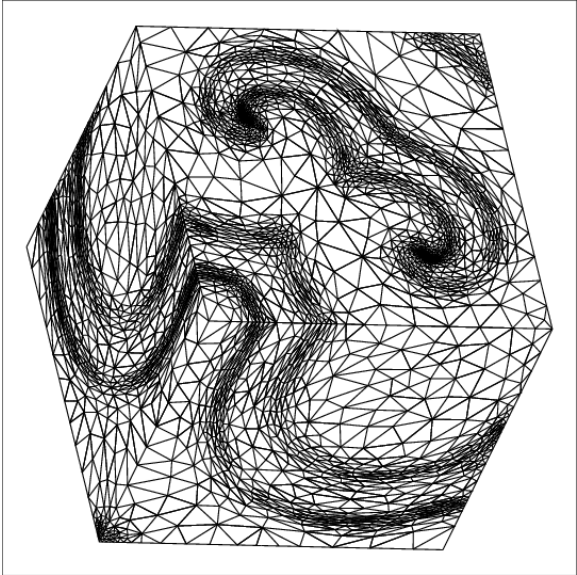
a)  $t = 10$



b)  $t = 15$

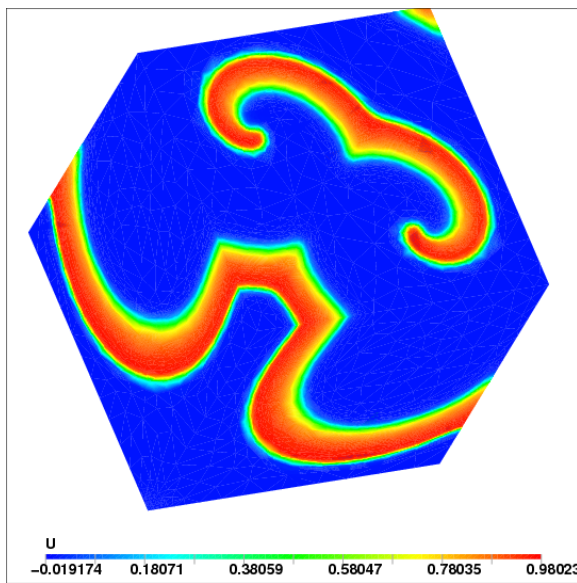


c)  $t = 25$

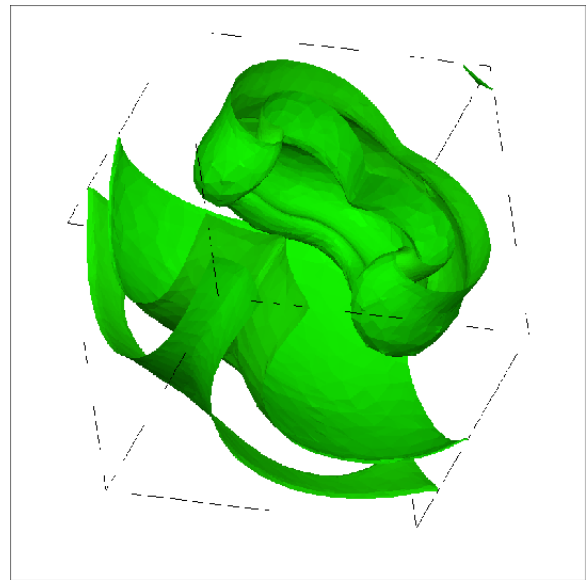


d)  $t = 35$

FIGURE 2 – Évolution du maillage dans le temps



a) Potentiel transmembranaire au temps  $t = 35$ .



b) Maillage au temps  $t = 35$ .

FIGURE 3 – Maillage et potentiel transmembranaire

## **UNE MIXTURE DE TECHNIQUES NUMÉRIQUES POUR UN MEILLEUR MÉLANGE**

**François Bertrand**

*Département de génie chimique, École Polytechnique de Montréal,  
B.P. 6079, Stn. CV, Montréal, QC, CANADA, H3C 3A7*

Bien que la modélisation numérique des écoulements dans le domaine du mélange ait suscité énormément d'intérêt depuis plus de 30 ans, l'utilité de la simulation dans ce domaine n'est pas toujours claire. Cette présentation a pour but d'apporter quelques éléments de réponse à ce sujet au moyen d'une revue des stratégies de modélisation les plus significatives qui ont été développées pour la simulation des écoulements de fluides et de solides dans divers systèmes de mélange. Les exemples qui seront présentés serviront à mettre en évidence les progrès accomplis depuis la fin des années 70 ainsi que certains défis qui devront être relevés dans les années à venir.

# Maillages optimaux anisotropes

Richard Bois<sup>1</sup>, Michel Fortin<sup>1</sup>, André Fortin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>GIREF

Dépt. de mathématiques et de statistique

Université Laval, Québec, Canada

## Résumé

L'adaptation de maillage, lorsque soigneusement implémentée, est un outil extrêmement puissant pour améliorer la qualité et la précision de la solution d'une équation aux dérivées partielles obtenue, par exemple, d'une résolution par éléments finis. L'objectif est d'en améliorer la précision tout en maintenant le nombre de degrés de liberté au minimum. Pour y arriver, nous utilisons une réinterpolation de type hiérarchique de la solution et considérons l'estimateur d'erreur associé comme étant la différence entre celle-ci et la solution éléments finis. Nous montrons que cet estimateur produit des maillages «optimaux» dans le cas  $P^1$  avec plusieurs exemples à l'appui. D'autres exemples seront présentés pour le cas  $P^2$  même si l'optimalité n'est pas encore tout à fait établie dans ce cas.

*Mots clés:* Maillage optimal, anisotropie, estimateur hiérarchique, estimation des gradients

## 1. Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{R}^N$  ( $N = 2, 3$  dans la pratique) de frontière  $\Gamma$  lipschitzienne. Nous considérons, en raison de sa simplicité, le problème de convection-diffusion suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla u) + \mathbf{a} \cdot \nabla u & = f \text{ dans } \Omega \\ u & = g \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{D} = (D_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ , est la matrice de diffusion et  $\mathbf{a}$  la vitesse de convection. Nous allons appliquer notre méthode d'adaptation à ce problème mais elle est toutefois utilisable pour n'importe quel type de problèmes. Partant d'une discrétisation  $\mathcal{T}_0$  du domaine, nous allons résoudre ce problème par une méthode d'éléments finis classique lorsque le terme convectif est nul ( $\mathbf{a} = (0, 0)$ ) et dans le cas contraire, par la méthode «streamline upwind Petrov-Galerkin» (SUPG), telle que décrite dans [1]. Dans tous les cas, nous avons besoin d'une solution numérique du problème, dorénavant appelée  $u_h$ .

La question qui se pose maintenant est comment développer une méthode qui utilise seulement l'information contenue dans  $u_h$ , pour construire un nouveau maillage plus approprié à la solution du problème (1)? La réponse à cette question a fait l'objet de plusieurs travaux scientifiques comme la méthode de réinterpolation de Zienkiewicz et Zhu [2] figurant dans plusieurs

codes commerciaux. Ces méthodes conduisent cependant à des maillages isotropes et sont plus ou moins indépendantes du problème résolu. D'autres méthodes conduisent à des maillages anisotropes et utilisent la notion de «métrique» (Hecht et Mohammadi [3]). Elles sont basées sur le fait que l'erreur peut être bornée localement par une fonctionnelle quadratique qui dépend de la matrice hessienne de la solution  $u$ . Ces méthodes s'avèrent très efficaces pour des problèmes de mécanique des fluides compressibles (voir Habashi et al. [4]) où la solution possède des couches limites et des chocs. Cependant, nous allons voir que ces méthodes ne conduisent pas à des maillages optimaux. Le but de cet exposé sera donc d'expliquer comment pallier à cette difficulté. En particulier, nous allons développer une méthode qui ne dépendra que des dérivées premières de la solution  $u_h$  au lieu des dérivées secondes comme pour l'adaptation de maillages avec métrique. De plus, on montrera qu'elle donne des maillages optimaux au sens de d'Azevedo et Simpson [5] et potentiellement anisotropes lorsque la solution le permet, et ce sans aucune intervention spéciale.

La première partie de ce travail sera consacrée à la construction d'estimateurs d'erreur pour les cas  $u_h \in P^1(\Omega)$  et  $u_h \in P^2(\Omega)$  qui ne dépendent que d'une approximation des dérivées premières de  $u$ . Dans la deuxième partie, on détaille l'algorithme général d'adaptation et la stratégie employée. La notion de maillage optimal sera décrite en lien avec les travaux de Simpson et d'Azevedo [5]. Enfin, dans la dernière partie nous présenterons plusieurs exemples et nous comparerons les maillages obtenus avec ceux provenant de l'adaptation avec une métrique. Nous montrerons également que notre méthode est indépendante du problème en considérant différentes valeurs de  $D$  et de  $a$  dans l'équation 1.

## 2. Estimateur d'erreur

Soit  $u$  une fonction suffisamment régulière, solution du problème (1) et soit  $u_h$  une solution éléments finis de degré  $k$  par morceaux qui approche  $u$ . L'objectif principal est d'estimer l'erreur d'interpolation en supposant que la fonction  $u$  est bien entendu inconnue. L'estimateur hiérarchique est basé sur l'hypothèse qu'à partir d'une solution approximative  $u_h$  de degré  $k$ , il est possible de construire une approximation plus précise de degré  $k+1$  notée  $\hat{u}$ . On approxime ensuite l'erreur par la relation :

$$\|u - u_h\| \simeq \|\hat{u} - u_h\| \quad (2)$$

La construction de  $\hat{u}$  consiste à enrichir les fonctions de base de degré  $k$  ( $P^k$ ) pour y inclure les polynômes homogènes de degré  $k+1$  (notés  $R^{k+1}$ ) (voir Ndikumagenge [6]). On pose alors :

$$\hat{u} = u_h + r_h$$

où  $r_h \in R^{k+1}$ . L'erreur peut être estimée de manière très simple et efficace simplement par  $\|r_h\|$ .

La détermination de  $r_h$  nécessite la reconstruction du gradient  $\mathbf{g}_h$  de  $u_h$  aux noeuds mais

est complètement générale de sorte que cette estimation d'erreur est valide pour des solutions numériques  $u_h$  de degré quelconque. L'idée générale est la suivante. Si  $u_h$  est de degré  $k$ , on reconstruit un gradient  $\mathbf{g}_h = (g_x, g_y)$  de  $u_h$  également de degré  $k$  sur chaque élément. La fonction  $\hat{u} = u_h + r_h$  est donc une approximation de  $u$  et  $\mathbf{g}_h$  une approximation du gradient de  $u$ . On devrait alors avoir que les dérivées  $(k + 1)$ -ièmes de  $\hat{u}$  sont égales aux dérivées  $k$ -ièmes de la composante appropriée de  $\mathbf{g}_h$ . Cela représente un système linéaire de  $k+1$  équations très simple à résoudre. Par exemple, si  $k = 1$ , on devra résoudre le système de 3 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{r}_h}{\partial x^2} = \frac{\partial g_x}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \hat{r}_h}{\partial y^2} = \frac{\partial g_y}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \hat{r}_h}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_x}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

Si  $k = 2$ , le système a 4 équations faisant intervenir les différentes dérivées respectivement d'ordre trois et deux. On note que  $u_h$  n'intervient nulle part car ses dérivées  $(k + 1)$ -ièmes sont nulles. Les coefficients de  $r_h$  ne dépendent donc que des valeurs nodales de  $\mathbf{g}_h$ .

Cette construction donc s'appuie fortement sur l'existence de techniques précises d'évaluation des gradients aux noeuds. Heureusement, il en existe plusieurs comme celles de Zienkiewicz et Zhu [7] mais nous avons opté pour celle de Zhang et Naga [8], beaucoup plus fiable et précise. Plus la reconstruction de  $\mathbf{g}_h$  sera précise, plus l'estimateur sera précis. Notons enfin qu'il n'est pas nécessaire de reconstruire le Hessian de la solution, contrairement à l'adaptation basée sur une métrique.

### 3. Remaillage

Notre stratégie globale d'adaptation est d'obtenir le meilleur niveau d'erreur possible pour un nombre de sommets  $n_s$  donné et ce tout en équidistribuant l'erreur sur le domaine. Plus précisément, on souhaite que  $|\hat{u} - u_h| = c$  dans tout le domaine et donc

$$e_\Omega^2 = \int_\Omega |r_h|^2 dx = c^2 \text{mes}(\Omega) \text{ d'où } c^2 = \frac{e_\Omega^2}{\text{mes}(\Omega)}.$$

où  $e_\Omega$  est le niveau d'erreur cible en norme  $L^2$  pour le nombre de sommets donné  $n_s$ . Pour obtenir ce niveau d'erreur en tout moment lors de l'adaptation, il suffit de considérer le taux de convergence de la méthode d'éléments finis choisi. Par exemple, dans le cas  $P^1$ , la méthode est d'ordre 2. Puisque pour des maillages réguliers on a  $h = \frac{1}{\sqrt{n_s}}$  alors en comparant les erreurs on

obtient la formule

$$e_{\Omega} = \frac{e_{\Omega}^0 \cdot \mathbf{n}_s^0}{\mathbf{n}_s}$$

où  $\mathbf{n}_s^0$  et  $e_{\Omega}^0$  sont respectivement le nombre de sommets et l'erreur sur le maillage avant adaptation. Un raisonnement similaire est utilisé pour le cas  $P^2$  et on obtient la formule

$$e_{\Omega} = e_{\Omega}^0 \left( \frac{\mathbf{n}_s^0 + \mathbf{n}_a^0}{4(\mathbf{n}_s - \sqrt{\mathbf{n}_s}) + 1} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Elle est obtenue en considérant le fait que le nombre d'éléments dans un maillage régulier est  $\mathbf{n}_e = 2(\sqrt{\mathbf{n}_s} - 1)^2$  et en appliquant l'identité d'Euler  $\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_a + \mathbf{n}_e = 1$ .

Par suite, ceci implique que sur chaque élément  $K$  (ou sur un sous-ensemble d'éléments), l'erreur  $e_K$  doit satisfaire :

$$e_K^2 = \frac{e_{\Omega}^2 \text{mes}(K)}{\text{mes}(\Omega)}$$

Pour obtenir l'équidistribution, on tente de minimiser la semi-norme  $H^1$  de l'erreur :

$$\int_{\Omega} |\nabla r_h|^2 dx \quad (3)$$

Avec cette information, on peut maintenant utiliser des opérations locales pour modifier le maillage. On va ajouter des sommets là où l'erreur est trop grande et supprimer des sommets là où l'erreur est trop petite. Pour équirépartir l'erreur, il est logique de retourner les arêtes et de bouger les sommets de sorte que l'on minimise la semi-norme  $H^1$  de l'erreur. Nous montrerons que cette approche conduit à des maillages anisotropes de façon très naturelle.

## 4. Résultats numériques

Pour nos tests numériques, nous utilisons la méthode des solutions manufacturées. On considère les fonctions analytiques suivantes :

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= e^{-100((x-0.5)^2+(y-0.5)^2)} \\ f_3(x, y) &= e^{-25x^2} + e^{-25y^2} \\ M(x, y) &= e^{-3((x+0.3)^2+(y+0.2)^2)} - e^{-3((x-0.3)^2+(y-0.4)^2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tanh(10 \sin(x^2 - y^2) \cos(x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

où  $f_2$  et  $f_3$  suivent la même notation que dans [9] et  $M$  est la fonction «Montagnes et vallées» telle que proposée dans George [10]<sup>1</sup>. On calcule ensuite le second membre  $f$  de l'équation (1) de sorte que l'une ou l'autre des ces fonctions en soit la solution. On résoud par la suite comme

<sup>1</sup>Il y a une erreur dans la définition de cette fonction dans [10].

---

si on ne connaissait pas la solution et ceci nous permet de faire toutes les analyses de convergence, la validation du code, etc.

À la figure 1, on voit une comparaison entre un maillage adapté hiérarchique et un autre adapté avec une métrique. Les différences sont apparentes surtout dans la région où la matrice hessienne de  $f_2$  n'est pas définie positive. On observe à la figure 2 l'indépendance du maillage optimal par rapport à l'opérateur différentiel utilisé. Deux opérateurs différents sont utilisés en changeant les valeurs de  $D$  et de  $\alpha$ . Les maillages obtenus sont essentiellement les mêmes. Pour illustrer que notre stratégie adaptative peut, au besoin mener à des maillages anisotropes, on présente à la figure 3 les éléments extrêmement allongés dans les zones où on a une dérivée nulle dans une direction (pour la fonction  $f_3$ ).

Finalement, un test plus difficile est exécuté en considérant la fonction  $M$  qui possède beaucoup de variations brusques sur une géométrie courbe. En partant du maillage initial très grossier illustré à la figure 4, on arrive à un maillage remarquablement bien adapté pour cette fonction.

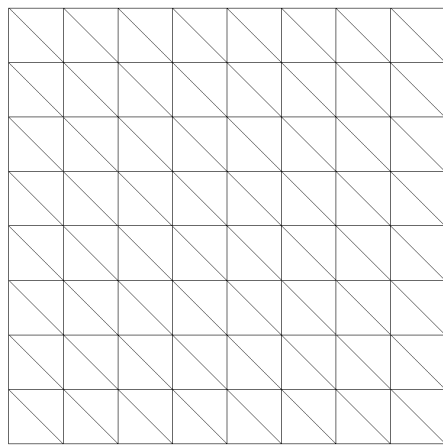
## 5. Conclusions

Un nouvel estimateur d'erreur est présenté et on montre par des tests numériques qu'il permet d'obtenir des maillages optimaux au sens de Simpson et d'Azevedo. L'utilisation d'opérations locales permet de plus d'obtenir des maillages anisotropes. La stratégie globale d'adaptation est indépendante de l'opérateur différentiel utilisé pour calculer  $u_h$ . Les maillages optimaux ne dépendent que la solution elle-même et pas de l'opérateur différentiel.

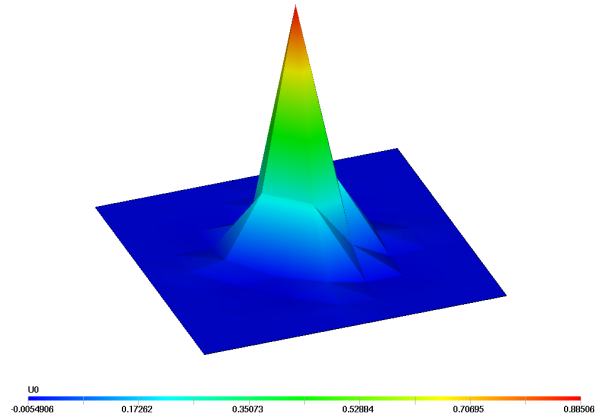
## Références

- [1] T. J. R. Hughes and A. N. Brooks. *A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion*, volume 34 of *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, pages 19–35. Amer. Soc. of Mech. Eng., New York, 1979.
- [2] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 24 :337–357, 1987.
- [3] F. Hecht and B. Mohammadi. Mesh Adaptation by Metric Control for Multi-Scale Phenomena and Turbulence. *AIAA*, 97–0859, 1997.
- [4] W. G. Habashi, J. Dompierre, Y. Bourgault, M. Fortin, and M.-G. Vallet. Certifiable Computational Fluid Dynamics Through Mesh Optimization. *AIAA Journal*, 36 :703–711, 1998.
- [5] E.F. D'Azevedo and R.B. Simpson. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numerische Mathematik*, 59(1) :321–348, 1991.

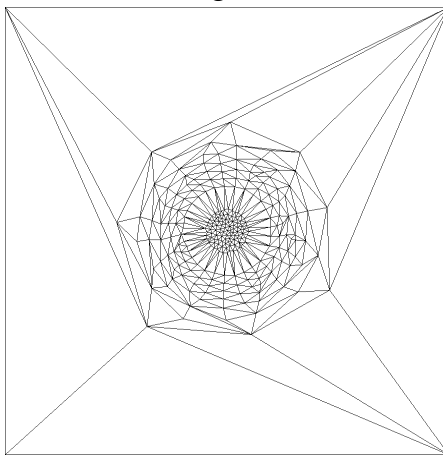
- [6] F. Ndikumagenge. Estimateur d'erreur a posteriori basé sur une méthode hiérarchique et adaptation de maillage. Master's thesis, Université Laval, Québec, Canada, 2001.
- [7] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimate, Part I : The Tecovery Technique. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33 :1331–1364, 1992.
- [8] Zhimin Zhang and Ahmed Naga. A new finite element gradient recovery method : Superconvergence property. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(4) :1192–1213, 2005.
- [9] C. Manole, M.-G. Vallet, J. Dompierre, and F. Guibault. Benchmarking second order derivatives recovery of a piecewise linear scalar field. *Proceedings of the 17th IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation*, 2005.
- [10] Paul-Louis George, editor. *Maillage et adaptation*. Mécanique et ingénierie des matériaux. Hermès Science Publication, Paris, 2001.



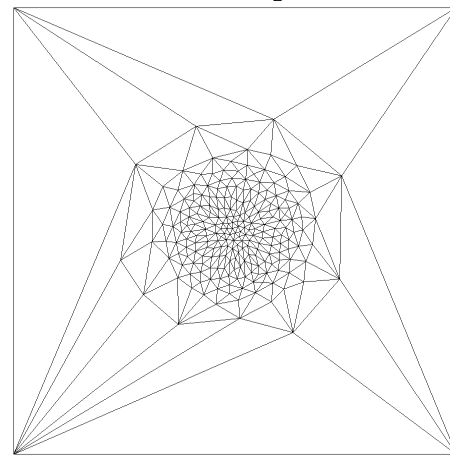
Maillage initial



Solution correspondante

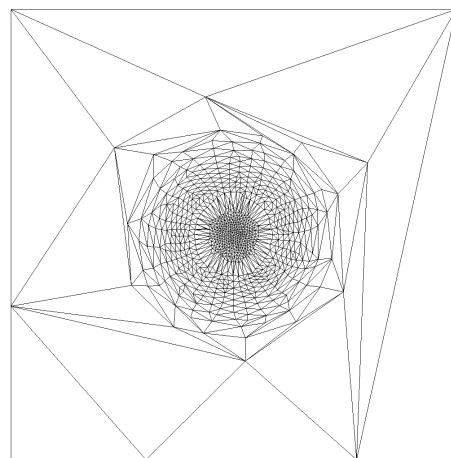


Maillage adapté hiérarchique

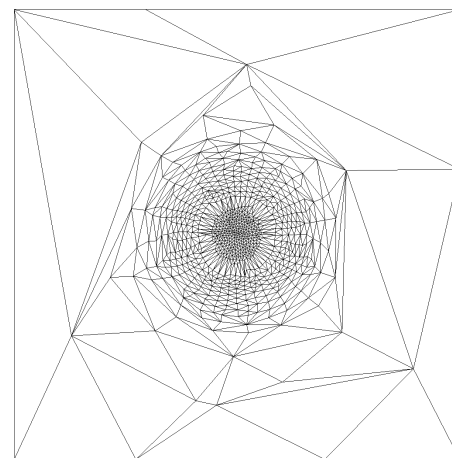


Maillage adapté métrique

FIG. 1 – Fonction  $f_2$

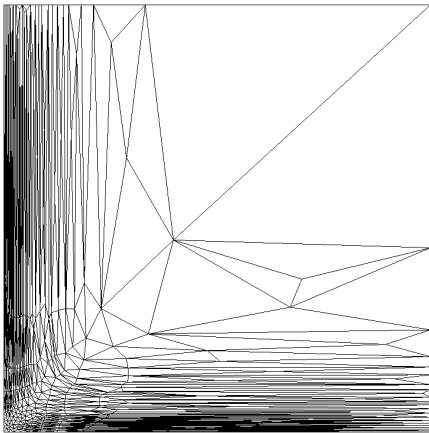


$$D = \begin{pmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{a} = (0, 0)$$

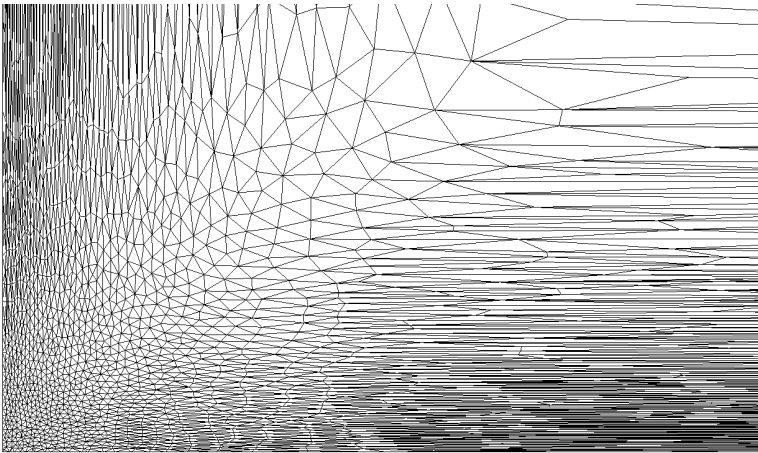


$$D = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{a} = (-y, x)$$

FIG. 2 – Maillages obtenus pour différents opérateurs différentiels



Maillage adapté



Zoom sur le coin inférieur gauche

FIG. 3 – Fonction  $f_3$

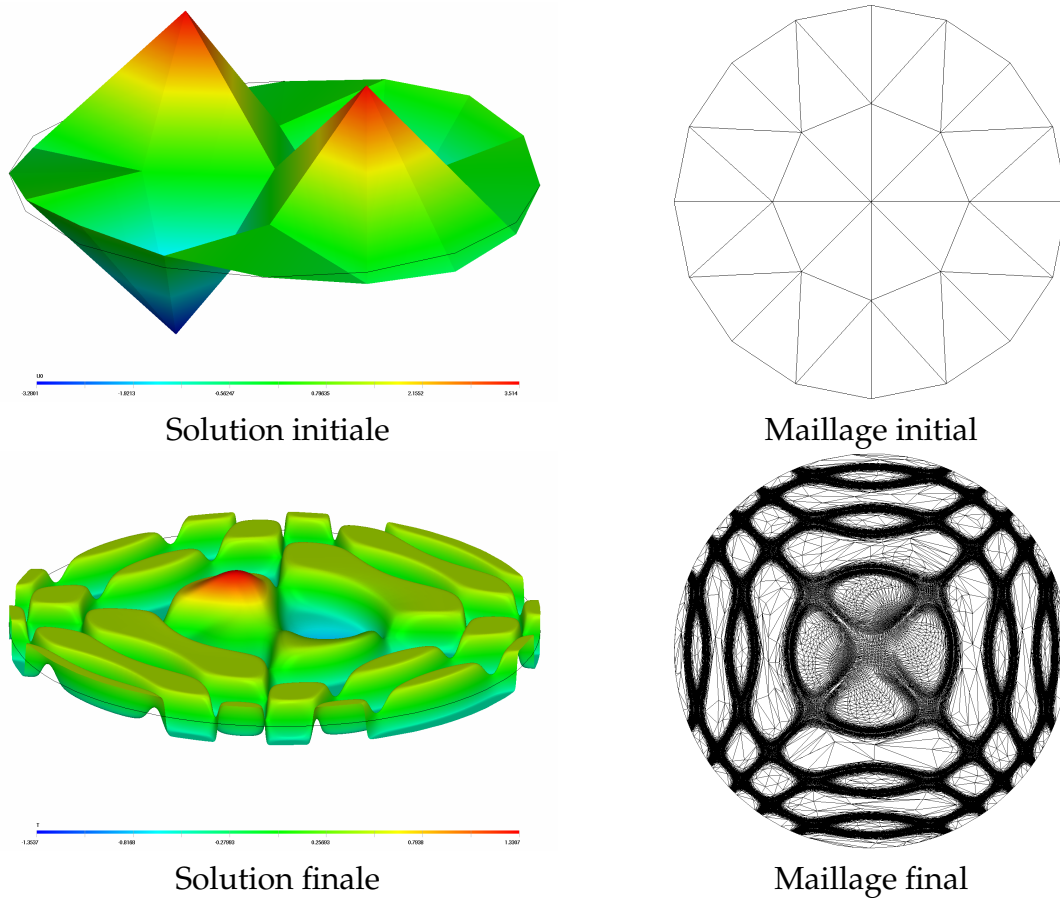


FIG. 4 – Fonction «Montagnes et vallées»

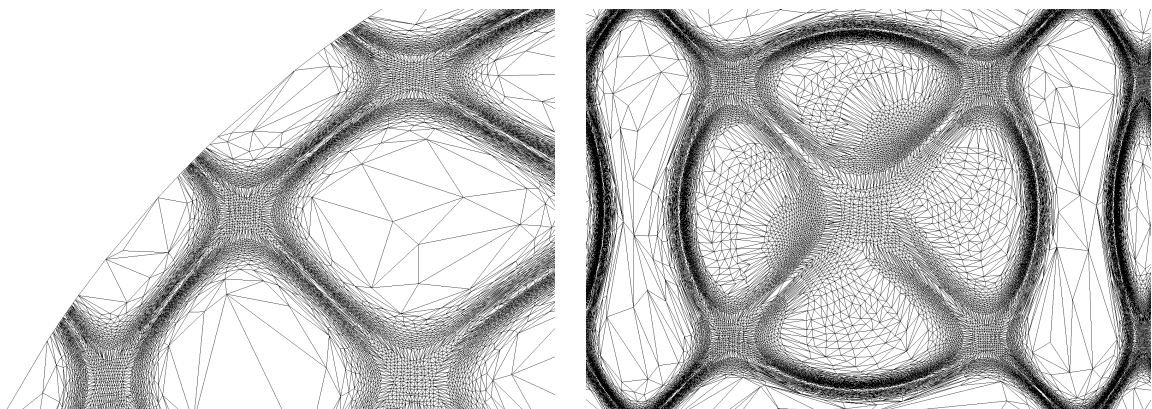


FIG. 5 – Montagnes et vallées : différents zooms sur le maillage final

# Défis du calcul en électrophysiologie cardiaque

Yves Bourgault, Olivier Rousseau, Myriam Rioux

*Mathématiques et statistique, Université d'Ottawa, Canada. Correspondance à: [ybourg@uottawa.ca](mailto:ybourg@uottawa.ca)*

## Résumé

Cet article présente des méthodes pour calculer la propagation du potentiel d'action dans une géométrie du coeur d'un patient, incluant la segmentation d'images obtenues par tomographie, le recouvrement de l'orientation des fibres cardiaques, le maillage de la géométrie segmentée ainsi que le calcul par éléments finis de la propagation d'ondes électriques. Les défis à relever à chacune des étapes de cette modélisation, notamment les aspects calculatoires, seront détaillés.

## 1. Géométrie du coeur

Peu de géométries réalistes du coeur sont actuellement disponibles et utilisées pour simuler le comportement électro-mécanique du coeur, notamment via des méthodes de type éléments finis. Une géométrie couramment utilisée est le coeur de chien qui a été obtenu par LeGrice et Hunter [1] via des techniques de dissection. Cette géométrie vient avec des données représentant l'orientation des fibres cardiaques, un ingrédient essentiel puisque le muscle cardiaque est un matériau orthotropique tant pour la conduction électrique du potentiel d'action que sa réponse élastique. De nos jours, construire des géométries d'organe à partir d'images 3D de patients est possible quoique cela demeure toujours un défi d'obtenir une géométrie précise avec suffisamment de détails anatomiques puis de mailler proprement la géométrie segmentée. Par ailleurs, les techniques d'imagerie médicale actuelles ne permettent pas de retrouver l'orientation des fibres sur ces géométries de coeur de patients, vu les temps d'acquisition de l'ordre des dizaines d'heures par DT-RMN.

Nous proposons ici une méthode innovatrice de reconstruction complète d'un modèle géométrique du coeur d'un patient. La figure 1 illustre les étapes de cette approche. La géométrie du coeur est segmentée à partir d'images 3D d'un patient à l'aide d'une variante de la méthode variationnelle de Chan-Vese [2]. Cette méthode ne fait aucune hypothèse sur la topologie de l'organe à segmenter, contrairement à la plupart des méthodes actuelles qui procèdent par registration d'une géométrie à topologie fixe du coeur. A notre connaissance, nous sommes les premiers à appliquer une méthode de Chan-Vese pour segmenter un coeur. Lorsque des images de bonne résolution sont disponibles, il est possible de segmenter des détails anatomiques tels les piliers à l'intérieur des ventricules et les orifices des valves cardiaques. Un champ de fibres cardiaques est ensuite généré en projetant l'atlas de fibres Asclepios [3] sur la géométrie segmentée à l'aide d'un difféomorphisme obtenu numériquement. La géométrie segmentée étant

décrite par l'ensemble de niveau d'une fonction, le mailler Distmesh [4] est ensuite utilisé pour générer un premier maillage du coeur. Le champs de fibres est ensuite réinterpolé sur le maillage.

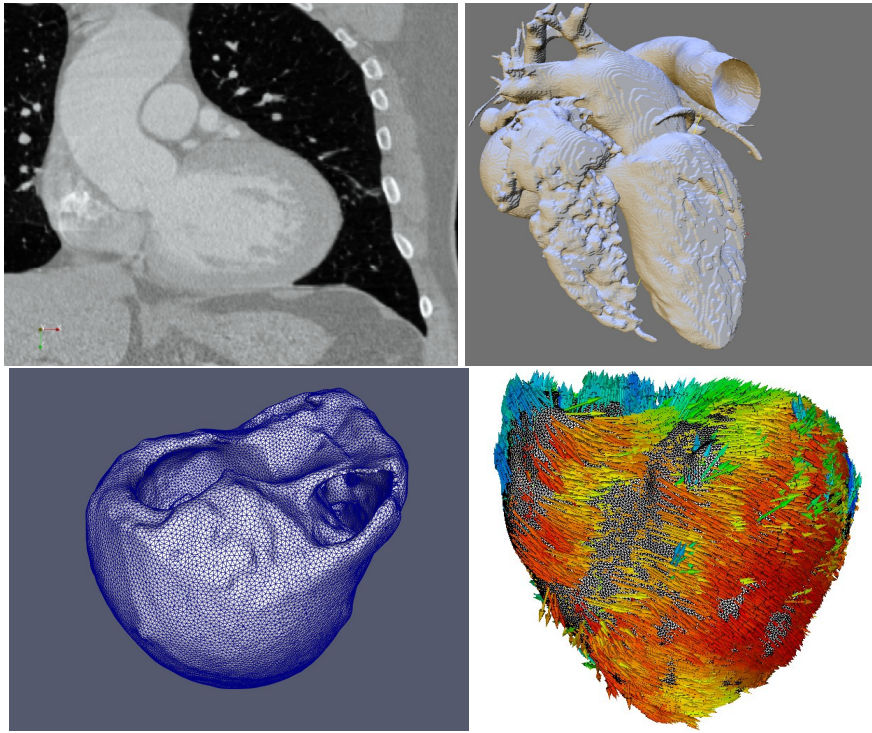


FIG. 1 – De gauche à droite, puis de haut en bas : image CT du patient, cavités des ventricules représentées par la surface de niveau de la fonction de segmentation, peau du maillage du coeur et champs de fibres à la surface du coeur.

## 2. Modèle en électrophysiologie cardiaque

Le modèle mono-domaine décrit l'évolution des ondes électriques dans le coeur :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + I(v, w) - \nabla \cdot (\sigma \nabla v) = I_e \quad \text{and} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = g(v, w),$$

où  $v$  est le potentiel trans-membrane,  $w$  représente l'activité ionique des cellules cardiaques,  $I(v, w)$  le courant trans-membrane total dû aux ions,  $I_e$  un courant externe appliqué par exemple via un stimulateur cardiaque. Le modèle est isotropique transverse, i.e. que le tenseur de conductance  $\sigma$  est isotrope dans les directions orthogonales aux fibres et peut donc être déduit du champs de fibres aux noeuds du maillage. La figure 2 montre l'évolution du potentiel trans-membrane au cours du temps obtenu par une méthode d'éléments finis P1 et le schéma BDF2 implicite. La taille des maillages uniformes requis pour ce genre de calculs (en principe quelques dizaines de millions de tétraèdres) nécessitent des solveurs itératifs "sans matrice" et des pas

de temps de l'ordre du dixième de milliseconde alors qu'un seul battement cardiaque dure entre 350 et 1000ms.

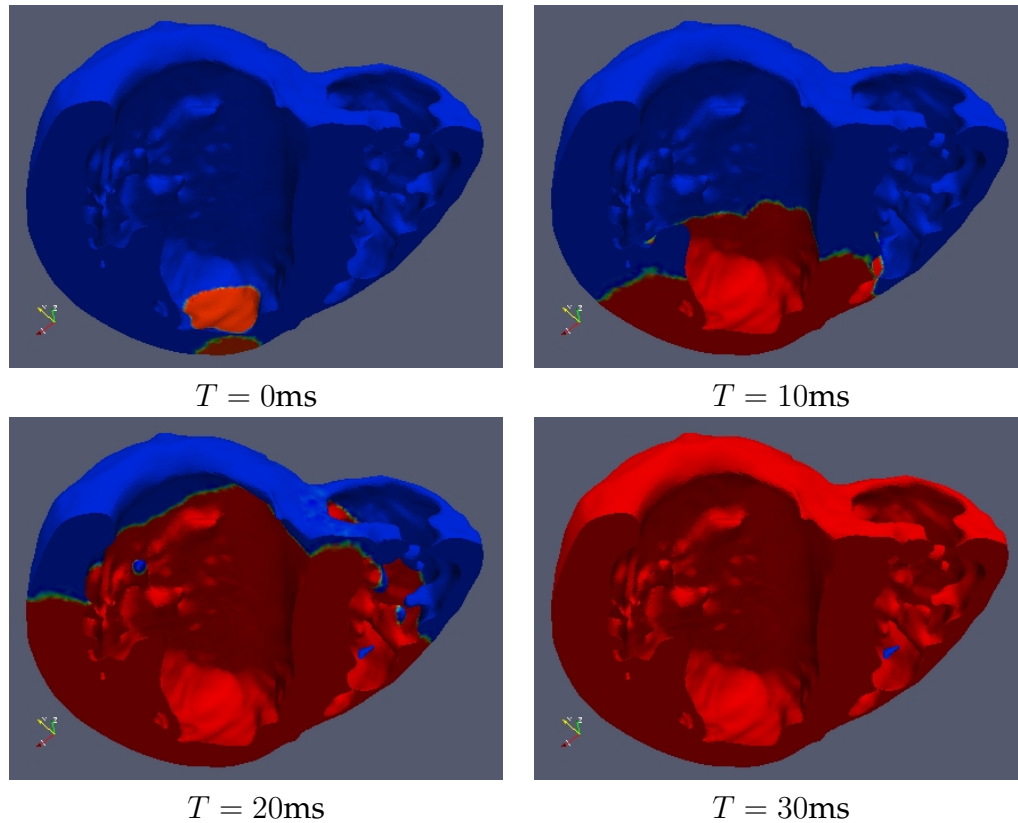


FIG. 2 – Potentiel trans-membrane à divers temps, 211519 noeuds, 976608 tetra.

## Références

- [1] I.J. LeGrice, P.J. Hunter, and B.H. Smaill. Laminar structure of the heart : a mathematical model. *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology*, 272(5) :2466-2476, 1997.
- [2] T.F. Chan and L.A. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266-277, 2001.
- [3] J.M. Peyrat et al. A computational framework for the statistical analysis of cardiac diffusion tensors : Application to a small database of canine hearts. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(11) :1500-1514, 2007.
- [4] P.O. Persson and G. Strang. A Simple Mesh Generator in MATLAB. *SIAM Review*, 46(2) :329-345, 2004

# Simulation du transport de matière par diffusion surfacique à l'aide d'une approche Level-Set

J. Bruchon<sup>1</sup>, D. Pino-Munoz<sup>1</sup>, S. Drapier<sup>1</sup>, F. Valdivieso<sup>2</sup>

*Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne*

*Centre Sciences des Matériaux et des Structures*

<sup>1</sup> *LTDS CNRS UMR 5513*

<sup>2</sup> *PECM CNRS UMR 5146*

*158 cours Fauriel*

*42023 Saint-Etienne - Cedex 2*

*France*

*bruchon@emse.fr*

## Résumé

Dans le contexte général du frittage entre grains d'une poudre compactée, cet article présente une stratégie numérique pour la simulation directe du transport de matière par diffusion surfacique. Une méthode Level-Set est utilisée pour décrire l'évolution de la surface libre des grains. La vitesse d'interface est alors fonction du Laplacien surfacique de la courbure qu'il faut donc calculer rigoureusement. Pour ce faire, une méthode de stabilisation est utilisée, combinée avec une technique d'adaptation de maillage près de l'interface. Plusieurs exemples de simulations sont présentés.

*Mots clés: diffusion surfacique, méthode Level-Set, frittage, adaptation de maillage*

## 1. Introduction

Le cadre général de ce travail est la simulation directe de l'évolution d'un empilement granulaire durant le procédé de frittage. Ce procédé d'élaboration est une étape de chauffage permettant aux grains d'une poudre compactée de densifier, à une température bien inférieure à celle de fusion, éliminant ainsi la porosité. Classiquement (1), le transport de matière durant le frittage s'effectue de la surface du grain vers le cou (Figure 1), et du centre du joint de grain vers le cou, via des chemins de diffusion surfaciques, volumiques, au joint de grain, ou par le milieu environnant (gaz).

Dans ce premier travail, nous traitons le cas du transport de matière de la surface vers le cou par diffusion surfacique. Ceci nous permet de nous affranchir dans un premier temps de la réponse mécanique du matériau, puisque la diffusion est uniquement guidée par un critère géométrique : le Laplacien de la courbure. Dans la suite, nous présentons la modélisation physique du phénomène de diffusion surfacique, puis la stratégie numérique mise en œuvre.

Nous concluons par deux applications d'évolutions d'interfaces par diffusion surfacique de la matière.

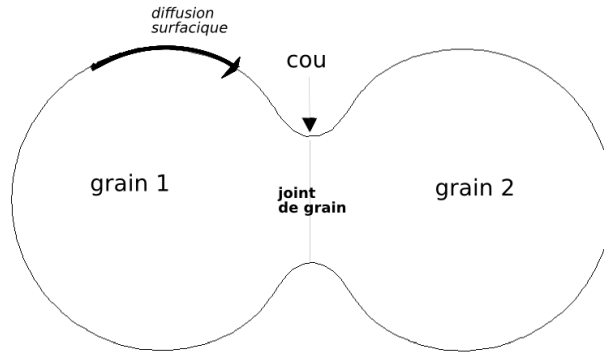


FIG. 1 – Transfert de matière par diffusion surfacique entre deux grains identiques.

## 2. Modélisation de la diffusion en surface

En nous basant sur (2), le flux surfacique de matière  $j_s$  le long de la surface libre d'un grain est dû aux gradients du potentiel chimique, lesquels dépendent du gradient surfacique de la courbure moyenne  $K$ . En faisant l'hypothèse que le déplacement de la surface induit par ce flux est normal à la surface, la conservation du volume du grain implique que la surface libre du grain se déplace à la vitesse :

$$\tilde{v} = (C_0 \Delta_s K) \mathbf{n} \quad (1)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à la surface libre du grain, et  $\Delta_s$  est le Laplacien surfacique. Sous les hypothèses retenues ici (homogénéité du grain et température constante),  $C_0$  est une constante dépendant de la nature du grain, exprimée en  $m^3 \cdot s^{-1}$ . Remarquons que la diffusion surfacique ne provoque pas de phénomène de retrait et donc laisse constante la porosité du système.

## 3. Résolution numérique : une approche Level-Set

Afin de prendre en compte implicitement les changements topologiques intervenant lors du frittage, nous décrivons les grains à l'aide d'une méthode Eulérienne de type Level-Set. A cet effet, nous introduisons une fonction  $\phi$  continue, définie sur tout le domaine de calcul, vérifiant  $\|\nabla\phi\| = 1$  (fonction distance) dans une bande  $[-L, +L]$  autour de la frontière des grains, constante ailleurs, positive à l'extérieur des grains, négative à l'intérieur. La surface libre des grains est alors décrite par l'isovaleur 0 de cette fonction. Cette méthode, présentée en détail dans (3),

permet de combiner l'étape de convection et l'étape de réinitialisation de la fonction Level-Set en une seule étape dite de réinitialisation convective.

Nous discrétisons le domaine de calcul  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (un cube en 3D) à l'aide d'un maillage de simplexes. La fonction  $\phi$  est approchée par  $\phi_h$  qui est choisie continue sur  $\Omega$  et linéaire par élément. La normale à la surface des grains est alors donnée par  $\mathbf{n}_{\phi_h} = \frac{\nabla \phi_h}{\|\nabla \phi_h\|}$ , et la courbure moyenne par  $K_{\phi_h} = \nabla \cdot \mathbf{n}_{\phi_h}$ . De plus, dans ce cadre Level-Set, la vitesse de diffusion donnée par l'Equation (1) se réécrit en (voir (4)) :

$$\tilde{v}_{\phi_h} = \left( C_0 \frac{1}{\|\nabla \phi_h\|} \nabla \cdot [\|\nabla \phi_h\| P_{\phi_h} \nabla K_{\phi_h}] \right) \mathbf{n}_{\phi_h} \quad (2)$$

avec  $P_{\phi_h} = Id - \mathbf{n}_{\phi_h} \otimes \mathbf{n}_{\phi_h}$  la matrice de projection sur le plan tangent à la surface des grains. Cette équation met en jeu les dérivées à l'ordre 4 de  $\phi_h$  (via la courbure).  $\phi_h$  étant linéaire par élément, les expressions de la courbure et de  $\tilde{v}_{\phi_h}$  doivent être considérées au sens faible (voir (4)). La fonction  $\phi_h$  est explicitement construite à l'instant initial (configuration initiale). A l'instant  $t$ , connaissant  $\phi_h^t$ , la vitesse  $\tilde{v}_{\phi_h^t}$  est d'abord calculée par l'Equation (2), avant d'obtenir  $\phi_h^{t+\Delta t}$  en résolvant l'équation de transport  $\partial \phi_h / \partial t + \tilde{v}_{\phi_h^t} \cdot \nabla \phi_h = 0$ . Le calcul de  $\phi_h$  et de  $\tilde{v}_{\phi_h}$  est ainsi découplé.

Cependant, en utilisant la méthode "explicite" décrite ci-dessus, des oscillations non physiques apparaissent rapidement à l'interface  $\{\phi_h = 0\}$ , empêchant le calcul d'être mené à bien. L'ajout de termes dissipatifs de la forme  $\varepsilon \Delta K_h$  et  $\varepsilon \Delta (\tilde{v}_{\phi_h^t} \cdot \mathbf{n}_{\phi_h})$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ , lors du calcul de la courbure et de la vitesse, supprime ces oscillations, mais dégrade fortement la qualité de la solution. Afin de stabiliser le système tout en préservant la qualité de la solution, nous proposons une formulation mixte en courbure - vitesse normale, ou de manière équivalente, courbure - Laplacien surfacique de la courbure. De plus, un terme de stabilisation est introduit en considérant la linéarisation de  $\phi_h^{t+\Delta t}$  :

$$\phi_h^{t+\frac{1}{2}} \stackrel{def.}{=} \phi_h^t + \frac{\partial \phi_h^t}{\partial t} \Delta t = \phi_h^t - v_{nh}^t \|\nabla \phi_h^t\| \Delta t \quad (3)$$

et en prenant  $K_{\phi_h} = \nabla \cdot \phi_h^{t+\frac{1}{2}}$ . Le dernier terme de (3) est obtenu grâce à l'équation de transport, et en considérant que  $\tilde{v}_{\phi_h}$  est portée par  $\mathbf{n}_{\phi_h}$ .  $v_{nh}$  représente la vitesse normale. Au final, le système mixte en courbure - vitesse normale, s'écrit : au temps  $t$ , connaissant  $\phi_h^t$ , trouver  $K_h^t$  et  $v_{nh}^t$  vérifiant

$$\begin{aligned} K_h^t + \nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{A} \nabla v_{nh}^t \right) &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{A} \nabla \phi_h^t \right) \\ v_{nh}^t \|\nabla \phi_h^t\| - C_0 \nabla \cdot (\|\nabla \phi_h^t\| P_{\phi_h^t} \nabla K_h^t) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Remarquons que le second terme de la première équation de (4), est un terme croisé de la forme  $\Delta v_{nh}$ . C'est ce terme qui stabilise le système. Le coefficient de stabilisation, facteur de

ce terme, dépend de  $\Delta t$ , et ne fait intervenir aucun autre paramètre numérique. Le système précédent est résolu par éléments finis, en considérant  $K_h$  et  $v_{nh}$  continues sur  $\Omega$  et linéaires par morceaux. La formulation faible du problème est donc considérée. Enfin,  $A = \|\phi_h^t - \Delta t v_{nh}^{t-\Delta t}\|$  est la norme de la normale évaluée avec (3), où l'on a pris la vitesse au temps précédent afin d'éviter une non-linéarité sur le terme de stabilisation.

Enfin, pour que la stratégie numérique développée ci-dessus permette de simuler la diffusion de matière au sein d'un empilement 3D composé de  $n$  grains, il est nécessaire de considérer également une technique d'adaptation de maillage, ceci afin d'avoir une bonne description des interfaces, tout en gardant un nombre de degrés de liberté compatible avec notre puissance de calcul. Pour ce faire, nous utilisons les deux métriques décrites dans (5) basées sur l'utilisation de la fonction Level-Set : une métrique isotrope, consistant simplement à prescrire une taille de maille plus petite près de l'interface  $\{\phi_h = 0\}$  ; une métrique anisotrope, basée sur le tenseur  $\mathbf{n}_{\phi_h} \otimes \mathbf{n}_{\phi_h}$ . Un exemple de domaine de calcul contenant quelques grains avec une adaptation isotrope est montré sur la Figure 2. Soulignons que dans cette approche, nous n'estimons pas l'erreur commise par la discrétisation éléments finis.

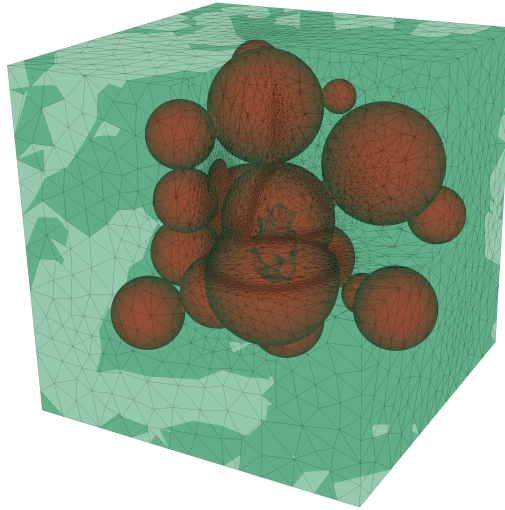


FIG. 2 – Domaine de calcul et maillage adapté (plan de coupe).

## 4. Simulations numériques

La résolution du système (4) a été implémentée dans la librairie éléments finis CIMLIB. Cette librairie C++ de calcul scientifique, hautement parallèle, est développée au Centre de Mise en Forme des Matériaux (Mines ParisTech, CNRS UMR 7635) par l'équipe de T. Coupez (voir (6)).

#### 4.1. Diffusion entre deux grains identiques

Nous commençons par décrire la diffusion surfacique entre deux grains sphériques identiques, choisis initialement tangents. Nous voyons sur la Figure 3, la formation d'un cou entre ces deux grains par diffusion surfacique de la matière, depuis la surface des grains vers ce cou (de la courbure positive vers la courbure négative). De plus, bien que la surface de contact entre les grains soit initialement "mal" définie (pas de traitement spécifique), la symétrie du problème est conservée, et le volume des grains reste constant.

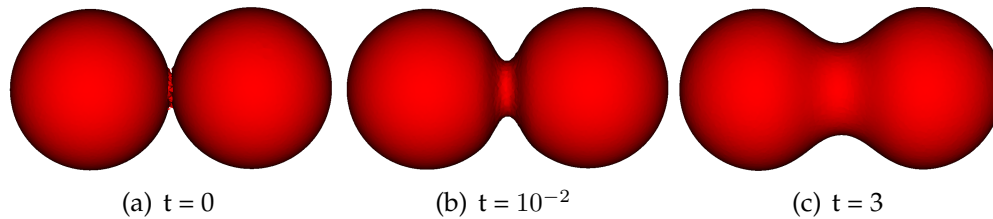


FIG. 3 – Evolution de la surface  $\{\phi_h = 0\}$  durant le frittage par diffusion de matière entre deux grains de même rayon  $R = 0.1$ .

De plus, en se basant sur des critères purement géométriques (voir (7)), il est possible d'exprimer l'évolution de  $x/R$ , le rayon de la surface de contact divisé par le rayon du grain, en fonction de  $t' = \frac{C_0}{R^4}t$ , un temps adimensionnel :

$$\frac{x(t)}{R} = \left( \frac{56C_0}{R^4}t \right)^{1/7} = 1.78t^{1/7} \quad (5)$$

La Figure 4 montre l'évolution de  $x/R$  en fonction de  $t'$  pour différentes valeurs de rayon de grain  $R$ , obtenue par simulation. Nous retrouvons bien la loi en puissance de  $1/7$ , avec un coefficient de 1,3 au lieu de 1,78. Cette différence s'explique par les hypothèses faites dans le calcul analytique. Le point important ici est la puissance  $1/7$ , caractéristique de la diffusion surfacique.

#### 4.2. Diffusion dans un petit empilement granulaire

La Figure 5 montre l'évolution par diffusion surfacique d'un empilement composé de 20 grains. Les grains sont initialement sphériques, tangents deux à deux, et de rayons compris entre 0,08 et 0,2. Le domaine de calcul est le cube unité, maillé avec un maillage non structuré composé de 1 320 000 éléments (227 000 nœuds). Le maillage est adapté dynamiquement au cours de la simulation, de manière à être raffiné près des interfaces. La taille de maille, isotrope, varie de 0,01 à 0,08. Comme précédemment, les surfaces de contact, mal définies initialement, sont rapidement lissées par la diffusion, et des cous apparaissent entre les grains. On vérifie que le volume des grains est bien préservé. Une telle simulation comportant 160 incréments de temps est effectuée en deux heures sur quatre cœurs de calcul (processeurs Intel Xeon 2.2 GHz).

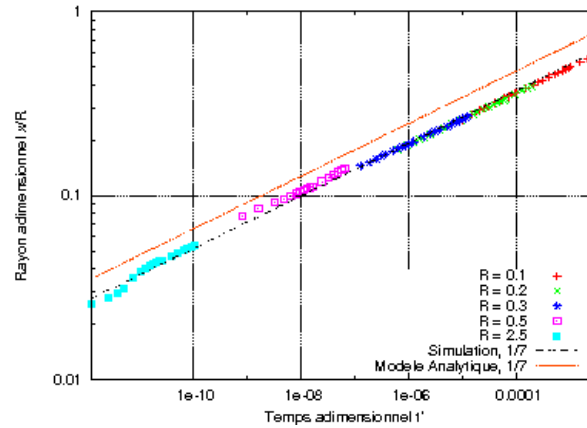


FIG. 4 – Evolution du rayon adimensionnel  $x/R$  en fonction du temps adimensionnel  $t'$  (échelle logarithmique) pour différentes valeurs de  $R$ , avec  $C_0 = 10^{-7}$ .

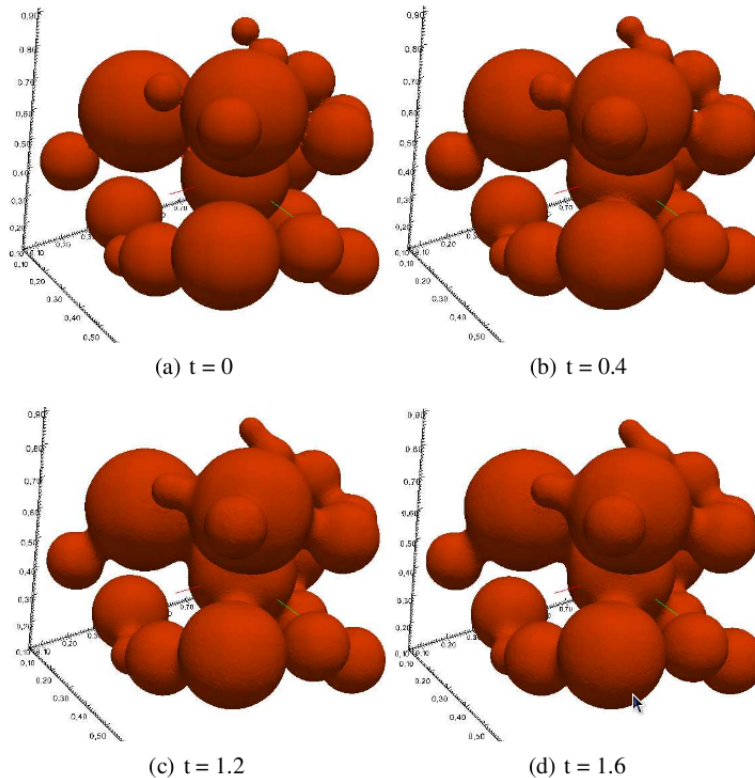


FIG. 5 – Evolution d'un empilement de 20 grains de rayons distribués aléatoirement, uniformément dans l'intervalle  $[0,08;0,2]$

## 5. Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une méthode basée sur une approche Level-Set permettant de décrire l'évolution de la surface des grains induite par la diffusion surfacique durant le frittage d'un empilement granulaire. L'équation aux dérivées partielles d'ordre 4 qui régit l'évolution du système est résolue grâce à une approche mixte en courbure - Laplacien de la courbure, stabilisée.

Une technique d'adaptation de maillage nous permet de décrire finement les interfaces et de simuler l'évolution d'un petit empilement de grains.

Les suites à donner à ces développements sont de deux ordres. D'une part, au niveau numérique, une technique d'adaptation de maillage plus avancée permettrait de diminuer la taille du maillage, tout en préservant voir en améliorant la précision sur la description des interfaces. Ceci est nécessaire dans l'optique de la prise en compte d'un grand nombre de grains (volume représentatif). Au niveau de la modélisation, nous travaillons à présent sur le couplage de la diffusion surfacique avec la diffusion volumique. Ceci fait intervenir la notion de potentiel chimique dépendant entre autres du gradient de la contrainte mécanique générée dans le matériau.

## Références

- [1] M.F. Ashby, A first report on sintering diagrams, *Acta Metallurgica*, Elsevier, 1974, pp. 275–289.
- [2] D. Bouvard, R.M. McMeeking, Deformation of interparticle necks by Diffusion-Controlled Creep, *Journal of the American Ceramic Society*, **79**(3), 1996, pp. 6665–672.
- [3] T. Coupez, Réinitialisation convective et locale des fonctions Level Set pour le mouvement de surfaces et d'interfaces, *Journées Activités Universitaires de Mécanique*, La Rochelle, ISBN 2-9526-8123-8, 2006, pp. 33–41.
- [4] M. Burger, F. Hausser, C. Stöcker, A. Voigt, A level-set approach to anisotropic flows with curvature regularization, *Journal of computational physics*, **225**(1), 2007, pp. 183–205.
- [5] J. Bruchon, H. Digonnet and T. Coupez, Using a signed distance function for the simulation of metal forming processes : Formulation of the contact condition and mesh adaptation. From a Lagrangian approach to an Eulerian approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **78**(8), 2009, pp. 980–1008.
- [6] H. Digonnet and T. Coupez, Object-oriented programming for 'fast-and-easy' development of parallel applications in forming processes simulation, In *Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Bathe KJ (ed.), Massachusetts Institute. Elsevier : Amsterdam, 2003, pp. 1922–1924.
- [7] M.N. Rahaman, *Ceramic Processing and Sintering*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1995.

# Défis de l'adaptation de maillage pour le contact en grandes déformations

Eric Chamberland, André Fortin,

<sup>1</sup>*GIREF, Université Laval,  
Québec, Canada*

## Résumé

La résolution des problèmes de contact en grandes déformations pose encore aujourd'hui des défis importants. Une des difficultés se trouve dans le traitement des frontières partiellement en contact. La capture de l'interface contact/non contact est essentielle pour assurer une convergence optimale de l'erreur numérique. L'adaptation de maillage semble un outil approprié, mais les estimateurs d'erreurs doivent être soigneusement choisis, particulièrement lorsque l'on utilise des discrétisations d'ordre deux. On cherche une convergence optimale en norme  $L^2$  et  $H^1$  pour le déplacement et en norme  $L^2$  pour la pression de contact.

*Mots clés:* Adaptation de maillage, ordre élevé, contact, grandes déformations, estimateurs d'erreur

## 1. Introduction

Le problème de contact en grandes déformations peut être résolu à l'aide d'une méthode itérative comme le gradient conjugué projeté (GCP) ([1]). Nous étudierons donc les problèmes de contact en grandes déformations dans une formulation mixte en déplacements  $u$  et en pression de contact  $\lambda$ . En utilisant la méthode des solutions manufacturées (MSM), nous avons démontré ([2]) l'importance capitale de bien capturer la zone de contact. En effet, pour avoir une convergence optimale pour une formulation  $P_2 - P_1$  en déplacement-pression de contact, il faut avoir, en 2D, des sommets placés exactement sur les extrémités de la zone de contact. En introduisant l'adaptation en vue d'améliorer les résultats, il faudra prendre en compte plusieurs facteurs déterminants pour l'obtention de maillages menant à une convergence optimale de l'espace  $P_2 - P_1$ . Le premier de ces facteurs est l'obtention d'un estimateur d'erreur approprié sur le déplacement dans l'espace  $P_2$ . Le second est la prise en compte de l'erreur sur la pression de contact dans l'espace  $P_1$  qui est restreint à une partie du bord du domaine des déplacements. Le troisième est la détermination de la zone effectivement en contact. Enfin, le quatrième est en réalité la combinaison de ces différents facteurs en une métrique unique.

## 2. Contact

Pour les grandes déformations, une formulation Lagrangienne totale en déplacement  $u$  sera utilisée. Le contact sera traité par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_h$  et résolu par la méthode

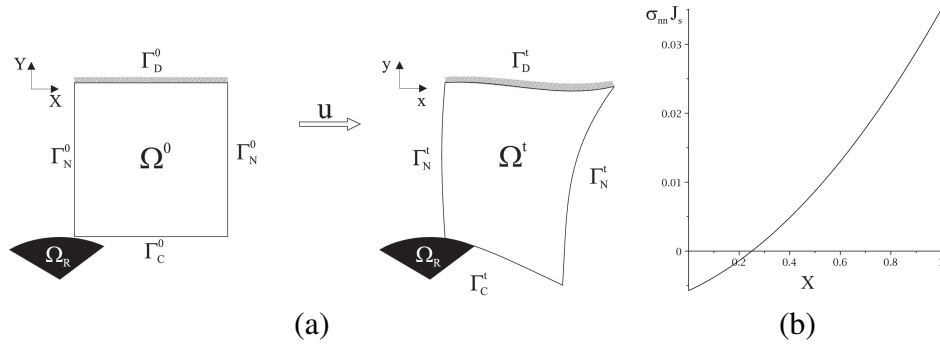


FIG. 1 – (a) Domaine initial et déformé avec obstacle rigide, (b) Contrainte normale ( $\sigma_{mn} J_s$ ) sur le bord  $\Gamma_C^0$ .

du gradient conjugué projeté (voir Tardieu et al. [3]). On note  $\sigma_{mn}^-$  et  $\sigma_{mn}^+$  les parties respectivement négative et positive de  $\sigma_{mn}$ . À convergence, le multiplicateur approchera  $\sigma_{mn}^- J_s$ , ce qui est lié à notre choix d'intégrer la contribution du jacobien surfacique  $J_s$  dans  $\lambda_h$ . Ceci évite de linéariser la variation de  $J_s$ , ce qui introduirait un terme non symétrique dans la matrice tangente, comme dans le cas de la pression suiveuse (voir Bonet et Wood [4]). Sous forme variationnelle, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^0} \Pi : \nabla_X w \, dV - \int_{\Gamma_C^0} \lambda_h w \cdot n_2 \, dA &= \int_{\Omega^0} r_0 \cdot w \, dV + \int_{\Gamma_N^0} h_0 \cdot w \, dA + \int_{\Gamma_C^0} k_0 \cdot w \, dA \quad \forall w \\ \int_{\Gamma_C^0} (\mu_h - \lambda_h) g(u) \, dA &\leq 0 \quad \forall \mu_h \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

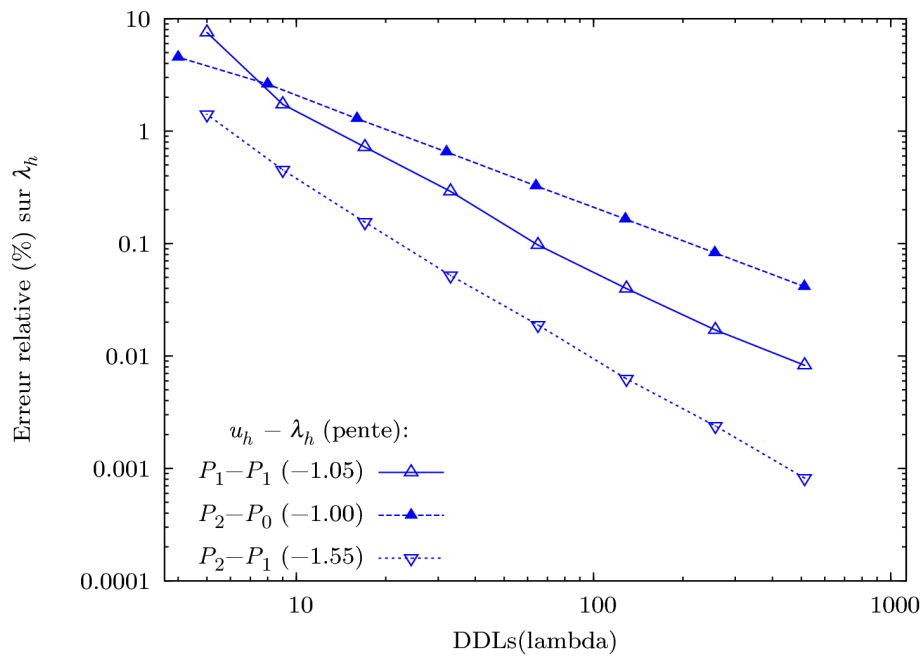
où  $g(u)$  est la distance entre les corps (le « gap »). De manière équivalente, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla_X \cdot \Pi = r_0 & \text{dans } \Omega^0 \\ u_h = u_0 & \text{sur } \Gamma_D^0 \\ \Pi \cdot N = h_0 & \text{sur } \Gamma_N^0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Pi \cdot N - \lambda_h n_2 = k_0 \\ \lambda_h \leq 0 \\ g \geq 0 \\ \lambda_h g = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_C^0$$

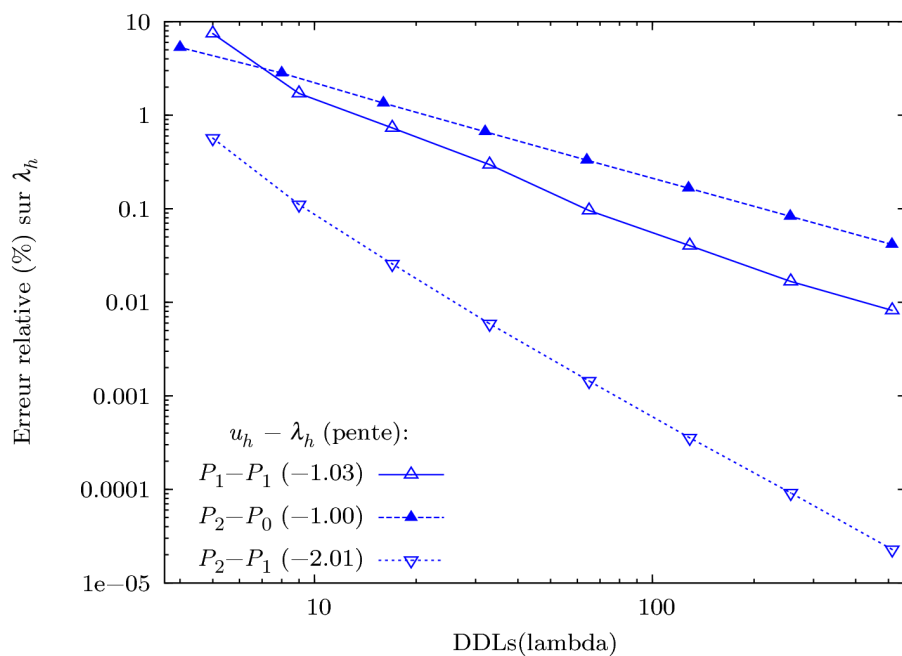
Le choix de l'espace de discrétisation pour  $u_h$  et  $\lambda_h$  est conditionné par une condition de type *inf-sup* (voir Bathe et Brezzi [5], Coorevits et al. [6]). Bien que plusieurs choix d'espaces de discrétisation satisfassent la condition *inf-sup*, nous nous concentrons sur un espace  $P_2 - P_1$  dans cette étude.

On peut voir, à la figure 2(a), l'erreur relative en norme  $L^2$  sur la pression de contact  $\lambda_h$ . On distingue trois courbes :

1. Les éléments les moins précis sont les  $P_2 - P_0$  pour lesquels la convergence est limitée à  $-O(ddl)$ .
2. Les éléments  $P_1 - P_1$  ont aussi une convergence limitée à  $-O(ddl)$  mais sont deux fois plus précis que les précédents.
3. Les éléments  $P_2 - P_1$  sont limités dans leur convergence à  $-O(ddl^{1,55})$ , mais restent les plus précis de tous.



a) Maillages quelconques

b) Maillages ayant un noeud en  $X = 1/4$ .FIG. 2 – Erreur relative sur  $\lambda_h$  en norme  $L^2$  sur  $\Gamma_C^0$  ( $\|\sigma_{nn}^- J_s - \lambda_h\|_{0,\Gamma_C^0} / \|\sigma_{nn}^- J_s\|_{0,\Gamma_C^0}$ ).

Nous allons maintenant analyser le taux de convergence sous-optimal en  $-O(ddl^{1,55})$  des éléments  $P_2 - P_1$ . On peut proposer 2 explications : l'intégration numérique de  $g$  ou l'absence de noeud sur la frontière de la zone de contact. Bien qu'une difficulté des problèmes de contact soit l'intégration exacte de  $g$  (voir [7]), une analyse en cours nous a convaincu que le simple fait de ne pas avoir de noeud sur la frontière de la zone de contact est suffisant pour restreindre le taux de convergence de  $\lambda_h$ . Pour illustrer ce fait, nous présentons à la figure 2(b) les courbes de convergence obtenues sur des maillages ayant un noeud précisément à l'endroit où le changement de signe de  $\sigma_{nn}$  se produit (soit en  $X = 1/4$ ). On retrouve alors immédiatement un taux de convergence  $-O(ddl^2)$  sur  $\lambda_h$  pour les éléments  $P_2 - P_1$ .

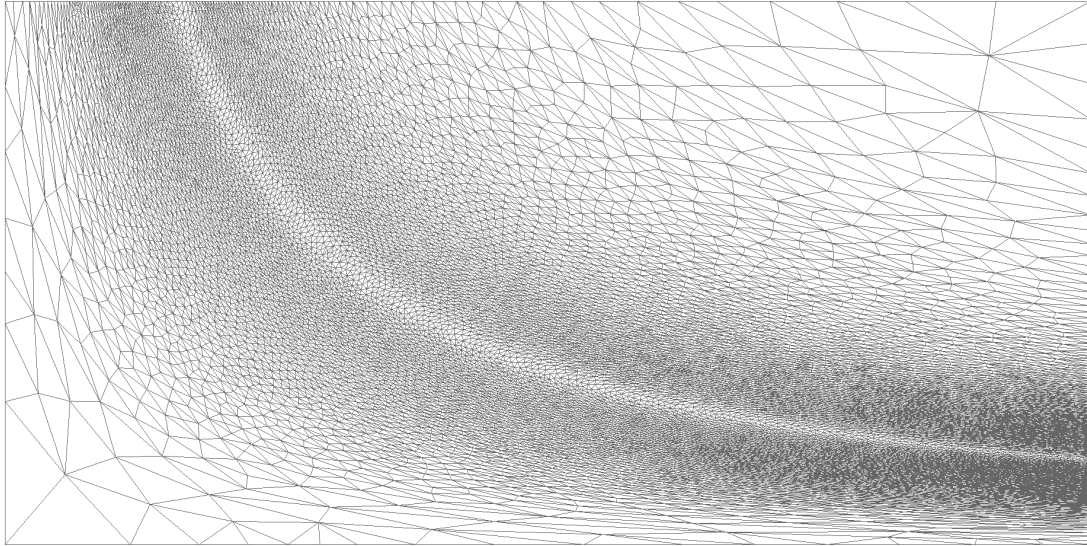
### 3. Métriques et adaptation $P_2$

L'adaptation de maillage basée sur une métrique est utilisée depuis longtemps pour les interpolations de type  $P_1$ . Pour adapter un maillage en utilisant une variable  $P_2$ , on peut utiliser les dérivées troisièmes comme indicateur d'erreur (voir Kuate [8]). Pour ce faire, nous résolvons un problème aux moindres carrés sur une région autour des sommets d'un maillage. Le problème résolu ressemble à celui proposé par Zhang et Naga [9], auquel nous avons ajouté les dérivées d'ordre quatre, ce qui semble donner de meilleurs résultats. Le problème est formulé en dimension trois, mais peut être ramené au moyen de contraintes en dimension deux (plan et/ou surface) ou même en dimension un. Une fois les dérivées troisièmes obtenues, on les sépare en trois tenseurs que l'on transforme en métriques que l'on intersecte entre elles (voir [10]). À la figure 3, on peut voir que les maillages obtenus sont assez différents de l'adaptation basée sur le hessien. Une étude de convergence sur les deux séries de maillages, adaptés sur le hessien vs adaptés sur les dérivées troisièmes, est présentée à la figure 4. On voit que lorsque l'on utilise une interpolation de type  $P_2$  et que l'on adapte en se basant sur le hessien, on ne conserve pas un taux de convergence optimal. Par contre, on récupère la convergence optimale si on adapte sur les dérivées troisièmes.

### 4. Contact et adaptation

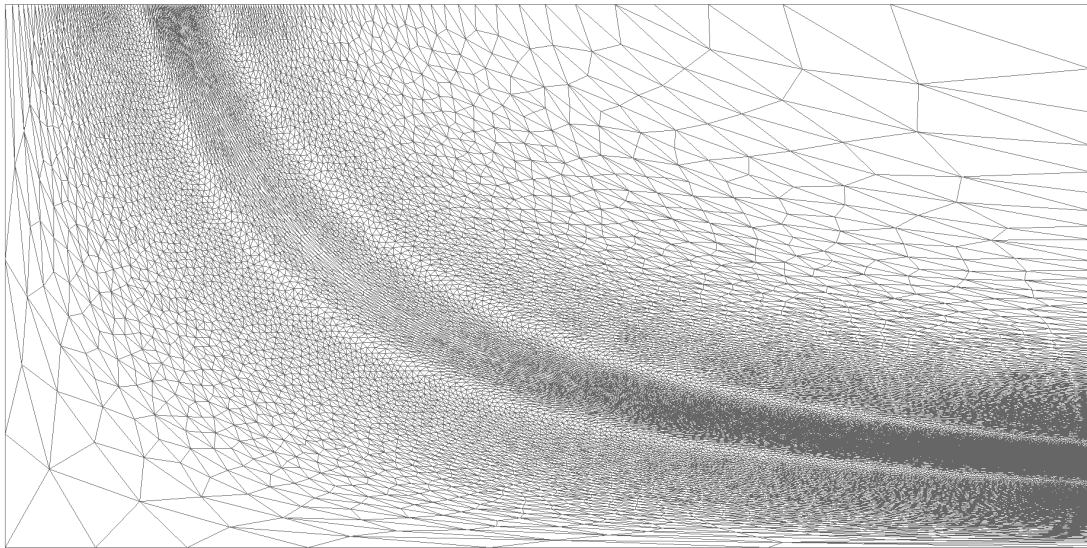
Les métriques de base pour l'adaptation d'un problème en grandes déformations seront d'abord celles construites à partir des dérivées troisièmes de chaque variable du déplacement  $u_h$ . Pour la pression de contact  $\lambda$ , on reconstruit un hessien mais on limite le domaine de calcul à la partie du bord où cette variable existe afin d'éviter l'un des dangers identifié par Ovall [11]. De plus, on ajoute des contraintes supplémentaires, à savoir que les composantes normales des dérivées doivent être nulles. On intersecte cette métrique de bord avec celles du domaine pour former une métrique unique. Basé sur ce qui a été énoncé à la section 2, on sait maintenant qu'il faut bien capter les frontières de la zone de contact. Une fonction distance aux frontières de la zone de contact est construite et on en déduit aussi une métrique que l'on intersecte avec les autres. Finalement, on adapte les maillages et l'on mesure les erreurs sur les différentes variables et en particulier sur la pression de contact. Un exemple de maillage obtenu est

vu



a) Métrique construite à partir du hessien

vu



b) Métrique construite à partir des dérivées troisièmes

FIG. 3 – Maillages obtenus pour une adaptation avec différentes métriques

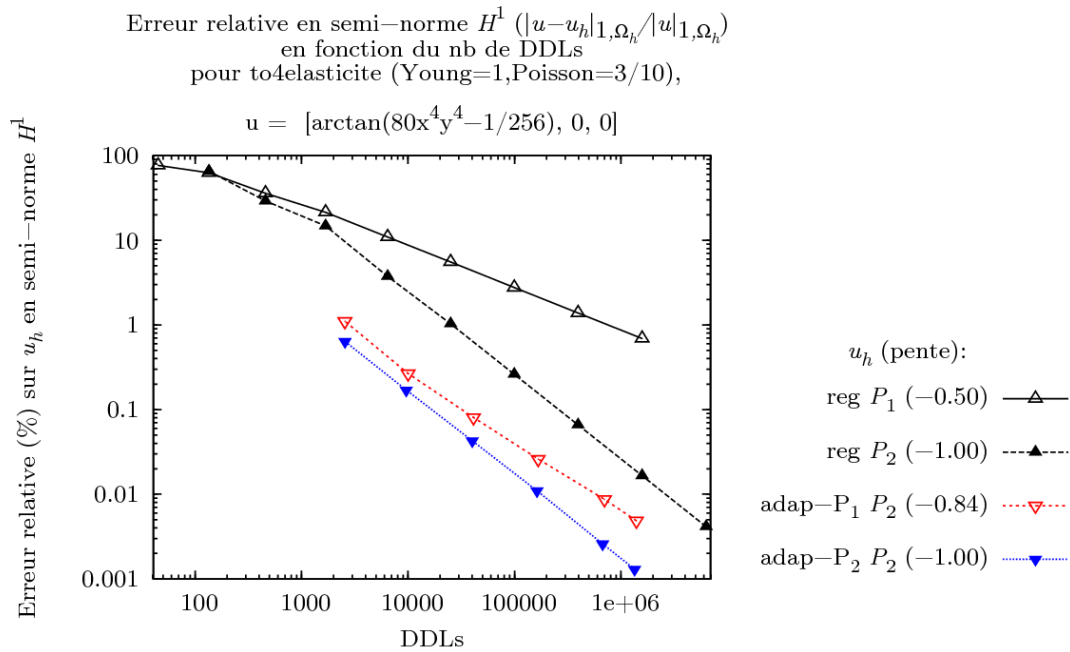


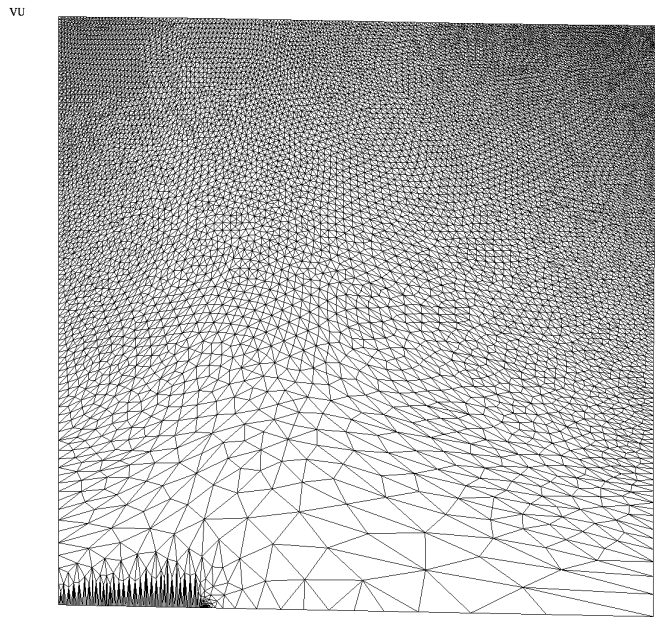
FIG. 4 – Erreur relative en semi-norme  $H^1$  ( $|u - u_h|_{1, \Omega_h} / |u|_{1, \Omega_h}$ ) en fonction du nb de DDLs avec  $u = [\arctan(80x^4y^4 - 1/256)]$

présenté à la figure 5

Pour la pression de contact, le niveau d'erreur obtenu ainsi que le taux de convergence atteint sont meilleurs que la simple division régulière, mais moins bons que l'utilisation d'un maillage possédant des sommets exactement aux frontières de la zone de contact (voir figure 6).

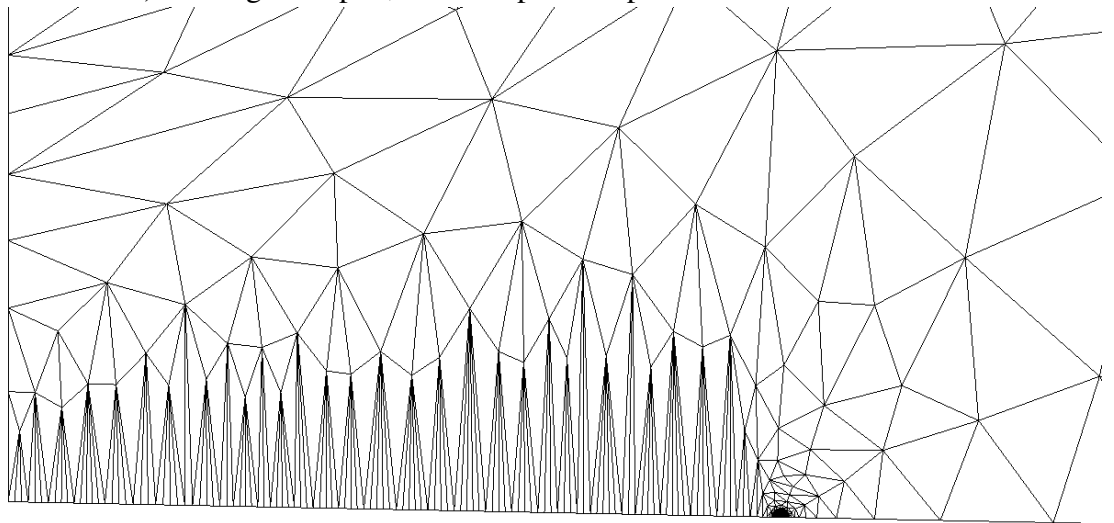
## 5. Discussion et conclusions

Nous avons montré qu'il est possible de rétablir une convergence quasi-optimale de la pression de contact lorsque nous adaptons le maillage sur 3 critères distincts. Le maillage adapté est donc meilleur en terme de niveau d'erreur et de taux de convergence qu'une division régulière du maillage. Les modifications exigées pour passer d'un code d'adaptation  $P_1$  à  $P_2$  ont été relativement mineures et donnent des résultats satisfaisants. Bien que, pour le contact, les résultats ne soient pas encore totalement optimaux, une petite percée a été effectuée.



a) Maillage complet, déformé par le déplacement.

vU



b) Zoom sur la partie en contact.

FIG. 5 – Maillage adapté sur les métriques intersectées.

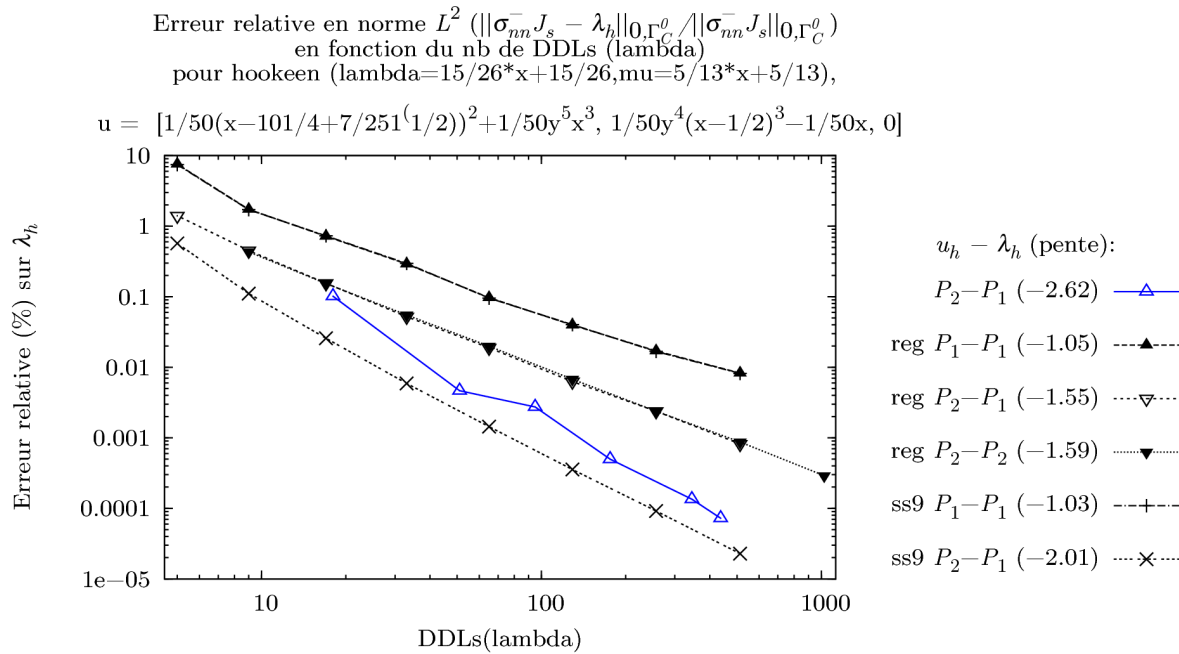


FIG. 6 – Erreur relative en norme  $L^2$  ( $\|\sigma_{nm}^- J_s - \lambda_h\|_{0,\Gamma_C^0} / \|\sigma_{nm}^- J_s\|_{0,\Gamma_C^0}$ ) en fonction du nb de DDLs ( $\lambda$ )

## Références

- [1] N. Tardieu, F. Youbissi, and É. Chamberland. A dual projected conjugate gradient algorithm for solving contact problems. In *8th World Congress on Computational Mechanics*, Venice, Italy, 2008.
- [2] É. Chamberland, A. Fortin, and N. Tardieu. Solutions analytiques de problèmes de contact en grandes déformations. In *Neuvième colloque national en calcul des structures*, volume II, pages 671–676, Giens, France, 2009. Hermès.
- [3] N. Tardieu, F. Youbissi, and É. Chamberland. Un algorithme de gradient conjugué projeté préconditionné pour la résolution de problèmes unilatéraux. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(11-12) :840 – 845, 2008.
- [4] J. Bonet and D. R. Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [5] K.J. Bathe and F. Brezzi. Stability of finite element mixed interpolation for contact problems. *Rend. Mat. Acc. Lincei s.*, 9(12) :159–166, 2001.
- [6] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani, and T. Sassi. Mixed finite element methods for unilateral problems : convergence analysis and numerical studies. *Math. Comput.*, 71(237) :1–25, 2002.
- [7] N. El-Abbasi and K.-J. Bathe. Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. *Computers & Structures*, 79(16) :1473 – 1486, 2001.

- [8] Kuate R. *Adaptation de maillage anisotrope : Étude, construction d'estimateurs d'erreur et raffinement hexaédrique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 2009.
- [9] Z. Zhang and A. Naga. A new finite element gradient recovery method : Superconvergence property. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(4) :1192–1213, 2005.
- [10] F. Alauzet and P.J. Frey. Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques. Technical Report RR-4759, INRIA, Rocquencourt, 2003.
- [11] J. Ovali. Two dangers to avoid when using gradient recovery methods for finite element error estimation and adaptivity. Technical Report 6/2006, Max Planck Technical Report, 2006.

# Metric by length distribution tensor and edge error for anisotropic meshing

*Thierry Coupez*

CEMEF - Ecole des Mines de Paris - UMR CNRS 7635  
BP 207 – 06904 Sophia Antipolis Cedex , France  
[Thierry.Coupez@cemef.cma.fr](mailto:Thierry.Coupez@cemef.cma.fr)

## Abstract:

*In this paper it is shown how to build a metric field directly at the nodes of the mesh for a direct use in the meshing tools. First of all, the unit mesh metric is defined and well justified on a node basis, by using the statistical concept of length distribution tensors. Then, the interpolation error analysis is performed on the projected approximate scalar field along the edges. The error estimate is established on each edge whatever the dimension is. It enables to calculate a stretching factor providing a new edge length distribution, its associated tensor and the corresponding metric. The optimal stretching factor field is obtained by solving an optimization problem under the constraint of a fixed number of edges in the mesh. Several examples of interpolation error are proposed as well preliminary results of anisotropic adaptation for interface and free surface problem using a Level Set method.*

## 1. Introduction

Recent years have seen the emergence of anisotropic mesh adaptation techniques with very convincing applications ([2, 5, 8, 9, 10, 17, ...]). Indeed, such a technique enables to capture scales heterogeneities that can appear in numerous physical or mechanical applications. In particular, anisotropic adaptive meshing can play a key role in simulation problem involving interfaces, the gradient of the solution being highly directional favoring the use of anisotropic meshing at a low extra number of elements.

Unstructured anisotropic adaptive mesh are often based on local modifications ([12, 13, 14, 15, ...]) of an existing mesh. In this approach the construction of the mesh in the anisotropic case can be done by extending the way to measure lengths following the space directions and by using a metric field to redefine the geometric distances. In parallel, theories of anisotropic a posteriori error estimation [4, 8, 9, 11, ...] have been well consolidated, in the past few years

For practical reasons, meshing tools are demanding a nodal metric map. This work is detailed in [27] and the main idea here is to propose a different route for the metric construction directly at the node by introducing a statistical concept: the length distribution function. Following the standard idea used in computational rheology to account for orientation [1], we introduced the second order tensor, approximate of the distribution of lengths defined by gathering the edges at the node. The proposed metric is shown to be the inverse of the tensor, which definition is only depending on edges (whatever is the space dimension). We complete this study by an interpolation error analysis along the edges allowing to recalculate the length of each edge in its own direction.

The efficiency of this approach is established under the constraint of a fixed number of nodes with examples of adaptation for free surface problem using a Level Set.

## 2. Mesh metric by length distribution tensor

Notation:

$K \in \mathcal{K}$  Element mesh

$X^i, i \in \mathcal{N}$  Coordinate of the node mesh number  $i$

$X^{ij} = X^j - X^i$  Edge vector made from nodes  $i$  and  $j$  (sharing at least one element)

$h_{ij} = |X^{ij}|$  Edge length

$\Gamma(i) = \{j \in \mathcal{N}, \exists K \in \mathcal{K}, X^{ij} \in K\}$  Set of node numbers connected to node  $i$

A unit metric of element  $K$ , can be defined by using the affine transformation to a reference rectangular or equilateral element.

$$\begin{aligned} T_K : K &\rightarrow \widehat{K} \\ X &\rightarrow \widehat{X} + A_K(X - \widehat{X}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Indeed, the unit length edges of the reference element make:  $1 = |A_K X^{ij}| = ({}^t A_K A_K X^{ij}, X^{ij})^{\frac{1}{2}}$ . The natural metric associated with each element is simply defined by:  $M_K = {}^t A_K A_K$ .

When one wants to deal with a continuous metric, the element tensor field must be transferred to the mesh nodes. Indeed, from the meshing point of view [15, 17], it is easier to store the metric at node than at element, the latter being much more volatile during the remeshing process. We propose here to construct a metric field directly at the nodes of the mesh.

Let us consider the edge  $X^{ij}$  and a mapping  $A^{ij}$  which transforms it in a unit vector:  $|A^{ij} X^{ij}| = 1$ . Then for  $M^{ij} = {}^t A^{ij} A^{ij}$ , we get  $(M^{ij} X^{ij}, X^{ij}) = 1$

$M^{ij}$  is a positive symmetric tensor. In order to construct  $M^i$  such as the edge length of node is almost 1, the immediate solution is to sum up the previous relation:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Gamma(i)} (M^{ij} X^{ij}, X^{ij}) &= \sum_{j \in \Gamma(i)} 1 \\ \Rightarrow M^i : \sum_{j \in \Gamma(i)} X^{ij} \otimes X^{ij} &= |\Gamma(i)| \end{aligned} \quad (3.2)$$

Therefore, the length distribution tensor at node « i » and denoted by  $\mathbb{X}^i$  is defined by

$$\mathbb{X}^i = \frac{1}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} X^{ij} \otimes X^{ij} \quad (3.3)$$

$\mathbb{X}^i$  is a positive symmetric matrix when there exist at least « d » non aligned edge vectors, then we define the metric tensor by :

$$M^i = \frac{1}{d} (\mathbb{X}^i)^{-1} \quad (3.4)$$

### 3. Edge based interpolation error estimate

#### 3.1. Continuity along the edges

Let  $u$  a regular scalar field in  $\Omega$ ,  $u \in C^2(\Omega)$  and  $u_h$  its interpolation with respect to a given mesh such as  $u_h(X^i) = u(X^i), i = 1, \dots, N$  and let us denote by:

$$U^i = u_h(X^i) = u(X^i) \quad \text{and} \quad U^{ij} = U^j - U^i$$

For continuous  $P^1$  element, the gradient of  $u_h$  is continuous along the edges in the direction of the edges. Indeed, with  $\mathcal{V}_h = \{v_h \in C^0(\Omega), v_h|_K \in P^1(K)\}$ ,

$$U^j = U^i + \nabla u_h|_K \cdot X^{ij}$$

and

$$\nabla u_h|_K \cdot X^{ij} = U^{ij}, \quad \forall K \supset X^{ij} \quad (3.5)$$

The gradient of  $u_h$  is discontinuous from element to element but not the projection along the edges of the mesh since it depends only on the scalar value at the extremity. In the sequel we will write (3.6) independently of the element by:

$$\nabla u_h \cdot X^{ij} = U^{ij} \quad (3.6)$$

we have the following result ([20]):

#### Proposition 3.1:

$$\left| (\nabla u_h - \nabla u(X^i)) \cdot X^{ij} \right| \leq \max_{Y \in [X^i, X^j]} |Hu(Y) X^{ij} \cdot X^{ij}| \quad (3.7)$$

where  $Hu = \nabla^{(2)}u$  is the associated Hessian.

Generally in the sequel we will assume the following shortcut notation:

$$\left| Hu X^{ij} \cdot X^{ij} \right| \text{ for } \left| s^{ij} Hu(B^{ij}) X^{ij} \cdot X^{ij} \right| \text{ or } \max_{y \in [X^i, X^j]} |Hu(y) X^{ij} \cdot X^{ij}|$$

### 3.2. Gradient interpolation operator

In this section we introduce an interpolation operator to build a continuous gradient defined directly at the node of the mesh and depending only on the interpolation values.  $G^i$  the proposed gradient reconstruction is defined by:

$$G^i = \arg \min_G \left( \sum_{j \in \Gamma(i)} |(G - \nabla u_h) \cdot X^{ij}|^2 \right) = \arg \min_G \left( \sum_{j \in \Gamma(i)} |G \cdot X^{ij} - U^{ij}|^2 \right) \quad (3.8)$$

If we denote by  $\mathbb{U}^i = \sum_{j \in \Gamma(i)} U^{ij} X^{ij}$ , then we get:

$$G^i = (\mathbb{X}^i)^{-1} \mathbb{U}^i \quad (3.9)$$

and we can prove ([27]):

$\forall i = 1, \dots, N$  et  $\forall j \in \Gamma(i)$  and for  $G^{ij} = G^j - G^i$

$$\begin{aligned} a) \quad & \left| (G^i - \nabla u(X^i)) \cdot X^{ij} \right| \leq 2 \sum_k |Hu X^{ik} \cdot X^{ik}|^2 \\ b) \quad & \left| G^i \cdot X^{ij} - U^{ij} \right| \leq 2 \sum_{k \in \Gamma(i)} |Hu X^{ik} \cdot X^{ik}|^2 + |Hu X^{ij} \cdot X^{ij}| \\ c) \quad & \left| G^{ij} \cdot X^{ij} \right| \leq 2 \sum_{k \in \Gamma(i)} |Hu X^{ik} \cdot X^{ik}|^2 + 2 \sum_{k \in \Gamma(j)} |Hu X^{jk} \cdot X^{jk}|^2 + |Hu X^{ij} \cdot X^{ij}| \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.3. Edge error estimate

We do use the proposed estimate of the projection along the edge of the second derivative

$$e_{ij} = |G^{ij} \cdot X^{ij}| \quad (3.11)$$

With the following hypothesis:

$$\begin{aligned} 1 \quad & |U_h^{ij} - U^{ij}| \leq |G^{ij} \cdot X^{ij}| \\ 2 \quad & |\nabla u(X^j) \cdot X^{ij} - \nabla u(X^i) \cdot X^{ij}| \leq |G^{ij} \cdot X^{ij}| \\ 3 \quad & |H(u) X^{ij} \cdot X^{ij}| \leq |G^{ij} \cdot X^{ij}| \end{aligned}$$

**Proposition 5.1:** under the above hypothesis we prove also [20]

$$\begin{aligned} X^{ij} & \mapsto s X^{ij} ; s \in \mathbb{R}^+ \\ e_{ij}(s) & = |G^{ij}(s) \cdot s X^{ij}| \leq s^2 e_{ij} \end{aligned} \quad (3.12)$$

The quadratic behavior of the error has been obtained when scaling the edge. It is also an implicit proof of the optimality of the proposed error estimate.

## 4. Length redistribution and edge number constraint

### 6.1 Metric construction

We assume in the sequel that the approximation error is proportional to the interpolation error, in order to use directly the proposed estimate under the hypothesis:

$$\begin{aligned} \exists c > 0, \|u - u_h\| &< c \|u - \pi_h u\| \\ \pi_h u(X^i) &= u(X^i), \forall i \in \mathcal{N} \end{aligned} \quad (3.13)$$

We will only assume in the sequel that the constant is global over the whole domain and thus, the interpolation error estimate works correctly if one seeks for the optimal mesh under some convenient other constraints. We fix the total number of edges and in this case the exact figure of the approximation error is not necessary to set up the mesh.

In order to build a metric depending on the error analysis, one has to calculate a new length for each edge and to rebuild the length distribution.

Let  $s_{ij}$ ,  $i, j \in \mathcal{N}$  be the set of edges scaling factors by:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{ij} &= s_{ij}^2 e_{ij} \\ |\tilde{X}^{ij}| &= s_{ij} |X^{ij}| \end{aligned}$$

where  $\tilde{e}$  et  $|\tilde{X}|$  are respectively the goal error and associated edge length.

Let introduce  $S = (s_{ij}, i, j \in \mathcal{N})$  and the following functional:  $\varphi(S) = \frac{1}{2} \sum_{ij} s_{ij}^2 e_{ij}$ . We seek for a

minimum under the constraint of a fixed number:  $\min_{S, \sum_{ij, i < j} 1 = A} \varphi(S)$ . Or by introducing the Lagrangian

multiplier  $\lambda$ :  $\mathcal{L}(S, \lambda) = \varphi(S) + \frac{\lambda}{p} \left( \sum_{ij} n_{ij} \right) - A$ . Then get the following.

**Theorem :**

Let  $A$  be a given number of edges of the mesh,  $(e_{ij} = |G^{ij} \cdot X^{ij}|)$  the calculated error along and in the direction of the edges  $p \in [1, d]$  to be defined latter.

The continuous metric field defined at the mesh nodes as :

$$M^i = \left( \frac{1}{d} \sum_{j \in \Gamma(i)} s_{ij}^2 X^{ij} \otimes X^{ij} \right)^{-1} \quad \text{with} \quad s_{ij} = \left( \frac{\lambda}{e_{ij}} \right) \quad (3.14)$$

$$\lambda = \left( \frac{\left( \sum_i \sum_{j \in \Gamma(i)} e_{ij}^{\frac{p}{p+2}} \right)^{\frac{p+2}{p}}}{A} \right) \quad (3.15)$$

Minimize the error for  $A$  edges. Moreover, when  $s_{ij} = 1, \forall i, \forall j \in \Gamma(i)$  then the mesh is optimal.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{ij} \left( \frac{e_{ij}}{\lambda} \right)^{\frac{p}{p+2}} = A \Rightarrow \boxed{\lambda^{\frac{p}{p+2}} = \frac{\sum_{ij} e_{ij}^{\frac{p}{p+2}}}{A}}$$

A null error gives an infinite edge and in practice one has to fix something up. This can be done by considering a uniform isotropic mesh under the constraint of number of edge by:

$$e_{ij} = \min(\varepsilon_{\max} |X^{ij}|^2, \max(|G^{ij} \cdot X^{ij}|, \varepsilon_{\min} |X^{ij}|^2)) \quad (3.16)$$

## 5. Applications

In this first example (Figure 3) we consider the following function  $C$  being the upper right corner:

$$a(x) = \tanh\left(E \sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right)\right), x \in [0,1], u(x) = a \circ a(\|X\|) + a \circ a(\|X - C\|) \quad (3.17)$$

The parameter  $E$  may vary from 1 to 32. Larger is  $E$  and sharper is the gradient of this function favoring the construction of an anisotropic mesh. Moreover, the addition of the two contribution mimics interferences between two sources forcing isotropic mesh at the intersecting place.

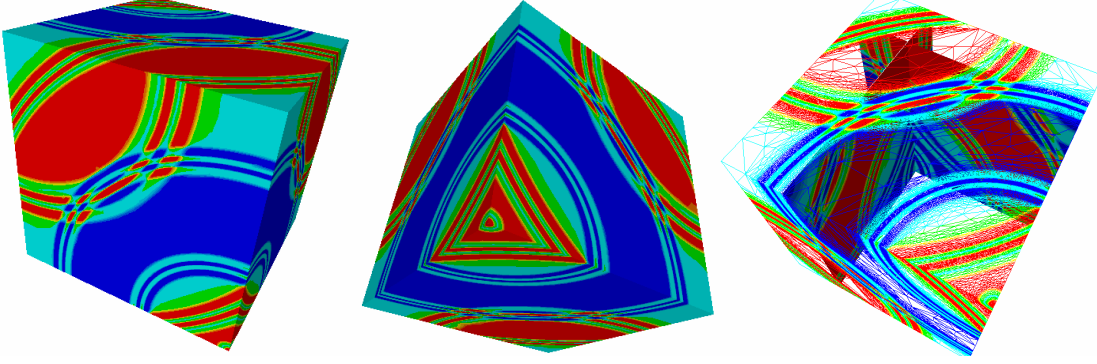


Figure 1: The adapted mesh has about 1 million nodes and it is the lighter possible mesh required just to represent the proposed function.

In this second example, we consider the metric construction to the so called ‘‘Immersed Volume Method’’. We calculate the distance function defined from the immersed boundary giving rise to the Level Set:

$$\alpha(x) = d(x, \Gamma) = \min_{y \in \Gamma} d(x, y) \quad \text{and} \quad \Gamma = \{x, \alpha(x) = 0\} \quad (3.18)$$

$\Gamma \subset \Omega$  being an immersed boundary and the interpolation being given by  $\alpha_h(X^i) = \alpha(X^i)$ ,  $i \in \mathcal{N}$ . Then the hyperbolic tangent is a smoothing of a Heaviside function showing two maxima of the second derivative near the interface. The parameter  $E$  enables to control the steepness and location of the Hessian matrix of this function.

$$u(x) = E \tanh\left(\frac{\alpha(x)}{E}\right) \quad (3.19)$$

In combination to the convected level set method [18], we adapt the mesh periodically using the present work on the heuristic function defined by (3.19). The results are very realistic while maintaining an affordable mesh. The remeshing strategy remains very crude here since the mesh is only adapted periodically without care of time dependency and extrapolation, our purpose being only to illustrate this approach and the possibility in terms of simulation which is clearly not affordable without mesh adaptation, the filament thinning being important and its position not predictable.

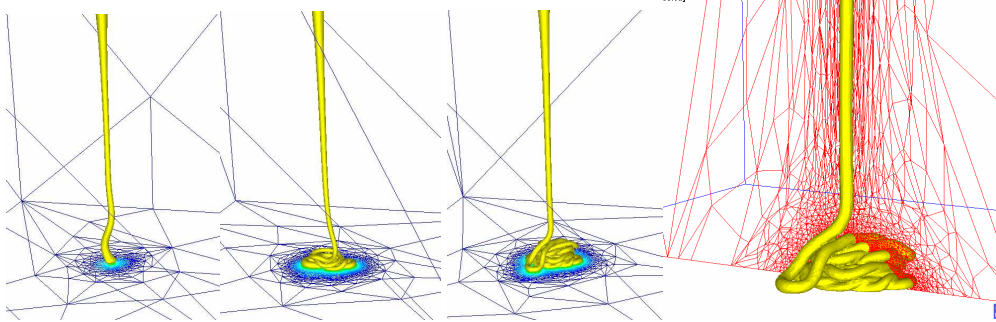


Figure 6: Fluid buckling simulation by the convected Level Set method with anisotropic adaptive meshing and a fixed number of nodes of about 50 000.

## 6. Conclusion

In this paper we propose a different route to define the metric directly at the node of the mesh. In order to get an averaging procedure that produces a symmetric definite positive tensor we use a statistical descriptor: the length distribution tensor. Adaptivity is just to redistribute the edge length via this tensor. A 1d error analysis is proven to be sufficient when considering the interpolation error. Several examples are proposed showing that the proposed procedure drives correctly the mesher to highly adapted solution. In order to show the possibility of the method, we propose to apply it directly to the interpolation error of a level set function. Here again, the error is exact for the static case (representation of an immersed geometry) and becomes heuristic in the dynamic case. The entire process looks quite simple and competes immediately to Hessian based metric and patch recovery procedure. Extension to approximation error would be done by plugging in edge based error or residual estimate.

## References

1. S.G. Advani, C.L. Tucker. The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites. *J. Rheol.*, 31(8):751-784(1987)
2. F. Alauzet, Adaptation de maillage anisotrope en trois dimension. Applications aux simulations instationnaires en Mécanique des Fluides. PhD thesis. Université de Montpellier II, Montpellier, France, 2003.
3. M. J. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi, O. Pironneau: Anisotropic unstructured mesh adaption for flow simulations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, **25**(4), 475–491 (1997)
4. E. F. D’Azevedo and R. B. Simpson. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numer. Math.*, 59 :321–348, 1991.
5. J. Dompierre, M. G. Vallet, M. Fortin, W. G. Habashi, D. Aït-Ali-Yahia, S. Boivin, Y. Bourgault, A. Tam: Edge-based mesh adaptation for CFD. In *Conf. on Numerical Methods for the Euler and Navier-Stokes Equations*, pages 265–299, Montréal, Sept. 1995. CRM-CERCA. Also CERCA Report R95-73
6. L. Formaggia, S. Perotto, New anisotropic a priori error estimates, *Numer. Math.* 89 (2001) 641–667
7. L. Formaggia and S. Perotto, Anisotropic error estimates for elliptic problems, *Numer. Math.*, 94 (2003), pp. 67–92.
8. P. J. Frey and F. Alauzet. Anisotropic mesh adaptation for CFD computations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49) :5068–5082, 2005.
9. A. Loseille, Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute fidélité du bang sonique. Ph.D. thesis, U. Pierre et Marie Curie, INRIA projet GAMMA, 2008 ;
10. Y. Mesri, F. Alauzet, A. Loseille, L. Hascoet, B. Koobus and A. Dervieux (2008). Continuous metric for computational fluid dynamics. *CFD Journal*, Vol 16 no 4, 346-355.
11. K.G. Siebert, An a posteriori error estimator for anisotropic refinement, *Numer. Math.*, 73 (1996), pp. 373–398.
12. J.-F. Remacle, X. Li, M. Shephard and J. Flaherty, Anisotropic adaptive simulation of transient flows, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* **62** (2005), pp. 899–923.
13. T. Coupez, a mesh improvement method for 3d automatic remeshing, in N.P. Weatherill et al, *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and related fields*, pp 615–626. Pineridge Press, 1994
14. T. Coupez, Mesh generation and adaptive remeshing by a local optimisation principle, in *NAFEMS world congress 97*, pp 1051-1060, NAFEMS Ltdn Glasgow, 1997.
15. T. Coupez, Génération de maillages et adaptation de maillages par optimisation locale. *Revue Européenne des Eléments finis*, 9 :403-423, 2000.
16. T. Coupez, H. Digonnet, R. Ducloux, “ Parallel meshing and remeshing”, *Appl. Math. Modelling*, vol. 25, n° 2, p. 83-98, 2000.
17. C. Gruau, T. Coupez. 3D tetrahedral, unstructured and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and multidomain metric. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49):4951-4976, 2005.
18. L. Ville, L. Silva, T. Coupez, Convected Level Set method for the numerical simulation of FluidBuckling, accepted in *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2010
19. Y. Mesri, H. Digonnet, T. Coupez, Advanced parallel computing in material forming with CimLib. Accepted in the *European Journal of Computational Mechanics*, 2010.
20. T. Coupez, Metric construction by length distribution tensor and edge based error for anisotropic adaptive meshing, Submitted to *J. of Comp. Physics*, 2010

# Représentation et régularité minimale de la surface moyenne en théorie des coques

Michel C. Delfour

*Centre de recherches mathématiques et  
Département de mathématiques et de statistique  
Université de Montréal, C. P. 6128, succ. Centre-ville  
Montréal (Qc), Canada H3C 3J7, delfour@CRM.UMontreal.CA*

## Résumé

De nombreuses hypersurfaces  $\omega$  dans  $\mathbf{R}^N$  peuvent être considérées comme la frontière  $\Gamma$  d'un ensemble ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^N$ . Dans ces cas, le gradient et la matrice hessienne de la fonction *distance orientée* associée  $b_\Omega$  à l'ensemble  $\Omega$  donne des expressions analytiques de la normale extérieure unité et des  $N$  formes fondamentales de la surface  $\omega$ , et une théorie intrinsèque fort complète des espaces de Sobolev définis sur des surfaces  $C^{1,1}$  est maintenant disponible dans [7].

En théorie des coques minces, le modèle asymptotique ne dépend que du choix de la *loi constitutive* ou *compliance*, de la *surface moyenne* et de l'espace de solutions qui rend correctement compte des charges, moments, et conditions frontières appliqués à la coque. Une question centrale est de déterminer la régularité minimale pour que les *équations asymptotiques membranaires* (membrane equation) et de *flexion* (bending equation) conservent un sens mathématique précis sans faire appel à des hypothèses mathématiques ou mécaniques ad hoc. La chose est possible pour les surfaces moyennes de classe  $C^{1,1}$  avec ou sans frontière et sans bases locales ou symboles de Christoffel via les méthodes purement intrinsèques développées par Delfour et Zolésio commençant par [11] en 1992.

Anicic, LeDret, et Raoult [1] introduisirent en 2004 une famille de surfaces  $\omega$  qui sont l'image d'un domaine ouvert, borné connexe lipschitzien dans  $\mathbf{R}^2$  par une application bi-Lipschitzienne sous l'hypothèse que la normale est globalement lipschitzienne. À partir de cela, ils construisent un *voisinage tubulaire* d'épaisseur  $2h$  autour de la surface et montrent que pour  $h$  suffisamment petit, l'*application voisinage tubulaire* associée est bi-lipschitzienne.

Dans cet exposé, on montre tout d'abord que de telles surfaces sont de classe  $C^{1,1}$  avec des formes fondamentales bornée et mesurables. Dans un second temps, on montre que le voisinage tubulaire peut être complètement décrit par une fonction distance algébrique à  $\omega$ , et qu'il n'est généralement pas un domaine lipschitzien dans  $\mathbf{R}^3$  en donnant l'exemple d'une surface plate  $\omega$  vérifiant toutes leurs hypothèses. Les résultats classiques d'élasticité linéaire pour des domaines lipschitziens ne sont donc pas directement applicables à leur classe de coques minces. Comme autre conséquence, la jonction  $G_1$  de pièces  $K$ -régulières ( $K$ -regular patches) le long de la jonction de deux pièces développée par Le Dret [16] génère une nouvelle « $K$ -regular patch» qui est une surface de classe  $C^{1,1}$  et le joint ou la jonction est  $C^{1,1}$ .

En conclusion,  $C^{1,1}$  demeure pour l'instant la régularité minimale pour la surface moyenne d'une coque mince pour donner un sens mathématique précis aux équations asymptotiques membranaires et de flexion.

**Mots clés:** coque mince, coque asymptotique, régularité, représentation de surfaces, fonction distance orientée, application bi-lipschitzienne, voisinage tubulaire.

## Références

- [1] S. Anicic, H. Le Dret, and A. Raoult, *The infinitesimal rigid displacement lemma in Lipschitz co-ordinates and application to shells with minimal regularity*, Math. Meth. Appl. Sci. 27 (2004), 1283–1299.
- [2] M. Bernadou and M. C. Delfour, *Intrinsic models of piezoelectric shells*, in "Proceedings of ECCOMAS 2000" (European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, Spain, Sept. 11-14, 2000).
- [3] Ph. D. Ciarlet, *Mathematical elasticity, vol. III : theory of shells*, North-Holland, Elsevier Science, Amsterdam 2000.
- [4] M. C. Delfour, *Intrinsic differential geometric methods in the asymptotic analysis of linear thin shells*, Boundaries, interfaces and transitions (Banff, AB, 1995), (M. C. Delfour, ed.), pp. 19–90, CRM Proc. Lecture Notes, 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [5] M. C. Delfour, *Intrinsic  $P(2, 1)$  thin shell model and Naghdi's models without a priori assumption on the stress tensor*, in "Optimal control of partial differential equations" (Chemnitz, 1998), K.H. Hoffmann, G. Leugering, F. Tröltzsch, eds., pp. 99–113, Internat. Ser. Numer. Math., 133, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [6] M. C. Delfour, *Characterization of the space of the membrane shell equation for arbitrary  $C^{1,1}$  midsurfaces*, Control and Cybernetics 28 (1999), no. 3, 481–501.
- [7] M. C. Delfour, *Tangential differential calculus and functional analysis on a  $C^{1,1}$  submanifold*, in "Differential-geometric methods in the control of partial differential equations" (Boulder, CO, 1999), R. Gulliver, W. Littman and R. Triggiani, eds., pp. 83–115, Contemp. Math., 268, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [8] M. C. Delfour, *Modeling and control of asymptotic shells*, in "Control and Estimation of Distributed Parameter Systems", W. Desch, F. Kappel, and K. Kunish, eds, pp. 105-120, International Series of Numerical Mathematics, Vol 143, Birkhäuser Verlag 2002.

- [9] M. C. Delfour and M. Bernadou, *Intrinsic asymptotic model of piezoelectric shells*, in "Optimal Control of Complex Structures" (Oberwolfach, 2000), K.-H. Hoffmann, I. Lasiecka, G. Leugering, J. Sprekels, F. Tröltzsch (Eds.), pp. 59–72, Internat. Ser. Numer. Math., 139, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2002.
- [10] M. C. Delfour and J. P. Zolésio, *Shape analysis via oriented distance functions*, J. Funct. Anal. **123** (1994), no. 1, 129–201.
- [11] M. C. Delfour and J. P. Zolésio, *On a variational equation for thin shells*, Control and optimal design of distributed parameter systems (Minneapolis, MN, 1992), (J. Lagnese, D. L. Russell, and L. White, eds.), pp. 25–37, IMA Vol. Math. Appl., 70, Springer, New York, 1995.
- [12] M. C. Delfour and J. P. Zolésio, *A boundary differential equation for thin shells*, J. Differential Equations **119** (1995), 426–449.
- [13] M. C. Delfour and J. P. Zolésio, *Tangential differential equations for dynamical thin/shallow shells*, J. Differential Equations **128** (1996), 125–167.
- [14] M. C. Delfour and J. P. Zolésio, *Differential equations for linear shells : comparison between intrinsic and classical models*, in "Advances in mathematical sciences : CRM's 25 years" (Montreal, PQ, 1994), (Luc Vinet, ed.), pp. 41–124, CRM Proc. Lecture Notes, 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [15] M. C. Delfour and J.-P. Zolésio, *Shapes and geometries. Analysis, differential calculus, and optimization*, Advances in Design and Control, 4. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001.
- [16] H. Le Dret, *Well-posedness for Koiter and Naghdi shells with a  $G_1$ -midsurface*, Analysis and Applications **2**, No. 4 (2004), 365–388.

# Verification of three-dimensional anisotropic adaptive methods

Julien Dompierre,

*Département de mathématiques et d'informatique  
Université Laurentienne, 935, route du lac Ramsey  
Sudbury (ON), P3E 2C6, Canada*

## **Résumé**

This talk applies a verification methodology that is able to assess the precision and convergence of an anisotropic adaptive process as it applies to control the interpolation error of sample 2D and 3D reaction-diffusion problems. To do so, the technique of manufactured solution is used to devise problems for which analytical solutions are known. The convergence rate of the Hessian-based error estimator used in this unstructured mesh adaptation method is first evaluated through mesh convergence studies. Two distinct mesh quality measures are then used to illustrate mesh improvement in the course of adaptation. Finally, the overall adaptive process is verified by measuring the convergence rate of the interpolation error as well as measuring how evenly the interpolation error is distributed over all the elements of the adapted meshes.

***Mots clés:** Verification methodology, anisotropic mesh adaptation*

# Méthodes d'éléments finis mixtes duales pour des écoulements de fluides non newtoniens

Mohamed Farhloul

*Département de mathématiques et de statistique, Université de Moncton, Moncton, NB, E1A 3E9, Canada*

## Résumé

Les méthodes d'éléments finis mixtes duales pour la résolution d'un large éventail de problèmes aux limites linéaires et non linéaires (élasticité linéaire, problème de Stokes, équations de Navier-Stokes, équations de Boussinesq, etc.) ont connu un grand développement ces dernières années. Ces méthodes permettent d'obtenir simultanément des approximations de l'inconnue et son gradient avec le même ordre de précision. De plus, ces méthodes possèdent la propriété de conservation locale de certaines quantités physiques (la masse, la quantité de mouvement) comme dans les méthodes des volumes finis.

Le propos de cet article est de présenter des méthodes d'éléments finis mixtes duales pour des écoulements de fluides non newtoniens.

**Mots clés:** *Méthodes d'éléments finis mixtes duales, Écoulements de fluides non newtoniens*

## 1. Introduction

Les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide, dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ , découlent des lois de base de la mécanique des milieux continus. Pour un fluide homogène et isotrope, ces équations sont :

$$\rho \frac{D \mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f} = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (2)$$

où  $\frac{D}{Dt}$  est la dérivée particulière, *i.e.*,  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ , et  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy défini par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}. \quad (3)$$

Dans le système d'équations précédent,  $p$  désigne la pression hydrostatique,  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des extra-contraintes,  $\mathbf{I}$  le tenseur identité,  $\mathbf{u}$  la vitesse du fluide,  $\rho$  la masse volumique, et  $\mathbf{f}$  représente les forces de masse par unité de volume.

Dans toute la suite, le fluide est supposé incompressible, la masse volumique  $\rho$  est constante, et laminaire, *i.e.*, les termes d'inertie  $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  sont négligeables devant les termes visqueux.

A l'ensemble de ces équations, il faut ajouter une loi de comportement reliant le tenseur des extra-contraintes au tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t)$ . Cette relation exprime le comportement rhéologique du fluide. Pour les fluides newtoniens ou quasi-newtoniens cette relation est explicite et elle s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(\mathbf{D}(\mathbf{u})) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\tau} = 2\eta(\nabla \mathbf{u}) \nabla \mathbf{u}. \quad (4)$$

Les fluides newtoniens, régis par le problème de Stokes, sont des approximations raisonnables de fluides plus réalistes appelés fluides non newtoniens. Pour ces fluides la viscosité est une fonction du tenseur des taux de déformation, de la température, du temps, etc. L'écoulement laminaire, dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , d'un fluide newtonien généralisé ou quasi-newtonien est régi par le système de Stokes avec une viscosité variable. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le modèle mathématique s'écrit de deux manières différentes.

La première formulation, voir Bird et al. [4], utilise le tenseur symétrique des taux de déformation  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ , et est donnée par :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( 2\eta(\mathbf{D}(\mathbf{u})) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \right) + \nabla p &= \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

où la viscosité  $\eta(\cdot)$  dépend du second invariant du tenseur  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  suivant les deux modèles couramment utilisés :

– loi puissance :

$$\eta(\boldsymbol{\tau}) = \eta_0 |\boldsymbol{\tau}|^{r-2}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad (6)$$

– loi de Carreau :

$$\eta(\boldsymbol{\tau}) = \eta_0 \left( 1 + \lambda_0^2 |\boldsymbol{\tau}| \right)^{r-2}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad (7)$$

où  $|\boldsymbol{\tau}|^2 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}^t \boldsymbol{\tau})$  et, pour les deux modèles,  $\eta_0 > 0$  est une viscosité de référence et  $1 < r < \infty$  un paramètre caractéristique du fluide.

La seconde formulation, due à Ladyzhenskaya [9], utilise le tenseur gradient des vitesses  $\nabla \mathbf{u}$  et elle s'écrit :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( \eta_0 \nabla \mathbf{u} + \eta_1 |\nabla \mathbf{u}|^{r-2} \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p &= \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

où les paramètres physiques  $\eta_0 \geq 0$  et  $\eta_1 > 0$  sont des viscosités de référence.

Dans les prochaines sections, nous allons présenter des formulations mixtes duales des problèmes (5) et (8) en dimension deux avec des conditions de Dirichlet homogènes. En se basant sur ces formulations, nous analyserons des méthodes d'éléments finis mixtes duales et nous donnerons les estimations d'erreurs.

## 2. Modèle de Ladyzhenskaya

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à frontière  $\Gamma$  lipschitzienne. On considère le problème de Ladyzhenskaya avec des conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\eta_0 \nabla \mathbf{u} + \eta_1 |\nabla \mathbf{u}|^{r-2} \nabla \mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, & \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Une approximation en éléments finis standards du problème (9) a été développée dans Du et Gunzburger [5]. On s'intéresse ici à une formulation mixte où, en plus des variables primales  $\mathbf{u}$  et  $p$ , les tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}_N = \eta_0 \nabla \mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma} = \eta_1 |\nabla \mathbf{u}|^{r-2} \nabla \mathbf{u}$  sont introduits comme de nouvelles inconnues. Signalons que le cas  $\eta_0 = 0$  a été considéré dans Manouzi et Farhloul [10]. Pour les démonstrations des résultats de cette section et pour d'autres détails, nous renvoyons le lecteur à Farhloul et Zine [7].

### 2.1. Formulation mixte duale

En introduisant les nouvelles variables  $\boldsymbol{\sigma}_N = \eta_0 \nabla \mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma} = \eta_1 |\nabla \mathbf{u}|^{r-2} \nabla \mathbf{u}$ , et en utilisant le fait que

$$\frac{1}{\eta_1^{r'-1}} |\boldsymbol{\sigma}|^{r'-2} \boldsymbol{\sigma} = \nabla \mathbf{u},$$

où  $r'$  est le conjugué de  $r$  (i.e.,  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ ), le problème (9) devient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_N &= \eta_0 \nabla \mathbf{u}, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{1}{\eta_1^{r'-1}} |\boldsymbol{\sigma}|^{r'-2} \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \mathbf{u}, & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_N + \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I}) &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, & \text{sur } \Gamma, \end{aligned} \quad (10)$$

où  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ . Dans ce qui suit, nous considérons le problème (10) avec  $1 < r < 2$ .

Pour écrire la formulation mixte de (10), on introduit les espaces :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left\{ \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_N, \boldsymbol{\tau}, q) \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} \times [L^{r'}(\Omega)]^{2 \times 2} \times L_0^2(\Omega); \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_N + \boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}) \in [L^2(\Omega)]^2 \right\}, \\ M &= [L^2(\Omega)]^2, \end{aligned}$$

munis des normes :

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\Sigma} = \|\boldsymbol{\tau}_N\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,r',\Omega} + \|q\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_N + \boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I})\|_{0,\Omega},$$

$$\|\mathbf{v}\|_M = \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}.$$

L'espace  $L_0^2(\Omega)$  est défini par  $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q \, dx = 0\}$ .

En posant

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{\eta_1^{r'-1}} |\boldsymbol{\sigma}|^{r'-2} \boldsymbol{\sigma},$$

la formulation mixte associée au problème (10) consiste à trouver  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\boldsymbol{\sigma}_N, \boldsymbol{\sigma}, p) \in \Sigma$  et  $\mathbf{u} \in M$  tels que  $\forall (\boldsymbol{\tau}_N, \boldsymbol{\tau}, q) \in \Sigma$  et  $\forall \mathbf{v} \in M$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_0} (\boldsymbol{\sigma}_N, \boldsymbol{\tau}_N) + (\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_N + \boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}), \mathbf{u}) &= 0, \\ (\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_N + \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I}), \mathbf{v}) + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (11), nous avons besoin des résultats suivants.

**Lemme 2.1** *Il existe une constante positive  $C$  telle que*

$$\|q\|_{0,\Omega} \leq C(\|\boldsymbol{\tau}_N\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,r',\Omega}), \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\tau}} = (\boldsymbol{\tau}_N, \boldsymbol{\tau}, q) \in V,$$

où

$$V = \left\{ \tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \Sigma; (\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_N + \boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}), \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in M \right\}.$$

**Lemme 2.2** *Il existe une constante positive  $\beta$  telle que*

$$\inf_{\mathbf{v} \in M} \sup_{\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \Sigma} \frac{(\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_N + \boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}), \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_M \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|_{\Sigma}} \geq \beta.$$

À l'aide de ces deux lemmes, on montre le résultat suivant :

**Théorème 2.1** *Le problème (11) admet une solution et une seule  $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}) \in \Sigma \times M$ . De plus, cette solution vérifie la condition de stabilité :*

$$\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_{\Sigma} + \|\mathbf{u}\|_M \leq C,$$

où  $C$  est une constante positive dépendant de  $\mathbf{f}$ .

## 2.2. Le problème discret et les estimations d'erreurs

On suppose que la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est polygonale et on considère une famille régulière de triangulations  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\bar{\Omega}$ . Pour  $K \in \mathcal{T}_h$ , un élément de la triangulation et  $k \in \mathbb{N}$ , on note par  $P_k(K)$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  sur  $K$ . On considère l'élément fini de Raviart–Thomas du plus bas degré (voir Raviart et Thomas [12], Nedelec [11]) :

$$RT_0(K) = [P_0(K)]^2 + \mathbf{x}P_0(K), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

On introduit les espaces de dimension finie suivants :

$$\begin{aligned}\Sigma_h &= \{(\boldsymbol{\tau}_N, \boldsymbol{\tau}, q) \in \Sigma; \boldsymbol{\tau}_{N|_K} \in [RT_0(K)]^2, \boldsymbol{\tau}|_K \in [RT_0(K)]^2, q|_K \in P_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ M_h &= \{\mathbf{v} \in M; \mathbf{v}|_K \in [P_0(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.\end{aligned}$$

Le problème approché de (11) est donné par : trouver  $\boldsymbol{\sigma}_h = (\boldsymbol{\sigma}_{N,h}, \boldsymbol{\sigma}_h, p_h) \in \Sigma_h$  et  $\mathbf{u}_h \in M_h$  tels que,  $\forall (\boldsymbol{\tau}_N, \boldsymbol{\tau}, q) \in \Sigma_h$  et  $\forall \mathbf{v} \in M_h$  :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta_0}(\boldsymbol{\sigma}_{N,h}, \boldsymbol{\tau}_N) + (\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}_h), \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}_N + \boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}), \mathbf{u}_h) &= 0, \\ (\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_{N,h} + \boldsymbol{\sigma}_h - p_h \mathbf{I}), \mathbf{v}) + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Nous avons l'équivalent en discret du lemme 2.1 et du lemme 2.2 avec des constantes indépendantes de  $h$ . Ceci permet de montrer que le problème variationnel (12) admet une solution et une seule.

Pour les estimations d'erreurs, nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.2** *Si la solution du problème (11) vérifie*

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_N, \boldsymbol{\sigma}, p) \in [H^1(\Omega)]^{2 \times 2} \times [W^{1,r'}(\Omega)]^{2 \times 2} \times H^1(\Omega), \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2,$$

alors il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_N - \boldsymbol{\sigma}_{N,h}\|_{0,\Omega} \leq Ch, \tag{13}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,r',\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{2/r'}, \tag{14}$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch. \tag{15}$$

Pour l'implantation de cette méthode et des résultats numériques pour un écoulement confiné dans une cavité entraînée ainsi qu'un écoulement dans une conduite avec marche, voir Farhloul et Zine [7].

### 3. Écoulement de fluides quasi-newtoniens

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à frontière  $\Gamma$  lipschitzienne. On considère le problème aux limites :

$$\begin{aligned}-2\eta_0 \mathbf{div} \left( |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^{r-2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \right) + \nabla p &= \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sur } \Gamma.\end{aligned}\tag{16}$$

Le problème de Stokes généralisé (16) ainsi que son approximation par éléments finis standards a été étudié dans Baranger et Najib [1]. Des extensions de ces résultats ainsi que des améliora-

tions des bornes d'erreurs ont été obtenues dans Sandri [13] ainsi que dans Barrett et Liu [2, 3].

Le but de ce travail est d'étendre l'approche développée dans la section précédente au problème d'écoulement de fluides quasi-newtoniens régi par le système d'équations aux dérivées partielles (16). L'intérêt principal de ce modèle réside dans le fait que nous pouvons envisager des conditions aux limites naturelles faisant intervenir le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ . Mais il faut aussi noter que la symétrie de ce tenseur introduit une difficulté supplémentaire qui sera dualisée par un multiplicateur de Lagrange. Pour les démonstrations des résultats de cette section et pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à Farhloul et Zine [8].

### 3.1. Formulation mixte duale

Pour simplifier l'écriture, on choisit  $\eta_0 = \frac{1}{2}$ . On introduit,  $\boldsymbol{\sigma} = |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^{r-2} \mathbf{D}(\mathbf{u})$ , le tenseur des extra-contraintes et on inverse la loi en écrivant

$$|\boldsymbol{\sigma}|^{r'-2} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\mathbf{u}).$$

Le problème (16) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}) = |\boldsymbol{\sigma}|^{r'-2} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}(\mathbf{u}), & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I}) &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, & \text{sur } \Gamma, \end{aligned} \tag{17}$$

où  $\mathbf{f} \in [L^{r'}(\Omega)]^2$ .

Notons que pour tout  $(\boldsymbol{\tau}, q) \in [L^{r'}(\Omega)]^{2 \times 2} \times L_0^{r'}(\Omega)$  tel que  $\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}) \in [L^{r'}(\Omega)]^2$ , comme  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , nous avons :

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{D}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}) = (\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}) = -(\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}), \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau})$$

où  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^t)$  et  $L_0^{r'}(\Omega) = \{q \in L^{r'}(\Omega); \int_{\Omega} q \, dx = 0\}$ .

Pour écrire la formulation variationnelle mixte associée au problème (17), nous introduisons les espaces :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left\{ \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}, q) \in [L^{r'}(\Omega)]^{2 \times 2} \times L_0^{r'}(\Omega); \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}) \in [L^{r'}(\Omega)]^2 \right\}, \\ M &= \left\{ \boldsymbol{v} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) \in [L^r(\Omega)]^2 \times [L^r(\Omega)]^{2 \times 2}; \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^t = 0 \right\}, \end{aligned}$$

munis des normes :

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\Sigma} = \left( \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,r',\Omega}^{r'} + \|q\|_{0,r',\Omega}^{r'} + \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I})\|_{0,r',\Omega}^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}},$$

$$\|\underline{v}\|_M = \left( \|\mathbf{v}\|_{0,r,\Omega}^r + \|\boldsymbol{\eta}\|_{0,r,\Omega}^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

La formulation mixte s'écrit alors : trouver  $\underline{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}, p) \in \Sigma$  et  $\underline{u} \in M$  tels que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}), \mathbf{u}) + (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega}) &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}, q) \in \Sigma, \\ (\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I}), \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= 0, \quad \forall \underline{v} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) \in M. \end{aligned} \quad (18)$$

Notons que de la seconde équation de (18), on tire  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0$  pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in [L^r(\Omega)]^{2 \times 2}$  vérifiant  $\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^t = 0$ . Ceci correspond à la relaxation de la symétrie du tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  par un multiplicateur de Lagrange.

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (18), on montre d'abord les résultats suivants.

**Lemme 3.1** *Il existe une constante positive  $C$  telle que*

$$\|q\|_{0,r',\Omega} \leq C \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,r',\Omega}, \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, q) \in V,$$

où

$$V = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \Sigma; \quad (\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}), \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \forall \underline{v} \in M \right\}.$$

**Lemme 3.2** *Il existe une constante positive  $\beta$  telle que*

$$\inf_{\underline{v} \in M} \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \Sigma} \frac{(\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}), \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})}{\|\underline{v}\|_M \|\boldsymbol{\tau}\|_\Sigma} \geq \beta.$$

Encore une fois, à l'aide de ces deux derniers lemmes, on montre le résultat suivant :

**Théorème 3.1** *Le problème (18) admet une solution et une seule  $(\underline{\sigma}, \underline{u}) \in \Sigma \times M$ . De plus, il existe une constante positive  $C$ , dépendant de  $\mathbf{f}$ , telle que*

$$\|\underline{\sigma}\|_\Sigma + \|\underline{u}\|_M \leq C.$$

### 3.2. Le problème discret et l'analyse de l'erreur

Pour  $K \in \mathcal{T}_h$ , un élément de la triangulation, on note par  $b_K$  la fonction bulle définie par  $b_K(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in K$ , où  $\lambda_i, i = 1, \dots, 3$ , désignent les coordonnées barycentriques dans  $K$ . Soit

$$R(K) = [P_1(K)]^2 \oplus \mathbb{R} \mathbf{rot} b_K \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On introduit les espaces de dimension finie :

$$\begin{aligned}\Sigma_h &= \left\{ \underline{\boldsymbol{\tau}} = (\boldsymbol{\tau}, q) \in \Sigma; q|_K \in P_1(K), \boldsymbol{\tau}|_K \in [R(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ M_h &= \left\{ \underline{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta}) \in M; \boldsymbol{v}|_K \in [P_0(K)]^2, \boldsymbol{\eta} = \theta \boldsymbol{\chi} \text{ avec } \theta|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.\end{aligned}$$

Notons que de tels espaces ont été introduits en premier dans Farhloul et Fortin [6] pour le problème de l'élasticité linéaire.

Le problème approché de (18) est donné par : trouver  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h = (\boldsymbol{\sigma}_h, p_h) \in \Sigma_h$  et  $\underline{\boldsymbol{u}}_h = (\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\omega}_h) \in M_h$  tels que :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}_h), \boldsymbol{\tau}) + (\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - q \mathbf{I}), \boldsymbol{u}_h) + (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega}_h) &= 0, \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, q) \in \Sigma_h, \\ (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - p_h \mathbf{I}), \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\eta}) + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) &= 0, \quad \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta}) \in M_h.\end{aligned}\tag{19}$$

L'existence, l'unicité de  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h = (\boldsymbol{\sigma}_h, p_h) \in \Sigma_h$  et  $\underline{\boldsymbol{u}}_h = (\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\omega}_h) \in M_h$  solution du problème (19) ainsi que les estimations d'erreurs sont obtenus d'abord en montrant l'équivalent en discret du lemme 3.1 et du lemme 3.2. Ensuite, modulo un résultat d'interpolation, on démontre les deux théorèmes suivants qui donnent les estimations d'erreurs pour le paramètre  $r$  compris entre 1 et 2 et pour  $r > 2$ .

**Théorème 3.2** *On suppose que  $1 < r < 2$ . Soit  $\mathbf{u}_h^* = P_h^0(\mathbf{u})$  la projection- $L^2$  de  $\mathbf{u}$  sur  $[\prod_{K \in \mathcal{T}_h} P_0(K)]^2$ . Si  $\underline{\boldsymbol{\sigma}} = (\boldsymbol{\sigma}, p) \in [W^{m,r'}(\Omega)]^{2 \times 2} \times W^{m,r'}(\Omega)$  et  $\underline{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \in [W^{1,r}(\Omega)]^2 \times [W^{m,r}(\Omega)]^{2 \times 2}$ ,  $m = 1, 2$ , il existe alors une constante  $C$ , indépendante de  $h$ , telle que :*

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,r',\Omega} + \|p - p_h\|_{0,r',\Omega} \leq Ch^{m(r-1)},\tag{20}$$

$$\|\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}_h\|_{0,r,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h\|_{0,r,\Omega} \leq Ch^{m(r/2)},\tag{21}$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,r,\Omega} \leq Ch^{r/2}, \text{ si } m = 1,\tag{22}$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,r,\Omega} \leq Ch, \text{ si } m = 2.\tag{23}$$

**Théorème 3.3** *On suppose que  $r \geq 2$ . Soit  $\mathbf{u}_h^* = P_h^0(\mathbf{u})$  la projection- $L^2$  de  $\mathbf{u}$  sur  $[\prod_{K \in \mathcal{T}_h} P_0(K)]^2$ . Si  $\underline{\boldsymbol{\sigma}} = (\boldsymbol{\sigma}, p) \in [W^{m,r'}(\Omega)]^{2 \times 2} \times W^{m,r'}(\Omega)$  et  $\underline{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \in [W^{1,r}(\Omega)]^2 \times [W^{m,r}(\Omega)]^{2 \times 2}$ ,  $m = 1, 2$ , il existe alors une constante  $C$ , indépendante de  $h$ , telle que :*

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,r',\Omega} + \|p - p_h\|_{0,r',\Omega} \leq Ch^{m(r'/2)},\tag{24}$$

$$\|\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}_h\|_{0,r,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h\|_{0,r,\Omega} \leq Ch^{m(r'-1)},\tag{25}$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,r,\Omega} \leq Ch^{r'-1}, \text{ si } m = 1,\tag{26}$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,r,\Omega} \leq Ch^{\min\{1, 2(r'-1)\}}, \text{ si } m = 2.\tag{27}$$

Notons que les estimations d'erreurs, obtenues ici, sur la vitesse et la pression sont identiques à celles obtenues dans Sandri [13] et Barrett et Liu [3]. De plus, pour le tenseur des

contraintes, nous obtenons des estimations en  $O(h^{m(r-1)})$  pour  $r \in (1, 2)$  et en  $O(h^{m(\frac{r}{2(r-1)})})$  pour  $r > 2$ .

#### 4. Discussion et conclusions

Nous avons présenté et analysé des méthodes d'éléments finis mixtes duales pour deux modèles d'écoulements de fluides non newtoniens. Pour les deux modèles, nous avons utilisé la loi puissance. Cette loi permet d'écrire explicitement le tenseur gradient des vitesses  $\nabla \mathbf{u}$  ou le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  en fonction du tenseur des extra-contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ . Cependant, pour la loi de Carreau (et d'autres lois) on ne peut pas obtenir explicitement  $\nabla \mathbf{u}$  ou  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  en fonction de  $\boldsymbol{\sigma}$ . Nous pensons que dans ce cas il faudrait introduire  $\boldsymbol{\sigma}_s = \nabla \mathbf{u}$  ou  $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{D}(\mathbf{u})$  comme une nouvelle variable et réécrire le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  en fonction de  $\boldsymbol{\sigma}_s$ .

#### Références

- [1] J. Baranger, K. Najib, Analyse numérique des écoulements quasi-Newtoniens dont la viscosité obéit à la loi puissance ou la loi de Carreau, Numer. Math. 58, 1990, pp. 35-49.
- [2] J.W. Barrett, W.B. Liu, Finite element error analysis of a quasi-Newtonian flow obeying the Carreau or power law, Numer. Math. 64, 1993, pp. 433-453.
- [3] J.W. Barrett, W.B. Liu, Quasi-norm error bounds for the finite element approximation of a non-Newtonian flow, Numer. Math. 68, 1994, pp. 437-456.
- [4] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, Dynamics of Polymeric Liquids I, John Wiley and Sons, Amsterdam, 1987.
- [5] Q. Du, M.D. Gunzburger, Finite-element approximations of a Ladyzhenskaya model for stationary incompressible viscous flow, SIAM J. Numer. Anal. 27, 1990, pp.1-19.
- [6] M. Farhloul, M. Fortin, Dual hybrid methods for the elasticity and the Stokes problems : A unified approach, Numer. Math. 76, 1997, pp. 419-440.
- [7] M. Farhloul, A.M. Zine, A mixed finite element method for a Ladyzhenskaya model, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191, 2002, pp. 4497-4510.
- [8] M. Farhloul, A.M. Zine, A mixed finite element method for a quasi-newtonian fluid flow, Numer. Methods Partial Differential Eq. 20, 2004, pp. 803-819.
- [9] O.A. Ladyzhenskaya, New equations for the description of the viscous incompressible fluids and solvability in the large of the boundary value problems for them, in : Boundary

Value Problems of Mathematical Physics, V, American Mathematical Society, Providence, RI, 1970.

- [10] H. Manouzi, M. Farhloul, Mixed finite element analysis of a non-linear three fields Stokes model, IMA J. Numer. Anal. 21, 2001, pp. 143-164.
- [11] J.C. Nedelec, Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ , Numer. Math. 35, 1980, pp. 315-341.
- [12] P.A. Raviart, J.M. Thomas, A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, in : Lecture Notes in Mathematics, vol. 606, Springer, New York, 1977, pp. 292-315.
- [13] D. Sandri, Sur l'approximation numérique des écoulements quasi-Newtoniens dont la viscosité suit la loi puissance ou la loi de Carreau, M<sup>2</sup>AN 27, 1993, pp. 131-155.

# From Euler, Ritz and Galerkin to Modern Computing

Martin J. Gander and Gerhard Wanner

March 24, 2010

## Contents

<b>1</b>	<b>The Variational Calculus of Euler–Lagrange</b>	<b>2</b>
1.1	The Brachystochrone Problem . . . . .	2
1.2	Euler’s Differential Equation for a Variational Problem . . . . .	3
1.3	Euler’s Integral Calculus . . . . .	4
1.4	Joseph Louis de Lagrange . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Laplace’s Equation and Dirichlet’s Principle</b>	<b>7</b>
2.1	Conformal Maps and the Riemann Mapping Theorem . . . . .	8
2.2	Dirichlet’s Principle . . . . .	10
<b>3</b>	<b>The Elastic Plate</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Ritz’ Treatment of the Plate and Dirichlet’s Principle</b>	<b>13</b>
4.1	Ritz’ method . . . . .	14
4.2	A Basis Using one-dimensional Elastic Curves . . . . .	16
4.3	Dirichlet’s Principle . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Ritz Computes Chladni Figures</b>	<b>19</b>
5.1	The Mathematical Model for Chladni Figures . . . . .	19
5.2	Ritz’ Computation of Chladni Figures . . . . .	22
5.3	First Reactions to Ritz’ Work in Western Europe . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Immediate use of Ritz’ Method in Russia</b>	<b>33</b>
6.1	Timoshenko . . . . .	33
6.2	Bubnov . . . . .	34
6.3	Galerkin . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Late Recognition of Ritz’ Work in Western Countries and Birth of the Finite Element Methods</b>	<b>36</b>
<b>8</b>	<b>An Application</b>	<b>40</b>

## 1 The Variational Calculus of Euler–Lagrange

The most famous contributions of Walther Ritz concern decisive progress for *variational problems*, initiating thereby important algorithms for modern scientific computations. Going back to the roots, we will see how variational calculus started in 1696 with the famous challenge concerning the Brachystochrone problem, which led to endless disputes between the Bernoulli brothers. Euler [9] gave in 1744 a general solution of variational problems in form of a differential equation. Eleven years later, nineteen year old Lagrange then communicated, in a famous letter to Euler, an elegant justification for this equation. The prodigious contributions of Euler concerning the analytic and numerical solutions of differential equations, in particular his *Institutiones Calculi Integralis* [10] from 1668–1670, then add the finishing touch to the theory.

### 1.1 The Brachystochrone Problem

In 1696, Johann Bernoulli challenged his brother Jacob with the following problem (see Fig. 1): *given two fixed points A and B in a vertical plane, find a curve AMB such that a body gliding on it under gravitation, starting from A, arrives after the shortest possible time at B*, or in beautiful Latin: *Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B*. Already Galilei, in 1638, knew that the *shortest* path, the straight line between A and B, is not the *quickest* and that it is better to begin with greater slope in order to increase the speed right from the start. But the true shape of the best curve remained a mystery for nearly a century.

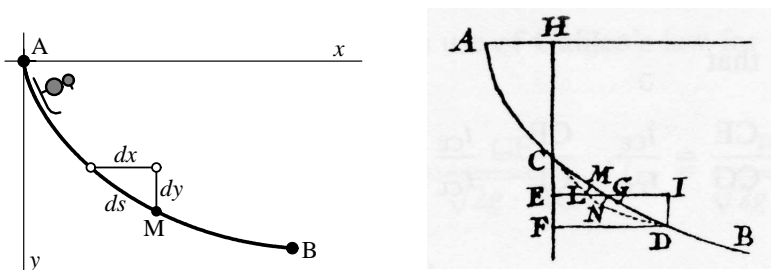


Figure 1: The Brachystochrone problem (left); Jacob Bernoulli’s solution (right)

In order to turn this physical question into a mathematical form<sup>1</sup>, we notice that the time for passing through a small arc length  $ds$  is  $dJ = \frac{ds}{v}$ . Inserting

<sup>1</sup>Letter of de l’Hôpital to Joh. Bernoulli, June 15th, 1696: “Ce probleme me paroist des plus curieux et des plus jolis que l’on ait encore proposé et je serois bien aise de m’y appliquer ;

$v = \sqrt{2gy}$  (Galilei), we obtain the problem of finding a function  $y(x)$  with  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$  such that the integral

$$J = \int_a^b \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \min! \quad \text{where } p = \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

## 1.2 Euler's Differential Equation for a Variational Problem

Euler (Caput II of E65 [9], 1744): Let a general variational problem be given as

$$J = \int_a^b Z(x, y, p) dx = \min! \text{ or } \max! \quad \text{where } p = \frac{dy}{dx}. \quad (2)$$

**Euler's Theorem** For an optimal solution we have

$$\boxed{N - \frac{d}{dx}P = 0} \quad \text{where } N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial Z}{\partial p}. \quad (3)$$

We come back later to a proof of this formula. Because  $P$  contains in general  $p = y'$ , and is differentiated once more, this equation consists usually of a *second order* ordinary differential equation for  $y(x)$ , and may be difficult to solve. In the case where  $Z$  is *independent of  $x$* , i.e., if  $dZ = N dy + P dp$ , Euler found, in §30 of caput II of E65, an elegant reduction of the order: multiply

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \quad \text{by} \quad dy = p dx \quad \Rightarrow \quad N dy - p dP = 0,$$

add and subtract  $P dp$  to obtain

$$\underbrace{N dy + P dp}_{dZ} - \underbrace{(p dP + P dp)}_{d(p \cdot P)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z - p \cdot \frac{\partial Z}{\partial p} = \text{Const.}} \quad (4)$$

**Example 1** (smallest curve length, smallest energy; Euler E65, Caput II, §33). We search for a curve with  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$  of shortest arc length, i.e.,

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + p^2} dx = \min! \quad (5)$$

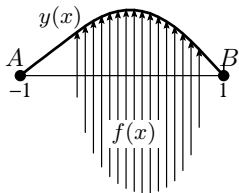
Here,  $N = 0$  and we obtain from (3) that  $\frac{dP}{dx} = 0$ , i.e.,  $P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$  must be constant, thus  $p = \text{constant}$  too. Not surprisingly, the solution is a straight line. Euler explains that the same result is valid for *any* problem where  $Z$  depends uniquely on  $p$ . An interesting case is

$$J = \int_a^b \frac{p^2}{2} dx = \min! \quad \text{for which (3) becomes} \quad -\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \quad (6)$$

---

mais pour cela il seroit necessaire que vous me l'envoyassiez reduit à la mathématique pure, car le phisique m'embarasse ...".

Here  $J$  represents the *energy of a stretched elastic cord*. If a transversal force  $f(x)$  acts on the cord, we get the problem

$$J = \int_a^b \left( \frac{p^2}{2} - f \cdot y \right) dx = \min! \quad \text{which leads to} \quad -\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) . \quad (7)$$


This case was too simple for Euler to mention, but its extension to higher dimensions will become very important later.

**Example 2** (the Brachystochrone problem; Euler E65, Caput II, §34). For (1) we obtain from (4)

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{p^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+p^2}} = C \quad \text{or} \quad 1 = \sqrt{1+p^2}\sqrt{2gy} \cdot C . \quad (8)$$

It is still not a trivial matter to find a curve with this property. We remark that Johann Bernoulli arrived, with one of his typically brilliant intuitions, at once at this last equation, by applying Snellius-Descartes' law of light refraction. Because  $\frac{\sin \alpha}{v} = \text{const} = \frac{1}{v} \frac{dx}{ds} = 1/(\sqrt{1+p^2}\sqrt{2gy})$ , by (8) this law is everywhere satisfied and represents, by Fermat's principle, the quickest path.

### 1.3 Euler's Integral Calculus

A considerable part of Euler's tremendous work is devoted to analytical and numerical methods for the resolution of integrals and differential equations. This work culminates in the three volumes of *Institutiones Calculi Integralis* [10] (E342, E366, E385) from 1768-1770. Let us apply some of his methods to find the solution of the Brachystochrone problem (8): we resolve the equation for  $p = \frac{dy}{dx}$  and obtain

$$1 + p^2 = \frac{1}{C^2y} \quad \text{or} \quad p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{C^2y} - 1} = \sqrt{\frac{c-y}{y}} \quad (9)$$

with  $c = C^{-2}$ . Euler (and the Bernoulli brothers) tell us that, whenever possible, the variables  $x$  and  $y$  should be separated, which here leads to

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}} \cdot dy = dx .$$

This must be integrated on both sides. For such integrals, Euler found many substitutions. Here, the easiest is to set  $y = c \cdot \sin^2 u$ , so that the denominator becomes  $c \cdot \cos^2 u$  and the square root disappears. We then obtain

$$y = c \cdot \sin^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \cos 2u , \quad x - x_0 = cu - \frac{c}{2} \sin 2u$$

Ipsius	valores successivi
$x$	$a, a', a'', a''', a^{IV}, \dots, x, x$
$y$	$b, b', b'', b''', b^{IV}, \dots, y, y$
$V$	$A, A', A'', A''', A^{IV}, \dots, V, V.$

Figure 2: First publication of Euler’s numerical method for differential equations.

so that “curvam quaesitam esse *Cycloidem*”.

**Numerical Solution.** Whenever such an analytical solution is not possible, Euler proposes (in Vol. I, Sect. Secunda §650) to compute the solution *vero proxime assignare*, by writing an equation as (9) in the general form

$$\frac{dy}{dx} = V(x, y) \quad \text{so that} \quad x_{i+1} = x_i + \Delta x, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot V(x_i, y_i) \quad (10)$$

are, for  $i = 1, 2, 3, \dots$ , *valores successivi* of numerical approximations to the solution. The smaller we choose the “step size”  $\Delta x$ , the better will be the numerical approximation. We see in Fig. 2 the first publication of this method, and in Fig. 3 (left) the numerical result by computing 16 steps with this formula for the Brachystochrone problem<sup>2</sup>. This is the first of the so-called *difference methods*, which dominated all scientific calculations during two centuries.

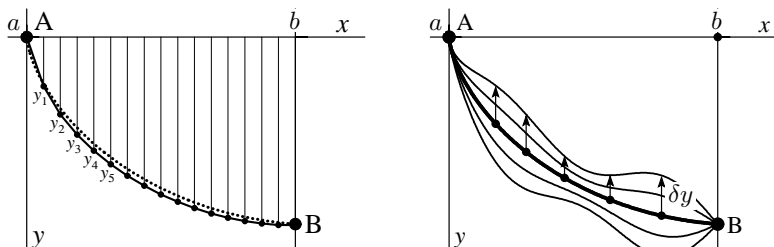
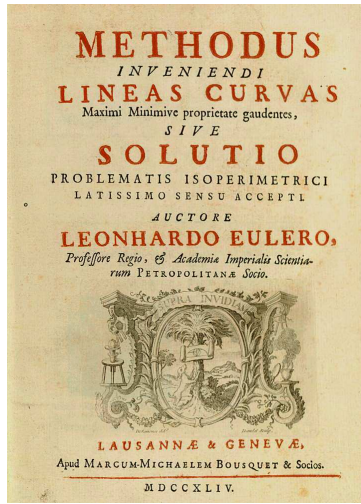


Figure 3: Numerical solution of the Brachystochrone by Euler’s method (exact solution dotted, left); Lagrange’s variation  $\epsilon\delta y$  of  $y$  for  $\epsilon = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$  (right).

## 1.4 Joseph Louis de Lagrange

On August 12th, 1755, Ludovico de la Grange Tournier (19 years) writes to *Vir amplissimum atque celeberrimum L. Euler*, from whom *Vir praestantissimum atque excellentissimum Lagrange* receives a kind and enthusiastic answer (6 sept. 1755).

<sup>2</sup>The formula does not work for  $i = 0$ , because here  $V$  becomes infinite. Such singularities must be treated separately.



Variational Calc. 1744 E65



Inst. Calc. Integralis 1768 E342

Figure 4: Euler's legacy for the theory of variational and integral calculus.

Lagrange's idea is the following: suppose that  $y(x)$  is the optimal solution and choose an arbitrary *variation*<sup>3</sup>  $\delta y(x)$ . If we add this variation (for a simpler understanding multiplied with  $\epsilon$ ) to  $y(x)$  (see Fig. 3, right) and insert the result into (2), this integral must *increase in all directions*, i.e., the derivative of

$$J(\epsilon) = \int_a^b Z(x, y + \epsilon \delta y, p + \epsilon \delta p) dx = \min ! \quad (11)$$

with respect to  $\epsilon$  must be zero for  $\epsilon = 0$ . We differentiate:

$$\frac{\partial J(\epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b (N \cdot \delta y + P \cdot \delta p) dx = 0. \quad (12)$$

Since  $\delta p$  is the derivative of  $\delta y$ , we integrate by parts:

$$\int_a^b \left( N - \frac{d}{dx} P \right) \cdot \delta y \cdot dx = 0. \quad \text{“weak solution”} \quad (13)$$

Because  $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$  (the end points of  $y$  are fixed), the integrated part of (13) vanishes. Since  $\delta y$  is arbitrary, we conclude that for all  $x$

$$N - \frac{d}{dx} P = 0 \quad \text{“strong solution”} . \quad (14)$$

This last step, a trivial conclusion for the young discoverer, later caused the greatest difficulties.

<sup>3</sup>From here originates the name of the whole theory.

The passage from the variational problem (11) by differentiation to (12), then by partial integration to (13), finally to (14) is the *central highway of variational calculus*. In modern times (12) will be called the “directional derivative” of  $J$ , the function  $\delta y(x)$  in (13) will be called a “test function”; this equation will be the starting point of the “Galerkin method”. If we then manage to solve equation (14), we have solved the original variational problem *à la Euler*. A very important application of the theory appeared in 1788 with Lagrange’s *Mécanique analytique*, where the above “highway” connects the *Lagrangian* of a mechanical system (difference of potential and kinetic energy) to the differential equations of its motion. This later led to Hamiltonian mechanics.

## 2 Laplace’s Equation and Dirichlet’s Principle

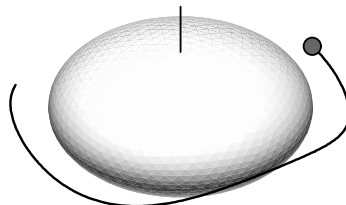


Figure 5: Attraction of a non-spherical celestial body

Since Newton’s *Principia* from 1687, we know that celestial bodies move under the action of forces obeying the inverse square law, and since Euler’s work (in particular E112 from 1749) their motion obeys second order differential equations with the corresponding term  $f_x \approx \frac{x-\xi}{r^3}$ ,  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ . But this is only valid for point-wise, or at most, perfectly spherical bodies. If our body has another shape (see Fig. 5), the attracting forces become

$$f_x = \iiint \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{x-\xi}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad (15)$$

and similarly for  $f_y$  and  $f_z$ , which are no handy expressions. Here Laplace (*Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure de la terre*, 1785; see also *Oeuvres I*, Mécanique céleste, p. 157) had the idea to introduce the *Potential*

$$V = \iiint \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad \text{so that} \quad f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (16)$$

and similarly for  $f_y$  and  $f_z$ . If we differentiate (15) once again with respect to  $x$  (and  $y$  and  $z$  respectively) we find for  $V$  the elegant expression

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (17)$$

which bears the name *Laplace’s equation*.

Soon later, this equation also found many important applications, not only in heaven, but also down to earth:

- theory of *stationary heat transfer* (Fourier 1822);
- theory of *magnetism* (Gauss and Weber in Göttingen, C.F. Gauss [12], Werke 5, p. 195, 1839);
- theory of *electric fields* (W. Thomson, later Lord Kelvin [19], Liouville J. 12, 1847);
- *conformal mappings* (Gauss 1825, Werke IV, p. 189);
- in *complex analysis* (Cauchy 1825, Riemann [22] Thesis 1851);
- rotation free *fluid motion* in 2D (Helmholtz 1858).

All these applications led young Riemann to the following enthusiastic statement:

“Eine vollkommen in sich abgeschlossene mathematische Theorie, welche . . . fortschreitet, ohne zu scheiden, ob es sich um die Schwerkraft, oder die Electricität, oder den Magnetismus, oder das Gleichgewicht der Wärme handelt.” (Manuscript of Riemann, Nov. 1850, Werke p. 545.)

## 2.1 Conformal Maps and the Riemann Mapping Theorem

With his thesis [22] from 1851, Riemann founded *geometric function theory*, a subject which studies theorems from complex analysis through elegant geometric considerations, and which was later brought to perfection mainly through the work of Richard Courant (cf. the second part of Hurwitz and Courant [15]). The starting points are the Cauchy-Riemann differential equations for  $C$ -differentiable functions  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  with  $z = x + iy$ ,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (18)$$

(in Riemann’s hand-writing; courtesy of Prof. E. Neuenschwander), which, when differentiated, give

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{and} \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (19)$$

i.e.,  $u$  and  $v$  are *harmonic*. Furthermore, equations (18) tell us that the Jacobian in  $R^2$  of a  $C$ -differentiable function is of the form

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \text{Const} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (20)$$

i.e., consists locally of a homothesy and an orthogonal rotation. Such everywhere angle-preserving functions are called *conformal* (“in kleinsten Theilen ähnlich”; see Fig. 6).

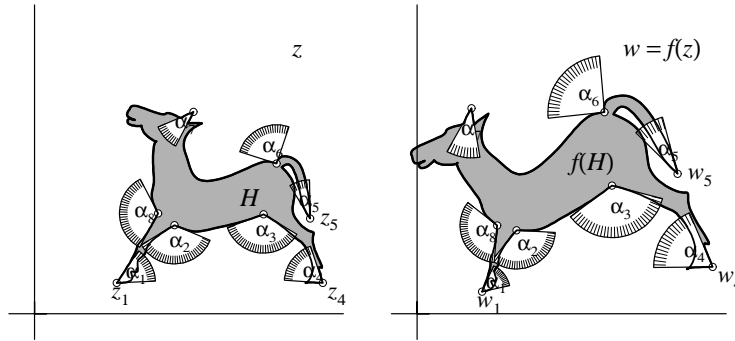


Figure 6: A conformal mapping

**Riemann mapping theorem.** *For any simply connected domain  $\Omega$  there exists a bijective conformal mapping to the unit circle  $f : \Omega \rightarrow B$ . The point  $z_0$  mapped to the origin can be freely chosen in the interior of  $\Omega$  as well as the image point of one point of the periphery. (“Zwei gegebene einfach zusammenhängende Flächen können stets so aufeinander bezogen werden, dass jedem Punkte der einen Ein mit ihm stetig fortrückender Punkt entspricht... .. und ihre entsprechenden kleinsten Theile ähnlich sind;...”; Riemann [22], 1851, §21).*

*Riemann’s proof of the mapping theorem:* Riemann sketched a dubious proof of this audacious vision in the last two paragraphs of his thesis [22]. Some years later, in [23], he explained his ideas “in etwas veränderter Form”. The theorem is illustrated in Fig. 7, where  $\Omega$  is an “inverse ellipse” defined by the radius  $r(\phi) \leq (1 - 0.99 \cos^2 \phi)^{1/2}$ ; for  $z_0$  we choose the origin. We then place a logarithm  $\log(z - z_0) = \log r + i\phi$  at the point  $z_0$ . The level curves of its real part  $u_0(x, y)$  are the concentric circles around  $z_0$ ; the level curves of the imaginary part, orthogonal to the first ones, are the star rays out of  $z_0$ . The problem is that the boundary of  $\Omega$  is normally *not* a level curve of  $u_0$ . We postulate that there exists an everywhere harmonic function  $u_1(x, y)$  such that  $u_1(x, y) = u_0(x, y)$  on the boundary  $\partial\Omega$ . The function  $u(x, y) := u_0(x, y) - u_1(x, y)$  will be harmonic in  $\Omega$  with the exception of the point  $z_0$ , where we have the logarithmic singularity, and it will be zero on  $\partial\Omega$ . By solving the differential equations (18), we complete  $u(x, y)$  to a complex function  $u(x, y) + iv(x, y)$ . The exponential function of this will then map  $z_0$  to the origin and the boundary of  $\Omega$  to the boundary of the circle. Q.E.D.

These ideas of Riemann left much to do for scientists over a century, clarifying the above proof, clarifying regularity conditions, more general domains, and better computational algorithms; see the last chapter of [15], Chapters 16 and 17 of Henrici’s trilogy [14], and Gutknecht [13]. The principal obstacle was the existence of the function  $u_1$ , which we will discuss in the next subsection.

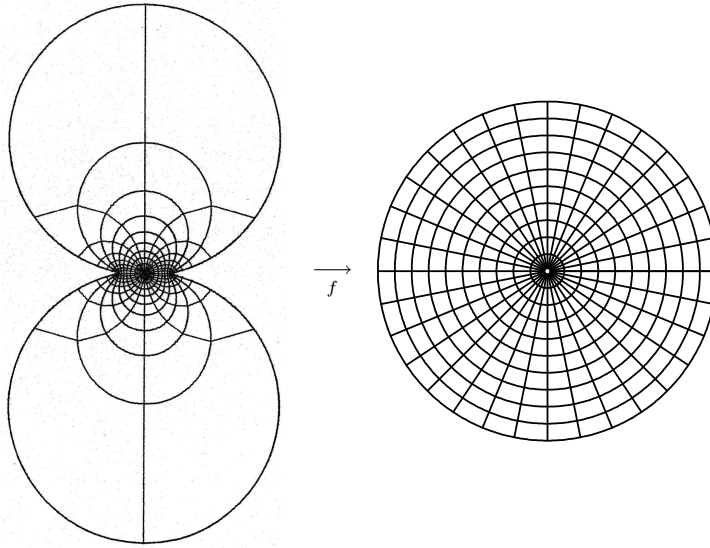


Figure 7: Example for Riemann's mapping theorem for the domain  $\Omega$  defined by  $r(\phi) \leq (1 - 0.99 \cos^2 \phi)^{1/2}$ ; (computed by M. Gutknecht 18.12.1975)

## 2.2 Dirichlet's Principle

**Problem.** Let  $\Omega$  be a bounded domain and  $F$  an arbitrary function defined on the boundary  $\partial\Omega$ . Find a function  $w(x, y)$  with  $\Delta w = 0$ , such that  $w = F$  for  $(x, y) \in \partial\Omega$  (see Fig. 8 for an example).

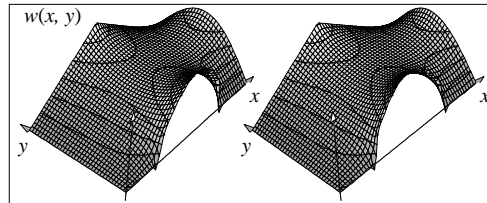


Figure 8: Stereogram of the solution of  $\Delta w = 0$ ,  $0 \leq x \leq \Phi$ ,  $\Phi = 1.618\dots$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $F(x, 0) = \sqrt{(-2 \cos \frac{2\pi x}{L})^+}$ ,  $F(x, 1) = \min(\frac{\pi^2 x}{4L}, \frac{\pi^2(L-x)}{4L})$ ,  $F(0, y) = 0$ ,  $F(\Phi, y) = \sin \pi y$ .

**Riemann's solution** [23]. This is based on the fact that the generalization of

the variational problem (7) to higher dimensions is

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) - f \cdot w \right) dx dy = \min! \Rightarrow \boxed{-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f.} \quad (21)$$

This relation had been discovered independently by Gauss [12], W. Thomson [19] and Dirichlet (in his lectures which Riemann attended). The proof is precisely the same as above. Slightly more complicated is the step from (12) to (13): for one term we have partial integration with respect to  $x$ , which is straightforward, since the integration  $dx$  is inside the integration  $dy$ . For the second term we have partial integration with respect to  $y$ ; before doing this, we exchange the order of integrations.

“Hierzu kann in vielen Fällen ... ein Princip dienen, welches Dirichlet zur Lösung dieser Aufgabe für eine der Laplace’schen Differentialgleichung genügende Function ... in seinen Vorlesungen ... seit einer Reihe von Jahren zu geben pflegt.” (Riemann 1857, *Werke* p. 97)

Riemann concludes: *for all functions defined on  $\Omega$  with the prescribed boundary values  $F$ , the integral*

$$J(w) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad \text{is always } > 0. \quad (22)$$

*Choose among these functions the one for which this integral has the smallest possible value !*

In other words, we pass through the Euler-Lagrange highway (11)  $\Rightarrow$  (14) **in the opposite direction** (11)  $\Leftarrow$  (14). In contrast to “Euler’s world”, here the solution of the differential equation (14) is hopeless, while the variational problem (11) appears “trivial”. From here originates the name “Dirichlet principle” and “Dirichlet boundary conditions”.

**Weierstrass’ Critics:** Soon after, this “Brave new world” was destroyed by Weierstrass [31] (1870), with the counter-example

$$\int_{-1}^1 (x \cdot y')^2 dx = \min! \left| \begin{array}{l} y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\arctan \frac{x}{\epsilon}}{\arctan \frac{1}{\epsilon}} \\ y(-1) = a, \quad y(1) = b \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} \text{graph of } y(x) \\ \text{from } x=-1 \text{ to } x=1 \\ \text{with } y(-1)=a, y(1)=b \end{array} \quad (23)$$

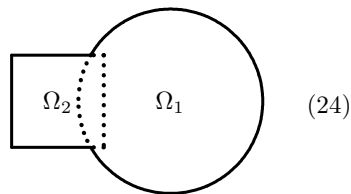
The factor  $x$  in the integral allows  $y'$  to do anything close to the origin, and the solution of the problem becomes discontinuous (“Die Dirichlet’sche Schlussweise führt also in dem betrachteten Falle offenbar zu einem falschen Resultat.”)

F. Klein (*Entw. Math. 19. Jahrh.*, p.264) reports that Riemann had answered to Weierstrass “my theorems remain nevertheless true” (meine Existenztheoreme sind trotzdem richtig), and that Helmholtz declared “for us physicists

Dirichlet's principle remains a proof" (Für uns Physiker bleibt das Dirichletsche Prinzip ein Beweis).

**Proof without Dirichlet Principle:** The majority of the mathematicians, however, abandoned Riemann's idea and started to search for alternative methods of proof. One of these was the invention of the *alternating method* by H.A. Schwarz (1870, Crelle 74, 1872). It is based on the fact that for rectangles, as well as circles, the existence of the solution is assured by Fourier series methods. A more complicated domain is represented as an overlapping union of such simple domains:

Solve alternatively in  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ ;  
 new boundary values on dotted curves;  
 prove that iteration converges;  
 add third, fourth domain etc.



**Rehabilitation of Dirichlet's Principle by Hilbert:** Precisely half a century after Riemann's thesis, D. Hilbert (Göttingen 1901, Annalen 1904, Crelle J. 1905) undertook to put Dirichlet's principle on a new basis. Certainly, Weierstrass' counter-example is embarrassing, but the integral in (23) is not the same as in (22). So Hilbert managed, in an extraordinary *tour de force*, to establish a way of proving the existence of  $u$  directly from the properties of the integral (22). A couple of theses written under Hilbert's direction, including Courant's [6] and [7], then improved this theory by making it simpler and more complete. These discussions were additional motivation for W. Ritz for developing *his* method.

“Das Dirichletsche Prinzip verdankte seinen Ruhm der anziehenden Einfachheit seiner mathematischen Grundidee, dem unleugbaren Reichtum der möglichen Anwendungen ... und der ihm innewohnenden Überzeugungskraft.” (D. Hilbert)

“Mittlerweile war das verachtete und scheinotote *Dirichletsche* Prinzip durch Hilbert wieder zum Leben erweckt worden;...” (Hurwitz-Courant [15], p. 392)

### 3 The Elastic Plate

The main motivation for Ritz was the announcement of the *Prix Vaillant* for 1907 of the Academy of Science in Paris (see Fig.9), published in vol.53 of Journal für Mathematik und Physik, p. 65. This announcement was sent by his friend Paul Ehrenfest to W. Ritz on a post card, in order for the “Scheusaltheorie” of Ritz' thesis to find a new application. The deformation of an elastic plate under an acting force was a very difficult problem of that time, initiated by Sophie Germaine in several articles (1811/13/15), to which Lagrange and

Poisson had added corrections and improvements. The definitive break-through was achieved in a long article by Kirchhoff [16] (1850) in form of the differential equation

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (25)$$

to which are added suitable boundary conditions. If the plate is assumed to be clamped on all sides, we would have

$$w = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (26)$$

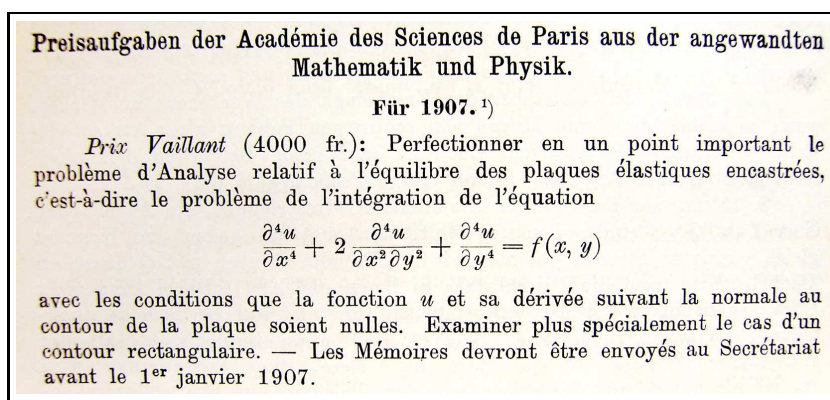
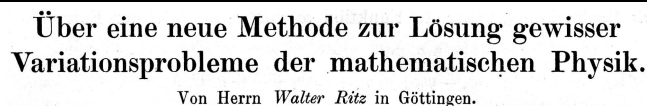


Figure 9: Announcement for *Prix Vaillant* in Journal für Mathematik und Physik

Ritz had worked with many such problems in his thesis, where he tried to explain the Balmer series in spectroscopy (1902); it therefore appeared to him that he had good chances to succeed in this competition.

## 4 Ritz' Treatment of the Plate and Dirichlet's Principle

We now come to the publication in the Crelle Journal [24]



with which Ritz entered immortality. As did Riemann, we proceed on the Euler-Lagrange highway backwards and arrive, starting from (25), at the variational

problem

$$J = \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) - f \cdot w \right) dx dy = \min ! \quad (27)$$

The standard procedure (“wie man ohne weiteres einsieht”) transforms term par term the formula (27) to (25), we just have to perform each time *two* integrations by part, so that the minus sign in (21) disappears again. Ritz writes this expression in the elegant form

$$J = \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (\Delta w)^2 - f \cdot w \right) dx dy = \min ! \quad (28)$$

$$J = \iint_{\mathcal{R}} \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{A}w)^2 - f(x, y) w \right] dS,$$

#### 4.1 Ritz’ method

The main idea is the following: we choose a sequence of functions

$$\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \psi_3(x, y), \psi_4(x, y), \dots \quad (29)$$

and try to approximate the solution of (27) as a linear combination

$$w(x, y) = a_1 \psi_1(x, y) + a_2 \psi_2(x, y) + \dots + a_m \psi_m(x, y) \quad (30)$$

$$w_m = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \dots + a_m \psi_m$$

with coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_m$  to be determined. The quality of the method depends, of course, on a good choice of these functions. For example, if we suppose  $\Omega$  to be a square, one choice discussed by Ritz is

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 \\ \psi_2(x, y) &= (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 (x^2 + y^2) \\ \psi_3(x, y) &= (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 (x^4 + y^4) \\ \psi_4(x, y) &= (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 x^2 y^2 \\ \psi_5(x, y) &= (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 (x^6 + y^6) \\ \psi_6(x, y) &= (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 (x^4 y^2 + x^2 y^4) \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Each of these  $\psi_i$  contains the factor  $(1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$  in order to assure the validity of the boundary conditions (26) for any choice of the  $a_i$ . We suppose  $f(x, y) = 1$  and conclude that by symmetry odd powers of  $x$  or  $y$  will not appear. For the same reason the terms containing  $x^2$  and  $y^2$  will have the same coefficient, so we simplify our calculations by collecting such equal terms into one function  $\psi$ . A further good property of our basis is that, for  $m \rightarrow \infty$ , it contains all (symmetric) polynomials; therefore they are able, by Weierstrass’ approximation theorem, to approach any (symmetric) solution function  $w$ . This will be important for establishing convergence proofs of the method.

If we insert the expression (30) into (28), we obtain a *finite dimensional* expression in  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . By chance,  $J$  in (28) contains only quadratic and linear terms of  $w$ . Hence, if we multiply out all terms, we obtain a *finite dimensional quadratic function*

$$J_m = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m k_{ij} a_i a_j - \sum_{i=1}^m b_i a_i \quad (32)$$

with

$$k_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Delta\psi_i \cdot \Delta\psi_j \, dx \, dy, \quad b_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i \cdot f \, dx \, dy. \quad (33)$$

Differentiating (32) with respect to  $a_\ell$ , for  $\ell = 1, 2, \dots, m$ , we find that  $J_m$  is minimal if

$$\sum_{j=1}^m k_{\ell j} a_j = b_\ell. \quad (34)$$

This is a linear system which, in theory, is easy to solve. In *practice*, however, things are different. Just *one* of the 21  $k$ -values needed if  $m = 6$ , the coefficient  $k_{66}$ , requires to compute

$$\begin{aligned} \Delta\psi_6 \cdot \Delta\psi_6 = & 8x^2(1-y^2)^2(x^4y^2 + x^2y^4) \\ & -8(1-x^2)(1-y^2)^2(4x^3y^2 + 2xy^4)x \\ & -4(1-x^2)(1-y^2)^2(x^4y^2 + x^2y^4) \\ & + (1-x^2)^2(1-y^2)^2(12x^2y^2 + 2y^4) \\ & + 8(1-x^2)^2y^2(x^4y^2 + x^2y^4) \\ & -8(1-x^2)^2(1-y^2)(2x^4y + 4x^2y^3)y \\ & -4(1-x^2)^2(1-y^2)(x^4y^2 + x^2y^4) \\ & + (1-x^2)^2(1-y^2)^2(2x^4 + 12x^2y^2) \end{aligned}$$

and then  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Delta\psi_6 \cdot \Delta\psi_6 \, dx \, dy = \frac{3052404736}{6898776885}$ . We understand, why Ritz did not use *this* basis for the numerical demonstration of his method. We, however, have modern computers and find the system

$$\begin{array}{cccccc} 53.49878 & 9.72705 & 2.13385 & 0.54039 & 0.63739 & 0.30484 \\ 9.72705 & 21.94822 & 10.91868 & 1.74588 & 5.99358 & 1.25965 \\ 2.13385 & 10.91868 & 9.63314 & 0.90947 & 7.10042 & 1.01770 \\ 0.54039 & 1.74588 & 0.90947 & 0.47237 & 0.51468 & 0.39553 \\ 0.63739 & 5.99358 & 7.10042 & 0.51468 & 6.32258 & 0.73117 \\ 0.30484 & 1.25965 & 1.01770 & 0.39553 & 0.73117 & 0.44246 \\ \hline 1.13778 & 0.32508 & 0.10836 & 0.02322 & 0.04925 & 0.01548 \end{array} \quad (35)$$

If we set  $m = 1$ , only  $k_{11}a_1 = b_1$  has to be considered and we obtain by a simple division

$$a_1 = 1.13778/53.49878 = 0.021267. \quad (36)$$

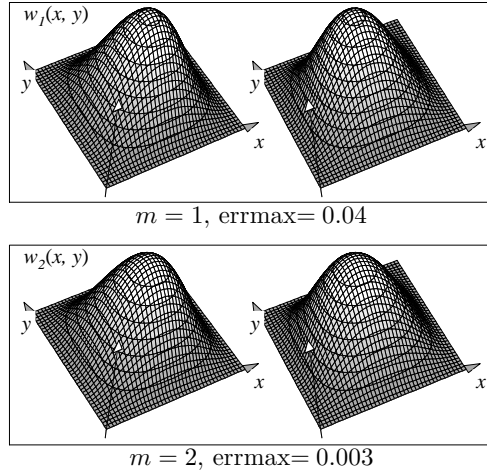


Figure 10: Solutions of the plate problem for  $m = 1$  and  $m = 2$

The solution  $w = a_1\psi_1$  is drawn in the first picture of Fig. 10 and has an error of 4%. If we include also polynomial terms of degree 6, i.e., if we set  $m = 2$ , we have a linear system of two equations to solve and obtain

$$a_1 = 0.02020, \quad a_2 = 0.00586, \quad (37)$$

which leads to a precision of 0.3% (lower picture of Fig. 10). Taking into account also 8-th degree terms ( $m = 4$ ) leads to a relative error of  $10^{-5}$  with precisely the same graphical representation as for  $m = 2$ . For  $m = 6$  the solutions are

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.02025, & a_2 &= 0.00521, & a_3 &= 0.00028, \\ a_4 &= 0.00612, & a_5 &= -0.00002, & a_6 &= 0.00012. \end{aligned} \quad (38)$$

## 4.2 A Basis Using one-dimensional Elastic Curves

As satisfying as the above numerical results are, they are not suitable for hand calculations. Instead of these polynomials, Ritz suggests to use the eigenvibrations of the clamped rod:

$$\xi^{(4)} = K^4 \cdot \xi \quad \xi(0) = \xi(1) = 0, \quad \xi'(0) = \xi'(1) = 0. \quad (39)$$

Ritz cites Lord Rayleigh [26], *Theory of Sound*, p. 174 for the formulas; however, they were already extensively studied by Euler, in an *Additamentum I, De curvis elasticis* of [9], §68–97.

Standard methods for differential equations with constant coefficients lead, together with the first three boundary conditions, to the formula

$$\xi_n(x) = \cos K_n x - \cosh K_n x - (\sin K_n x - \sinh K_n x) \frac{\cos K_n - \cosh K_n}{\sin K_n - \sinh K_n}. \quad (40)$$

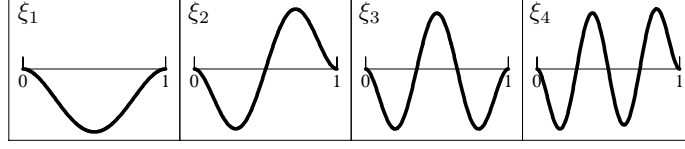


Figure 11: One-dimensional elastic curves

The condition  $\xi'(1) = 0$  then gives  $\cos K_n \cosh K_n = 1$ , which determines discrete values of  $K_n$  as follows (see Fig. 11),

$$K_1 = 4.7300, \quad K_2 = 7.8532, \quad K_3 = 10.9956, \quad K_4 = 14.1372, \dots \quad (41)$$

Because  $\cosh K$  tends to infinity very fast, these values tend quickly to the roots of the cosine  $K_n \approx (n + \frac{1}{2})\pi$ .

Taking again into account the symmetry of the solution, we use the basis

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \xi_1(x)\xi_1(y), & \psi_2(x, y) &= \xi_1(x)\xi_3(y) + \xi_3(x)\xi_1(y), \\ \psi_3(x, y) &= \xi_3(x)\xi_3(y), & \psi_4(x, y) &= \xi_1(x)\xi_5(y) + \xi_5(x)\xi_1(y), \dots \end{aligned}$$

The advantages of this basis are 1. that we have only one defining formula (40) for every  $n$ , 2. that the condition (39) leads to, using integration by parts, easy formulas for the integrals (33), and 3. that the linear system (34) becomes strongly diagonal dominant

$l. 431,5 =$	$\underline{651,8} a_{11} - 239,2 a_{13} + 94,7 a_{33} - 188 a_{15} + 148 a_{35} + 58 a_{55}$
$l. 188,5 =$	$-119,6 a_{11} + \underline{8867} a_{13} - 961 a_{33} - 226 a_{15} - 515 a_{35} + 186 a_{55}$
$l. 82,7 =$	$94,6 a_{11} - 1922 a_{13} + \underline{24390} a_{33} + 474 a_{15} - 4820 a_{35} + 592 a_{55}$
$l. 120,0 =$	$-93,8 a_{11} - 226 a_{13} + 237 a_{33} + \underline{48100} a_{15} - 2370 a_{35} - 2015 a_{55}$
$l. 52,5 =$	$74,3 a_{11} - 515 a_{13} - 2410 a_{33} - 2370 a_{15} + \underline{78600} a_{35} - 6420 a_{55}$
$l. 33,5 =$	$58 a_{11} + 372 a_{13} + 592 a_{33} - 4030 a_{15} - 12840 a_{35} + \underline{158500} a_{55}$

It can thus be solved easily (“der Rechenschieber angewandt werden kann...”) by a sort of “Gauss-Seidel” iteration. (“Eine direkte Lösung durch Determinanten würde 5stellige Logarithmentafeln erfordern”). In this way, Ritz obtained the solutions

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= 0.6620 \xi_1(x) \xi_1(y), \\ w_2(x, y) &= 0.6727 \xi_1(x) \xi_1(y) + 0.0307 (\xi_1(x) \xi_3(y) \\ &\quad + \xi_3(x) \xi_1(y)) + 0.0031 \xi_3(x) \xi_3(y), \\ w_3(x, y) &= 0.6740 \xi_1(x) \xi_1(y) + 0.0380 (\xi_1(x) \xi_3(y) + \xi_3(x) \xi_1(y)) \\ &\quad + 0.0032 \xi_3(x) \xi_3(y) + 0.0040 (\xi_1(x) \xi_5(y) + \xi_5(x) \xi_1(y)) \\ &\quad + 0.0004 (\xi_3(x) \xi_5(y) + \xi_5(x) \xi_3(y)) + 0.0000 \xi_5(x) \xi_5(y). \end{aligned}$$

whose graphical representation is not different from those in Fig. 10.

**Theorem of Convergence and Existence.** Based on

- a careful study of speed of convergence based on the asymptotic values of  $K_n$ , allowing exchange of differentiations and limits;
- Weierstrass' approximation theorem;
- modifying a lemma from Hilbert's proof (1901) ...

Ritz managed, in paragraphs 3, 4, and 5 of his paper, to prove rigorously that the  $w_m(x, y)$  converge towards a function  $w(x, y)$  which is the solution of the minimization problem.

### 4.3 Dirichlet's Principle

In the second part of [24], Ritz applies his proofs to Dirichlet's problem (see Section 2.2)

$$\Delta w = 0 \quad w|_{\partial\Omega} = F .$$

In order to have the boundary values equal to 0, we subtract  $F$  from  $w$  and obtain a problem of the type

$$-\Delta w = f \quad w|_{\partial\Omega} = 0 . \quad (42)$$

Inserting (30) into (21), we obtain this time

$$k_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \frac{\partial\psi_j}{\partial x} + \frac{\partial\psi_i}{\partial y} \frac{\partial\psi_j}{\partial y} \right) dx dy , \quad b_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i \cdot f dx dy . \quad (43)$$

instead of (33). Ritz then proceeds to establish again convergence and existence proofs with his method, but he does not show numerical examples — for the square they would have been too simple.

Let us show them here, by modifying the basis functions according to the new boundary condition as

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= (1 - x^2)(1 - y^2) \\ \psi_2(x, y) &= (1 - x^2)(1 - y^2)(x^2 + y^2) \\ \psi_3(x, y) &= (1 - x^2)(1 - y^2)(x^4 + y^4) \\ \psi_4(x, y) &= (1 - x^2)(1 - y^2)x^2y^2 \\ \psi_5(x, y) &= (1 - x^2)(1 - y^2)(x^6 + y^6) \\ \psi_6(x, y) &= (1 - x^2)(1 - y^2)(x^4y^2 + x^2y^4) \dots \end{aligned}$$

and obtain, proceeding as above, the solutions

$$\begin{aligned} \text{for } m = 1 : \quad a_1 &= 0.3125 , \\ \text{for } m = 2 : \quad a_1 &= 0.2922 \quad a_2 = 0.05923 . \end{aligned} \quad (44)$$

The solutions are drawn in Fig. 12. Again, the higher order terms don't change the graphic representation of the function. One observes that for each increase of the degree by 2, the error decreases by a factor 4.

**Epilogue.** ... and what happened with the prize from the Academy ?? ... Ritz' contribution was refused !! For more details see Ritz' biography in this volume.

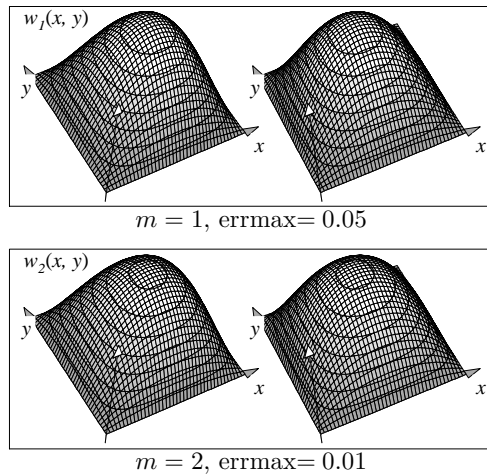


Figure 12: Solutions for Dirichlet's principle

## 5 Ritz Computes Chladni Figures

In 1787, Ernst Florence Friedrich Chladni, a musician and physicist from Leipzig, made an extraordinary discovery [3]: he noticed that when he tried to excite a metal plate with the bow of his violin, he could make sounds of different pitch, depending on where he touched the plate with the bow, see the experimental setup shown in Figure 13 on the bottom left. The plate itself was fixed only in the center, and when there was some dust or sand on the plate, for each pitch a beautiful pattern appeared. Chladni carefully collected all the figures he was able to create, and made drawings of each and every one, see Figure 13 on the right. These figures, now called Chladni figures after their inventor, attracted great attention among scientists and laymen alike, because of their intriguing beauty. We show in Fig.14 more recent high tech experiments from Munich and San Diego, which recreate Chladni's experiments to very high accuracy. We invite the reader to compare those results with the historical drawings of Chladni to find similarities and differences.

### 5.1 The Mathematical Model for Chladni Figures

For the vibrating plate, the above equations (25) and (26) of Kirchhoff [16] (1850) are to be modified as follows. Chladni figures on a square plate correspond to eigenpairs (eigenvalues and corresponding eigenfunctions) of the biharmonic operator

$$\Delta^2 w = \lambda w \quad \text{in } \Omega := (-1, 1)^2, \quad (45)$$

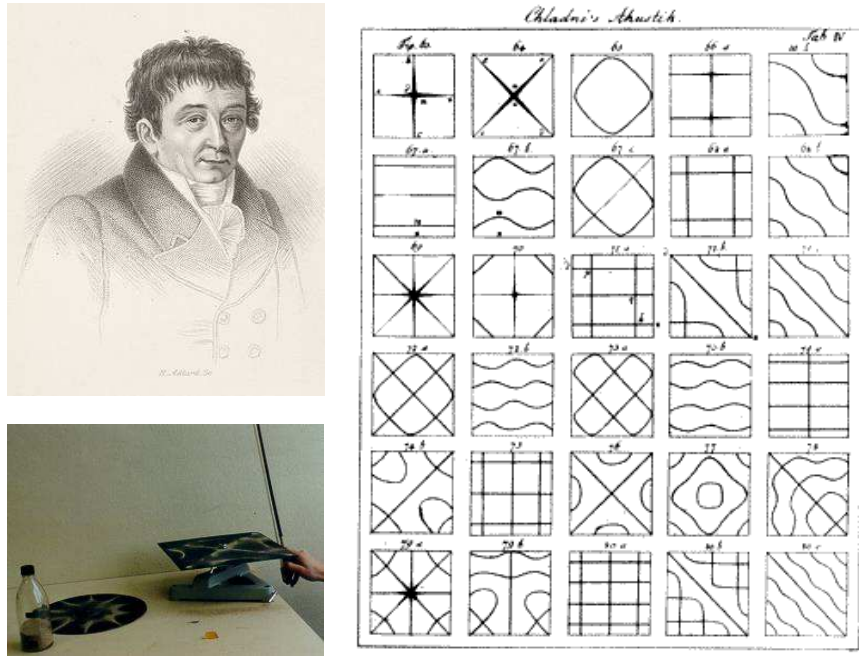


Figure 13: Ernst Florens Friedrich Chladni and his famous experiment. On the right the drawings of Chladni of the figures he managed to create with his violin bow exciting an iron plate with some sand on it

with the free boundary conditions

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, & x = \{-1, 1\}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & y = \{-1, 1\}, \end{cases} \quad (46)$$

where  $\mu$  here is the elasticity constant. Even before the correct mathematical model had been established, Wheatstone [32] had tried in 1833 to approximate Chladni figures using sine and cosine functions<sup>4</sup>. Kirchhoff, who came up with the correct mathematical model in 1850, also managed to solve the Chladni problem for the special case of a circular plate, which is a very special case that due to symmetry only has radial and concentric circular Chladni figures. For other configurations, the partial differential eigenvalue problem (45) with the free boundary conditions (46) simply proved to be too difficult to solve<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Ritz: "..., dass es sich hier nur um einen in besonderen Fällen anwendbaren Kunstgriff handelt"

<sup>5</sup>Ritz: "Die von Kirchhoff erhaltene partielle Differentialgleichung ist vierter Ordnung, und es müssen am Rande zwei Differentialausdrücke dritter und zweiter Ordnung verschwinden, die von einer Elastizitätskonstante[n] abhängen. Die grosse hieraus sich ergebende Komplika-

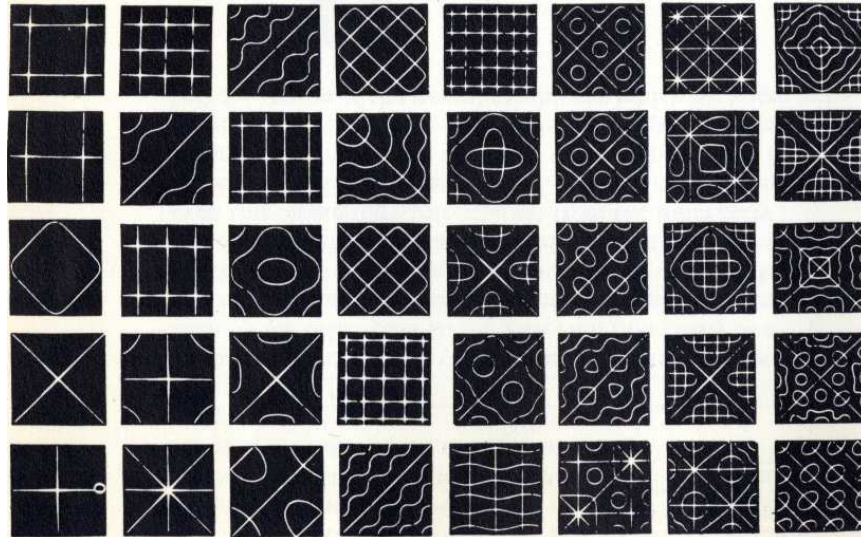


Figure 14: Creation of Chladni figures in a modern laboratory environment in Munich and San Diego

There were even erroneous attempts: based on experiments performed by the master violin maker König [18] in 1864, which suggested that Chladni figures can only contain straight lines, Tanaka tried in 1887 to obtain solutions by integration starting from straight lines<sup>6</sup>. In the case of clamped boundaries, the problem greatly simplifies, and Voigt [30] found the general solution in 1893 for a rectangular plate with two or four clamped boundaries by elementary integration. Toward the end of the 19th century, the great expert in sound, John William Strutt, later Baron Rayleigh, summarized the situation in [26]: “The Problem of a rectangular plate, whose edges are free, is one of great

tion des Problems erklärt es hinreichend, dass die Lösung bis jetzt nur im Falle des Kreises (Kirchhoff) gefunden wurde, wobei sich ein sehr befriedigender Anschluss an die Erfahrung ergab. Die Klangfiguren bestehen hier nur aus konzentrischen Kreisen und aus Radien.”

<sup>6</sup>Ritz: “... Tanaka glaubt, allgemeinere und strengere Formeln zu erhalten. Dies ist aber schon deswegen nicht der Fall, weil übersehen ist, dass eine Randbedingung die Lösung gar nicht bestimmt.”

difficulty, and has for the most part resisted attack”.

## 5.2 Ritz’ Computation of Chladni Figures

In his second groundbreaking paper [25], Walther Ritz presents and analyzes his own method in order to compute Chladni figures: instead of trying to solve the partial differential eigenvalue problem (45,46) directly, he proposes to use the principle of energy minimization, from which the equations were derived<sup>7</sup>, and thus he considers the functional

$$J(w) := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \quad (47)$$

According to the minimization principle, the solution  $w$  of (45,46) is a minimum of the constrained problem

$$J(w) \rightarrow \min, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w^2 dx dy = \text{const}, \quad (48)$$

and from this minimization problem, one can obtain again the partial differential eigenvalue problem simply using again the central highway of variational calculus.

Even though Ritz explains his new method on the concrete example of Chladni figures on a square plate, he points out that his new method is completely general, and could be applied to plates of arbitrary shapes, provided the basis functions are well chosen<sup>8</sup>. The fundamental idea of Ritz’ new method is to search for an approximate solution of the problem as a combination of well chosen so called coordinate functions (“Grundfunktionen”), of the form

$$w_s = \sum_{m=0}^s A_m w_m(x, y). \quad (49)$$

If a simple solution is sought, for example the lowest pitch, Ritz points out that one could simply choose polynomials for the basis functions  $w_m(x, y)$ <sup>9</sup>. For more

<sup>7</sup>Ritz: “Das wesentliche der neuen Methode besteht darin, dass nicht von den Differentialgleichungen und Randbedingungen des Problems, sondern *direkt vom Prinzip der kleinsten Wirkung* ausgegangen wird, aus welchem ja durch Variation jene Gleichungen und Bedingungen gewonnen werden können.”

<sup>8</sup>Ritz: “Im folgenden entwickle ich am Beispiel der quadratischen Platten mit freien Rändern eine neue Integrationsmethode, die ohne wesentliche Änderungen auch auf rechteckige Platten angewandt werden kann, sei es mit freien, sei es auch mit teilweise oder ganz eingespannten oder gestützten Rändern. Theoretisch ist die Lösung in ähnlicher Weise sogar für eine beliebige Gestalt der Platte möglich; eine genaue Berechnung einer grösseren Anzahl von Klangfiguren, wie sie im folgenden für den klassischen Fall der quadratischen Scheibe durchgeführt ist, wird aber nur bei geeigneter Wahl der Grundfunktionen, nach welchen entwickelt wird, praktisch ausführbar.”

<sup>9</sup>Ritz: “Für den Grundton, wofern grosse Genauigkeit nicht gefordert wird, führt das Verfahren für die meisten Platten durch den Ansatz von Polynomen zum Ziel.”

accuracy however for higher eigenmodes, a better choice is, as in the previous Section<sup>10</sup>, to use for the coordinate functions

$$\begin{aligned} w_{mn} &= u_m(x)u_n(y) + u_m(y)u_n(x), \\ w'_{mn} &= u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x), \end{aligned}$$

where  $u_m(x)$  are the known eigenfunctions of a free one dimensional bar, where the boundary conditions of (39) must be adjusted to the new situation,

$$\frac{d^4 u_m}{dx^4} = k_m^4 u_m, \quad \text{with } \frac{d^2 u_m}{dx^2} = 0, \frac{d^3 u_m}{dx^3} = 0 \text{ at } x = \{-1, 1\}.$$

These conditions lead to the functions

$$u_m = \begin{cases} \frac{\cosh k_m \cos k_m x + \cos k_m \cosh k_m x}{\sqrt{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m}}, & \tan k_m + \tanh k_m = 0, \quad m \text{ even}, \\ \frac{\sinh k_m \sin k_m x + \sin k_m \sinh k_m x}{\sqrt{\sinh^2 k_m - \sin^2 k_m}}, & \tan k_m - \tanh k_m = 0, \quad m \text{ odd}. \end{cases} \quad (50)$$

Ritz approximation of the solution then takes the form

$$w_s := \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^s A_{mn} u_m(x) u_n(y). \quad (51)$$

In order to determine the coefficients  $A_{mn}$ , we again insert this solution into the functional (47), and we require that the so obtained functional

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (52)$$

is minimal<sup>11</sup> under the constraint

$$U(w_s) := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_s^2 dx dy = \text{const}. \quad (53)$$

In this approximate problem, we only need to determine a finite number of coefficients  $A_{mn}$ .

In order to evaluate the functional  $J(w_s)$  in dependence of the coefficients  $A_{mn}$ , we have to evaluate several integral terms. The first one is

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial^2 \sum_{m,n} A_{mn} u_m(x) u_n(y)}{\partial x^2} \right)^2 dx dy \\ &= \sum_{m,n} \sum_{p,q} A_{mn} A_{pq} \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u_m(x)}{\partial x^2} u_n(y) \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x^2} u_q(y) dx dy}_{c_{mnpq}^1}. \end{aligned} \quad (54)$$

<sup>10</sup>Ritz: "Sämtliche Eigentöne der Platte lassen sich bis auf einige Prozent darstellen durch die Formeln..."

<sup>11</sup>Ritz: "Es liegt nahe, als Massstab des Gesamtfehlers die Abweichung der potentiellen Energie von ihrem exakten Wert beim wirklichen Vorgang zu wählen"

Now  $c_{mnpq}^1$  can be computed, since  $u_n$  is known; it suffices to evaluate the integrals numerically to obtain the numbers  $c_{mnpq}^1$ . Similarly, one can also evaluate all the other terms in (52), and obtains

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right)^2 dx dy &= \sum_{m,n} \sum_{p,q} A_{mn} A_{pq} c_{mnpq}^2, \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\mu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} dx dy &= \sum_{m,n} \sum_{p,q} A_{mn} A_{pq} c_{mnpq}^3, \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy &= \sum_{m,n} \sum_{p,q} A_{mn} A_{pq} c_{mnpq}^4, \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_s^2 dx dy &= \sum_{m,n} A_{mn}^2 \quad \text{by orthogonality,} \end{aligned}$$

where all the coefficients  $c_{mnpq}^2$ ,  $c_{mnpq}^3$  and  $c_{mnpq}^4$  are defined by concrete integrals, like in (54). Using a Lagrange multiplier  $\lambda$ , we now need to minimize

$$J(w_s) - \lambda U(w_s) \longrightarrow \min,$$

which is equivalent to minimizing the finite dimensional problem

$$J_s(\mathbf{a}) := \mathbf{a}^T K \mathbf{a} - \lambda \mathbf{a}^T \mathbf{a} \longrightarrow \min \quad (55)$$

with respect to  $\mathbf{a}$ , where we defined the vector

$$\mathbf{a} := [A_{00}, A_{01}, A_{10}, \dots],$$

and the matrix

$$K := \begin{bmatrix} \alpha_{00}^{00} & \alpha_{01}^{00} & \alpha_{10}^{00} & \dots \\ \alpha_{00}^{01} & \alpha_{01}^{01} & \alpha_{10}^{01} & \dots \\ \alpha_{00}^{10} & \alpha_{01}^{10} & \alpha_{10}^{10} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

with  $\alpha_{mn}^{pq} := c_{mnpq}^1 + c_{mnpq}^2 + c_{mnpq}^3 + c_{mnpq}^4$  using Ritz' original notation.

In order to minimize (55), we compute the gradient with respect to  $\mathbf{a}$  and set it to zero, to obtain

$$K \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}, \quad (56)$$

a discrete eigenvalue problem. For each eigenvalue  $\lambda^\ell$ , we get an eigenvector  $\mathbf{a}^\ell = [A_{00}^\ell, A_{01}^\ell, \dots]$ , and the corresponding eigenfunction

$$w_s^\ell = \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^s A_{mn}^\ell u_m(x) u_n(y).$$

Note the similarity with the underlying continuous eigenvalue problem

$$\Delta^2 w = \lambda w$$



Nowadays, the symbolic calculator Maple can easily perform all these operations! We first define the solution of the transcendental functions defining  $k_m$  in (50) using the command

```
k:=m->if type(m,even) then
    fsolve(tan(x)+tanh(x)=0,x=m*Pi/2-Pi/4)
else
    fsolve(tan(x)-tanh(x)=0,x=(m-1/2)*Pi/2)
end if;
```

Having  $k_m$  available, we can now define the one dimensional eigenfunctions  $u_m$  used by Ritz to construct his coordinate functions, using the Maple command

```
u:=(m,x)->if m=0 then
    1/sqrt(2)
elif m=1 then
    sqrt(3/2)*x
elif type(m,even) then
    (cosh(k(m))*cos(k(m)*x)+cos(k(m))*cosh(k(m)*x))/
    sqrt((cosh(k(m)))^2+(cos(k(m)))^2)
else
    (sinh(k(m))*sin(k(m)*x)+sin(k(m))*sinh(k(m)*x))/
    sqrt((sinh(k(m)))^2-(sin(k(m)))^2)
end if;
```

We now simply have to evaluate numerically the integrals in order to obtain the matrix entries,

```
mu:=0.225;
for m from 1 to 5 by 2 do
  for n from 1 to 5 by 2 do
    for p from 1 to 5 by 2 do
      for q from 1 to 5 by 2 do
        K(m,n,p,q):=evalf(Int(Int(diff(u(m,x),x,x)*u(n,y)*diff(u(p,x),x,x)
          *u(q,y),x=-1..1),y=-1..1)
          +Int(Int(diff(u(n,y),y,y)*u(m,x)*diff(u(q,y),y,y)*u(p,x),
            x=-1..1),y=-1..1)
          +2*mu*Int(Int(diff(u(m,x),x,x)*u(n,y)*diff(u(q,y),y,y)*u(p,x),
            x=-1..1),y=-1..1)
          +2*(1-mu)*Int(Int(diff(u(m,x),x)*diff(u(n,y),y)*diff(u(p,x),x)
            *diff(u(q,y),y),x=-1..1),y=-1..1));
      od;
    od;
  od;
od;
```

and now we put the entries into a matrix,

```
Ke:=matrix([[K(1,1,1,1),K(1,1,1,3)+K(1,1,3,1),K(1,1,3,3),K(1,1,1,5)
+K(1,1,5,1),K(1,1,3,5)+K(1,1,5,3),K(1,1,5,5)],
[(K(1,3,1,1)+K(3,1,1,1))/2,(K(1,3,1,3)+K(1,3,3,1)+K(3,1,3,1)+K(3,1,1,3))/2,
(K(1,3,3,3)+K(3,1,3,3))/2,(K(1,3,1,5)+K(1,3,5,1)+K(3,1,1,5)+K(3,1,5,1))/2,
```

$$\begin{aligned}
o &= (13,95 - \lambda) A_0 - 32,08 A_1 + 18,60 A_2 + 32,08 A_3 - 37,20 A_4 + 18,60 A_5 \\
o &= -16,04 A_0 + (411,8 - \lambda) A_1 - 120,0 A_2 - 133,6 A_3 + 166,8 A_4 + 140 A_5 \\
o &= +18,60 A_0 - 240,0 A_1 + (1686 - \lambda) A_2 - 218,0 A_3 - 1134 A_4 + 330 A_5, \\
o &= +16,04 A_0 - 133,6 A_1 + 109,0 A_2 + (2945 - \lambda) A_3 - 424 A_4 + 179 A_5, \\
o &= -18,6 A_0 + 166,8 A_1 - 567 A_2 - 424 A_3 + (6303 - \lambda) A_4 - 1437 A_5, \\
o &= +18,6 A_0 + 280 A_1 - 330 A_2 + 358 A_3 - 2874 A_4 + (13674 - \lambda) A_5.
\end{aligned}$$

Figure 15: High Accuracy of the Results of Ritz

$$\begin{aligned}
& (K(1,3,3,5)+K(1,3,5,3)+K(3,1,3,5)+K(3,1,5,3))/2, (K(1,3,5,5)+K(3,1,5,5))/2], \\
& [K(3,3,1,1),K(3,3,1,3)+K(3,3,3,1),K(3,3,3,3),K(3,3,1,5)+K(3,3,5,1), \\
& K(3,3,3,5)+K(3,3,5,3),K(3,3,5,5)], \\
& [(K(1,5,1,1)+K(5,1,1,1))/2, (K(1,5,1,3)+K(1,5,3,1)+K(5,1,3,1)+K(5,1,1,3))/2, \\
& (K(1,5,3,3)+K(5,1,3,3))/2, (K(1,5,1,5)+K(1,5,5,1)+K(5,1,1,5)+K(5,1,5,1))/2, \\
& (K(1,5,3,5)+K(1,5,5,3)+K(5,1,3,5)+K(5,1,5,3))/2, (K(1,5,5,5)+K(5,1,5,5))/2], \\
& [(K(5,3,1,1)+K(3,5,1,1))/2, (K(5,3,1,3)+K(5,3,3,1)+K(3,5,3,1)+K(3,5,1,3))/2, \\
& (K(5,3,3,3)+K(3,5,3,3))/2, (K(5,3,1,5)+K(5,3,5,1)+K(3,5,1,5)+K(3,5,5,1))/2, \\
& (K(5,3,3,5)+K(5,3,5,3)+K(3,5,3,5)+K(3,5,5,3))/2, (K(5,3,5,5)+K(3,5,5,5))/2], \\
& [K(5,5,1,1),K(5,5,1,3)+K(5,5,3,1),K(5,5,3,3),K(5,5,1,5)+K(5,5,5,1), \\
& K(5,5,3,5)+K(5,5,5,3),K(5,5,5,5)]];
\end{aligned}$$

This leads to the matrix

$$\begin{bmatrix}
13.95000000 & -32.21614500 & 18.60000000 & 32.21614504 & -37.20000000 & 18.60000002 \\
-16.10807250 & 406.1196695 & -119.9256010 & -133.5499734 & 172.0806028 & -83.55402336 \\
18.60000000 & -239.8512019 & 1684.464298 & 217.9828187 & -1136.623991 & 329.5350388 \\
16.10807252 & -133.5499735 & 108.9914093 & 2945.466708 & -427.1327599 & 179.2413502 \\
-18.60000000 & 172.0806029 & -568.3119956 & -427.1327599 & 6325.441344 & -1441.531357 \\
18.60000002 & -167.1080467 & 329.5350388 & 358.4827005 & -2883.062714 & 13672.20612
\end{bmatrix}$$

Comparing this result, computed accurately to about ten significant figures in Maple with the results obtained by Ritz, who had to both approximate the roots of the transcendental functions, the functions themselves, and also intermediate results during the computation, we are stunned by the accuracy of Ritz' results: we show in Figure 15 the original results of Ritz, in red the digits which would need to be modified if Ritz had performed his computations to 10 digits accuracy, but with his approximations used for the functions, and in green the digits which would further need to be modified if also no approximations to the functions had been made. We can see two likely misprints, the sign of the coefficient  $A_3$  in the third equation, and the sign of the coefficient of  $A_2$  in the last equation, and maybe one real error, the coefficient in front of  $A_5$  in the second equation, and  $A_1$  in the last equation, where one should be the double of the other, and both are consistently incorrect by a large margin.

Once Ritz had obtained the discrete eigenvalue problem, he still needed to solve it in order to obtain eigenvalues and eigenvectors, which then allowed him

to reconstruct the vibrational modes of the plate using the coordinate functions. At the time of Ritz, there were no numerical methods available to compute eigenvalues and eigenvectors of a matrix. And again Ritz proved to be much ahead of his time: instead of trying to compute the eigenvalues using the characteristic polynomial, a disastrous approach as we know today for numerical purposes, he invents an iterative method, an approach which has now become standard for eigenvalue problems and also linear systems, and where very powerful methods are available today. Ritz first fixes one component of the eigenvector, namely  $A_0 = 1$ , and takes as an approximation to the eigenvalue the first diagonal entry. Then the remaining last 5 equations can be used to determine an approximation of the other components  $A_j$  of the eigenvector (“...setzen wir  $A_0 = 1$ , und in erster Annäherung  $\lambda_0 = 13.95$ . Dann ergeben die fünf letzten Gleichungen die übrigen  $A_i$ .”). But again, solving this linear system of five equations is too much work by hand, so Ritz proposes to just invert the diagonal of the matrix, what we would today call a Jacobi step (“Wir berechnen für die  $A_i$  eine erste Approximation, indem wir alle Glieder rechts vernachlässigen neben den Diagonalgliedern . . .”). Having this approximation for the eigenvector, one can now compute a correction to the eigenvalue using the first equation, and according to Ritz, one or two successive iterations suffice in order to obtain about four digits of accuracy (“Ein oder zwei sukzessive Korrekturen genügen meist, um die vierte Stelle bis auf wenige Einheiten festzustellen.”). It is worthwhile to write this algorithm in today's notation: solving the eigenvalue problem

$$K\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$$

for  $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_n)$  and  $\lambda$  is equivalent to solving the nonlinear system of equations

$$\mathbf{f}(\lambda, a_1, \dots, a_n) := K\mathbf{a} - \lambda\mathbf{a} = 0,$$

where we fixed, like Ritz, one component of the eigenvector,  $a_0 := 1$ . Ritz' algorithm now starts with  $\lambda^0 = 13.95$  and  $a_1^0, \dots, a_n^0 = 0$ , and computes for iteration index  $k = 0, 1, \dots$

$$f_j(\lambda^k, a_1^k, \dots, a_{j-1}^k, a_j^{k+1}, a_{j+1}^k, \dots, a_n^k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (57)$$

and then solves for a new approximation of the eigenvalue  $\lambda^{k+1}$

$$f_0(\lambda^{k+1}, a_1^{k+1}, \dots, \dots, a_n^{k+1}) = 0.$$

Note that in each step of the algorithm, only a scalar linear equation needs to be solved. Implementing this method in Matlab gives the following short program:

```
K=[13.95  -32.08    18.60   32.08  -37.20   18.60
   -16.04  411.8    -120.0  -133.6   166.8    140
    18.60 -240.0   1686    -218.0 -1134    330
    16.04 -133.6   109.0   2945    -424    179
   -18.6   166.8    -567    -424   6303   -1437
    18.6   280     -330     358  -2874   13674];
```

```

Kr=K(2:end,2:end);           % last 5 equations
Kd=diag(Kr);                 % Jacobi splitting for Ritz'
Ko=Kr-diag(diag(Kr));        % eigenvalue iteration

la=K(1,1)                    % first eigenvalue and
a=zeros(1,size(K,2)); a(1)=1; % eigenvector approximation

for j=1:6                    % Ritz iteration
    b=-K(2:end,1);           % rhs of the system
    bj=b-Ko*a(2:end)';       % rhs for Jacobi step
    a(2:6)=bj./(Kd-la)       % Jacobi step
    la=K(1,1)+K(1,2:end)*a(2:6) % new eigenvalue approximation
end

```

whose output is

```

la =
    13.9500
a =
    1.0000    0.0403   -0.0111   -0.0055    0.0030   -0.0014
la =
    12.1388
a =
    1.0000    0.0342   -0.0038   -0.0027    0.0002   -0.0017
la =
    12.6565
a =
    1.0000    0.0387   -0.0061   -0.0036    0.0011   -0.0020
la =
    12.3996
a =
    1.0000    0.0374   -0.0049   -0.0032    0.0007   -0.0020
la =
    12.4972
a =
    1.0000    0.0380   -0.0053   -0.0034    0.0009   -0.0020
la =
    12.4525
a =
    1.0000    0.0378   -0.0051   -0.0033    0.0008   -0.0020
la =
    12.4711

```

we see that the dominant eigenvector component is the first one, corresponding to the diagonal element, and the eigenvalue indeed seems to converge. In order to obtain the exact eigenvalue of Ritz' matrix, we can use the Matlab commands

```

>> ev=sort(eig(K));
>> ev(1)
ans =
    12.4653

```

which first computes all eigenvalues, sorts them and then shows the first one. We see that about four iterations are needed in this case in order to determine the first three digits. It is also interesting to check if the approximations chosen by Ritz have a significant influence on the eigenvalues. We therefore computed the eigenvalues of Ritz' matrix, the matrix obtained when computing exactly using Ritz' approximations of the quantities in the matrix, and the exact matrix. We obtain for the eigenvalues

12.47	12.49	12.49
379.85	379.14	379.34
1579.79	1556.84	1559.28
2887.06	2899.82	2899.93
5969.67	5957.80	5961.32
14204.92	14233.73	14235.30

which shows that the influence, including the small error in Ritz' computation in the elements, has little influence on the final result.

Having obtained these numerical results, all by hand calculations, Ritz now goes on to compare his results to the physical experiments performed by Chladni. We show in Fig. 16 the results for the first type of symmetry Ritz computed. We see that in case II, there is excellent agreement between the theoretical and experimental results (in case one trivially also). In case III, there were no measurements available. Case VI was not obtained by Chladni, and we see that already quite complicated patterns arise in Fig. 16 for later cases. Ritz used his method to estimate also the pitch of the sound, and compared the result with the pitch measured by Chladni. Due to the enormous demand in computations however, Ritz only used his full method of approximation with several terms in the expansion for the first 9 notes, marked with a star in the original Table 17. For the remaining notes, he only uses the first term in the expansion. It is remarkable how well Ritz' results agree with the physical experiments of Chladni!

### 5.3 First Reactions to Ritz' Work in Western Europe

In Göttingen itself, where Ritz had spent the last years of his life and which was then *the* principal center of mathematical research, the importance of Ritz' invention was not immediately accepted. None of the many theses and habilitation theses written under Hilbert in these years on the Dirichlet Principle, gives any reference to Ritz' work. The only exception is the paper of König [17], who just says that Ritz had simplified somewhere some lines of Hilbert's proof. Ten years later, we read in a footnote in the famous book of Hurwitz and Courant [15] (see Fig. 18) the following:

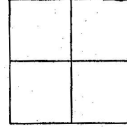
The actual, for this proof of existence *unimportant* [italics by us], construction of minimal sequences causes no problems in principle. For example if  $G$  is a finite domain, bounded by curves  $C$  without multiple points, we imagine that  $G$  is covered by a triangular grid

A. Lösungen, die in  $x$  und  $y$  ungerade und symmetrisch sind.

I. Grundton.  $\lambda = 12,43 - 18,0 \delta \mu.$

$$\begin{aligned} w = & u_1 v_1 + 0,0394(u_1 v_3 + v_1 u_3) \\ & - 0,0040 u_3 v_3 - 0,0034(u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ & + 0,0011(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,0019 u_5 v_5. \end{aligned}$$

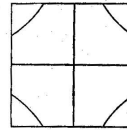
Fig. 1.



II.  $\lambda = 378 - 57 \delta \mu.$

$$\begin{aligned} w = & -0,075 u_1 v_1 + (u_1 v_3 + u_3 v_1) \\ & + 0,173 u_3 v_3 + 0,045(u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ & - 0,015(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,029 u_5 v_5. \end{aligned}$$

Fig. 2.



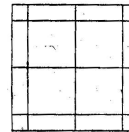
Es ist

$y$ beob. :	0,530	0,578	0,630	0,690	0,752	0,819	0,893
$x$ beob. :	0,937 <sub>5</sub>	0,8750	0,812 <sub>3</sub>	0,7500	0,687 <sub>5</sub>	0,6250	0,562 <sub>5</sub>
$x$ ber. - $x$ beob. :	-0,003	-0,002	0,000	-0,001	-0,000 <sub>5</sub>	0,000	0,000

III.  $\lambda = 1554.$

$$\begin{aligned} w = & 0,009 u_1 v_1 - 0,075(u_1 v_3 + v_1 u_3) \\ & + u_3 v_3 - 0,057(u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ & + 0,121(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,007 u_5 v_5. \end{aligned}$$

Fig. 3.



20

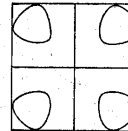
Messungen fehlen.

R.

IV.  $\lambda = 2945.$

$$w = u_1 v_5 + u_5 v_1.$$

Fig. 4.



Diese Figur fehlt bei Chladni.

Fig. 5.

V.  $\lambda = 6303.$

$$w = u_3 v_5 + u_5 v_3.$$

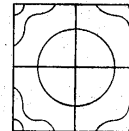


Fig. 6.

VI.  $\lambda = 13674.$

$$w = u_5 v_5.$$

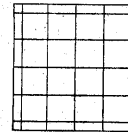


Figure 16: Comparison done by Ritz, of his computational results with physical experiments, for the first few cases

Tabelle der Tonhöhen ( $\mu = 0, 225$ ).

HAUPTGLIEDER	$\lambda$	BER.	BEOB.	HAUPTGLIEDER	$\lambda$	BER.	BEOB.
$u_1 v_1$	12,43	G*	G	$u_3 v_4 \pm u_4 v_3$	3240	$g_3 +$	$fis_3$
$u_0 v_2 - v_0 u_2$	26,40	$d^*$	$d$	$u_5 v_2 \pm u_2 v_5$	3927	$a_3 +$	$gis_3 +$
$u_0 v_2 + v_0 u_2$	35,73	$e^*$	$e$	$u_4 v_4$	5480	$ais_3 +$	$ais_3$
$u_1 v_2 \pm u_2 v_1$	80,8	$h^*$	$h$	$u_0 v_6 - u_6 v_0$	5500	$c_4 -$	$-(^2)$
$u_0 v_3 \pm u_3 v_0$	237,1	$gis_1^* +$	$gis_1 +$	$u_3 v_5 - u_5 v_3$	5570	$c_4 -$	$ais_3 -$
$u_1 v_1$	266,0	$ais_1^* -$	$ais_1^* -$	$u_0 v_6 + u_6 v_0$	5640	$c_4 -$	$-(^2)$
$u_1 v_3 - u_3 v_1$	316,1	$h_1^*$	$h_1$	$u_1 v_6 \pm v_1 u_6$	6036	$c_4 +$	$c_4 -$
$u_1 v_3 + u_3 v_1$	378	$cis_2^*$	$cis_2$	$u_3 v_5 + u_5 v_3$	6303	$cis_4$	$c_4 -$
$u_2 v_3 \pm u_3 v_2$	746	$fis_2^* +$	$fis_2$	$u_2 v_6 - u_6 v_2$	7310	$d_4 +$	$cis_4 +$
$u_0 v_4 - v_0 u_4$	886	$gis_2$	$gis_2$	$u_2 v_6 + u_6 v_2$	7840	$dis_4 -$	$d_4 -$
$u_0 v_4 + v_0 u_4$	941	$gis_2 +$	$gis_2 +$	$u_5 v_4 \pm u_4 v_5$	9030	$e_4$	$dis_4$
$u_1 v_4 \pm u_4 v_1$	1131	$ais_2$	$ais_2 -$	$u_6 v_3 \pm u_3 v_6$	10380	$f_4$	$e_4$
$u_3 v_3$	1554	$c_3 +$	$c_3$	$u_5 v_5$	13670	$g_4 +$	$fis_4 +$
$u_2 v_4 - u_4 v_2$	1702	$d_3 -$	$cis_3$	$u_6 v_4 - u_4 v_6$	13840	$g_4 +$	$g_4 +$
$u_2 v_4 + u_4 v_2$	2020	$dis_3$	$d_3$	$u_6 v_4 + u_4 v_6$	15120	$gis_4 +$	$g_4 +$
$u_0 v_5 \pm v_0 u_5$	2500	$f_3 -$	$f_3 -$	$u_6 v_5 \pm u_5 v_6$	20400	$h_4$	$ais_4 -$
$u_1 v_5 - v_1 u_5$	2713	$fis_3$	$fis_3 -$	$u_6 v_6$	28740	$d_5$	$-(^2)$
$u_1 v_5 + v_1 u_5$	2945	$fis_3 +$	$fis_3(^1)$				

Figure 17: Table of frequencies obtained by Ritz for the pitch of the sound of the plate, compared to the results measured by Chladni

$T_j$ , whose triangles become smaller when  $j$  increases. We consider now only functions  $\varphi$  or  $\phi = \varphi - S$ , where the difference  $\varphi - \frac{x}{x^2+y^2}$  in each Triangle of  $T_j$  is a linear function. The function  $\phi_j$  is then the function associated with  $T_j$ , such that  $D[\phi]$  has as small a value as possible. The requirement that  $D[\phi] = \text{Min}$  is now a problem of minimization with a finite number of variables, namely the integrals, understood in dependence of the values of  $\varphi$  in the nodes of the triangular mesh; this problem can certainly be solved, as one can easily see, with linear equations. The fact that the functions so created form a minimization sequence follows immediately from the easy to prove fact that one can approximate each admissible function  $\phi$  and the corresponding Dirichlet integral with the help of our construction with sufficiently large  $j$  to arbitrary accuracy.

We see that Courant had little interest in Ritz' method and did not mention Ritz at all. His low esteem for practical questions at that time led Courant even to remove this footnote from the second edition (1925) of the book. He removed, at the same time, the historically first description of what later became one of

1) Die wirkliche, für den bloßen Existenzbeweis unerhebliche Konstruktion solcher Minimalfolgen macht keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten. Ist z. B.  $G$  ein ganz im Endlichen gelegener Bereich, begrenzt von Kurven  $C$  ohne mehrfache Punkte, so denken wir uns denselben mit einem noch von dem Index  $j$  abhängigen Dreiecksnetz  $T_j$  überdeckt, dessen Maschen mit wachsendem  $j$  immer enger werden. Wir betrachten nun nur solche Funktionen  $\varphi$  bzw.  $\Phi = \varphi - S$ , wo die Differenz  $\varphi - \frac{x}{x^2 + y^2}$  in jedem Dreieck von  $T_j$  eine lineare Funktion wird. Unter  $\Phi_j$  verstehen wir diejenige unter den so entstehenden zu  $T_j$  konstruierten Funktionen, für welche  $D[\Phi]$  einen möglichst kleinen Wert erhält. Diese Forderung  $D[\Phi] = \text{Min.}$  ist jetzt ein Problem eines Minimums einer Funktion von einer endlichen Anzahl von Variablen, nämlich des Integrals, aufgefaßt in seiner Abhängigkeit von den Werten von  $\varphi$  in den Eckpunkten der Dreieckseinteilung; dieses Problem ist gewiß lösbar, und zwar, wie leicht ersichtlich, mittels linearer Gleichungen. Daß die so entstehenden Funktionen  $\Phi_j$  wirklich eine Minimalfolge bilden, folgt sofort aus der unschwer beweisbaren Tatsache, daß man jede zulässige Funktion  $\Phi$  und deren Dirichletsches Integral mit Hilfe unserer Konstruktion bei hinreichend großem  $j$  beliebig genau approximieren kann.

Figure 18: Footnote in the first edition of the book by Hurwitz and Courant [15]

the most important tools for scientific computations, the finite element method. We will come back to this in Section 7.

Even more sad was the fact that the famous, and meanwhile old, Lord Rayleigh published an article [21], in which he accused Ritz of plagiarism and claimed that all of Ritz' ideas were already present in his own previous work. This led to the name of "Rayleigh-Ritz" for this method, accepted by many scientists. A very careful study of all the original papers by Leissa [20] made clear that this claim, and the corresponding name of the method, are not at all justified.

## 6 Immediate use of Ritz' Method in Russia

In contrary to Western Europe, Ritz' method was immediately put to use in Russia, in order to solve hard problems coming from engineering.

### 6.1 Timoshenko

S.P. Timoshenko (1878–1972), a professor working at that time at the Politechnitsheskogo Instituta of Kiev, later in St. Petersburg and still later in Stanford, was the first to realize the importance of Ritz' invention for applications [28]:

Nous ne nous arrêterons plus sur le côté mathématique de cette question: un ouvrage remarquable du savant suisse, M. Walter Ritz, a été consacré à ce sujet. En ramenant l'intégration des équations à la

## швейцарского ученого Вальтера Ритца

Figure 19: 'schweizarskogo utshenogo Waltera Ritza', as Timoshenko refers to the inventor of the method in his original publication in Russian



СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА КОРАБЛЯ[<sup>1</sup>]  
[РАЗДЕЛЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕОРИИ ПЛАСТИН]

Structural Mechanics of Shipbuilding  
[Part concerning the theory of shells]

Figure 20: Ivan Bubnov (1872-1919) and the title of his monumental manual for the construction of ships

recherche des intégrales, M. W. Ritz a montré que pour une classe très vaste de problèmes, en augmentant le nombre de paramètres  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , on arrive à la solution exacte du problème. Pour le cycle de problèmes dont nous nous occuperons dans la suite, il n'existe pas de pareille démonstration, mais l'application de la méthode approximative aux problèmes pour lesquels on possède déjà des solutions exactes, montre que la méthode donne de très bons résultats et pratiquement on n'a pas besoin de chercher plus de deux approximations<sup>14</sup>

We also show the 'schweizarskogo utshenogo Waltera Ritza', of this quote in the original russian publication in Fig. 19. Timoshenko then shows how many interesting problems can immediately be solved approximately, using Ritz' method.

## 6.2 Bubnov

Ivan Bubnov (1872-1919), see Fig. 20, was a structural engineer specialized in the construction of ships, in particular submarines. Like Timoshenko, he was also working at the Polytechnical Institute of St. Petersburg, and needed to

---

<sup>14</sup>We will not address the mathematical aspects of this method: a remarkable publication of a Swiss scientist, M. Walter Ritz, was dedicated to this subject. Transforming the problem of integrating the equations into a problem of evaluating integrals, M. W. Ritz has shown for a large class of problems, that by increasing the parameters  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , one can find the exact solution of the problem. For the problems we are interested in here however, such a proof does not exist, but the application of the method to problems for which we know an exact solution shows that the method gives very good results and in practice one does not need to compute more than two approximations.



**СТЕРЖНИ И ПЛАСТИНЫ**

РЯДЫ В НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ  
СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК\*

*(Петроград, 1915)*

**Beams and Plates**

Series solution of some problems in  
elastic equilibrium of rods and plates

(Petrograd, 1915)

Figure 21: Boris Grigoryevich Galerkin and the famous paper which is now quoted in the literature for the invention of the “Galerkin” method

calculate the behavior of shells for the construction of submarines. Fascinated by the work of Timoshenko (Bubnov does not cite the work of Ritz directly), the simplicity of the approach and the accuracy of the results, he developed an entire battery of problems with approximate solutions in his manual on ship building [2]. A main contribution of Bubnov to the development of the finite element method is that he realized in [1], after having studied the Zhuranskii prize-winning work of Timoshenko, that

“... extremely simple solutions can also be obtained in the usual way, i.e., without resorting to a consideration of the energy of the system [...] we simply substitute the expansion for  $w$  in the general differential expression for equilibrium, multiply the expression obtained by  $\varphi_k dx dy$  and integrate over the entire volume of the body, then we obtain an equation relating the coefficient  $a_k$  with all others [...] and will be identical to those found by Prof. Timoshenko.”

This remark simplified the construction of the linear systems for the computation of the coefficients by giving an easy to remember recipe. Bubnov also required the coordinate functions to be orthogonal in his remark, without giving a justification. He used in general trigonometric functions for  $\varphi_k$ .

### 6.3 Galerkin

Boris Grigoryevich Galerkin (1871-1945), see Fig. 21, was from a poor family, and had to start working already at the age of twelve as a calligrapher. Nevertheless he managed to study in the Mechanics Department of St. Petersburg Technological Institute, and then worked for the Russian Steam-Locomotive Union and the China Far East Railway. He was also interested in politics, and was arrested in 1905 for political activities, and put into prison for one and a half years. This completely changed his interests, and it is in prison where he decided to devote the rest of his life to science. Galerkin went on an extensive

Из приближенных методов решений широкое применение получил в последнее время метод Ритца [6, 7]. Этот метод сводится вкратце к следующему.

#### ЛИТЕРАТУРА

3. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. Ч. 2, СПб., 1914.

6. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.— Journal f. reine u. angewandte Mathematik, 1908, Bd. 135, S. 1—61.
7. Ritz W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern.— Annalen der Physik, 1909, Bd. 28, N. 4, S. 737—786.
8. Тимошенко С. П. Об устойчивости упругих систем. Киев, 1910, 186 с.

Figure 22: Galerkin himself calls the method which carries today his name the 'Ritz Method', and cites all of Ritz papers, as well as the work by Bubnov and Timoshenko

scientific trip through Europe in 1909, and visited, among other countries, also Switzerland. We do not know if he met Walter Ritz on this trip, but Galerkin makes precise references to both papers of Ritz in his most famous publication [11], which is now usually quoted when referring to the Galerkin method, and Galerkin himself calls this method the Ritz Method, see Fig. 22. In this paper, Galerkin introduces Ritz' method on the first few pages, and then goes on to show how the method can be used to solve approximately many interesting and difficult problems from applications. Galerkin notices that the coordinate functions do not need to be orthogonal, one simply gets an additional matrix, which is today called the mass matrix. The main contribution however of Galerkin is in this paper to realize that one does not even need a minimization principle in order to construct a finite dimensional system following the recipe given by Bubnov. One can only speculate why the method is nowadays mostly called the Galerkin method; maybe Galerkin's numerous examples from applications were more appreciated than the theoretical analysis of Ritz. Most readers did not even notice the name of the method in Galerkin's introduction, and went straight to the examples, which form the body of the paper of Galerkin.

## 7 Late Recognition of Ritz' Work in Western Countries and Birth of the Finite Element Methods

Almost three decades after Ritz' tragic death, Richard Courant had changed his mind and gave an address to the American Mathematics Society, on May 3rd, 1941 [8], which he started with the text shown in Fig. 23. In this address,



As Henri Poincaré once remarked, “solution of a mathematical problem” is a phrase of indefinite meaning. Pure mathematicians sometimes are satisfied with showing that the non-existence of a solution implies a logical contradiction, while engineers might consider a numerical result as the only reasonable goal. Such one sided views seem to reflect human limitations rather than objective values.

Figure 23: Richard Courant and the beginning of his address to the American Mathematical Society in 1941, marking a turning point in his appreciation of Ritz’ work

Courant gives great praise to the work by Ritz:

“At first, the theoretical interest in existence proofs dominated, and only much later were practical applications envisaged by two physicists, Lord Rayleigh and Walther Ritz. They independently conceived the idea of utilizing this equivalence for numerical calculation of the solutions, by substituting for the variational problems simpler approximating extremum problems in which but a finite number of parameters need be determined”

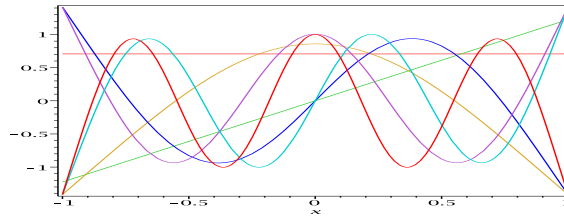
“But only the spectacular success of Walther Ritz and its tragic circumstances caught the general interest. In two publications of 1908 and 1909, Ritz, conscious of his imminent death from consumption, gave a masterly account of the theory, and at the same time applied his method to the calculation of the nodal lines of vibrating plates, a problem of classical physics that previously had not been satisfactorily treated.”

Clearly the tide has turned, and Ritz’ work is now held in high esteem by Courant. In addition, Courant now also realized the importance of the footnote from the first volume of his book with Hurwitz [15]:

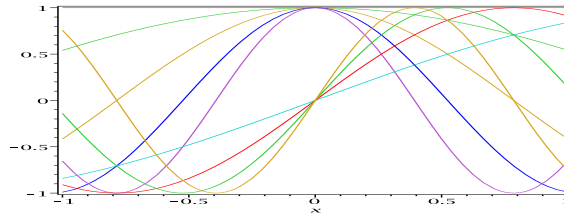
“However, the difficulty that challenges the inventive skill of the applied mathematician is to find suitable coordinate functions”

and instead of the eigenfunctions used by Ritz as coordinate functions, and the trigonometric functions employed by Bubnov and Galerkin, Courant now suggests to use what is nowadays called *hat functions*, see Fig. 24. In two dimensions, the piecewise linear functions Courant has in mind are most easily

**Ritz' choice:**  
Eigenfunctions of the 1d beam, or polynomials



**Bubnov/Galerkin:**  
Use of trigonometric functions or polynomials



**Courant's choice:**  
Use hat functions, or polynomials on elements

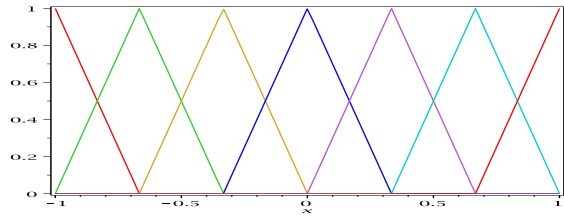


Figure 24: Different choices for the coordinate functions

defined on a triangular mesh, in contrast to the up to then dominating finite difference method:

“Instead of starting with a quadratic or rectangular net we may consider from the outset any polyhedral surfaces with edges over an *arbitrarily chosen* (preferably triangular) *net*.”

and we show a few examples of such hat functions in Fig. 25. In his address, Courant presents the first finite element calculation that we were able to find, shown in Fig. 26. Courant chooses as a model problem a square domain with a

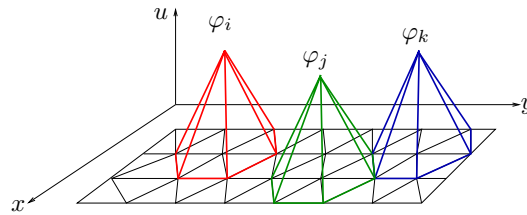


Figure 25: Examples of hat functions in two dimensions

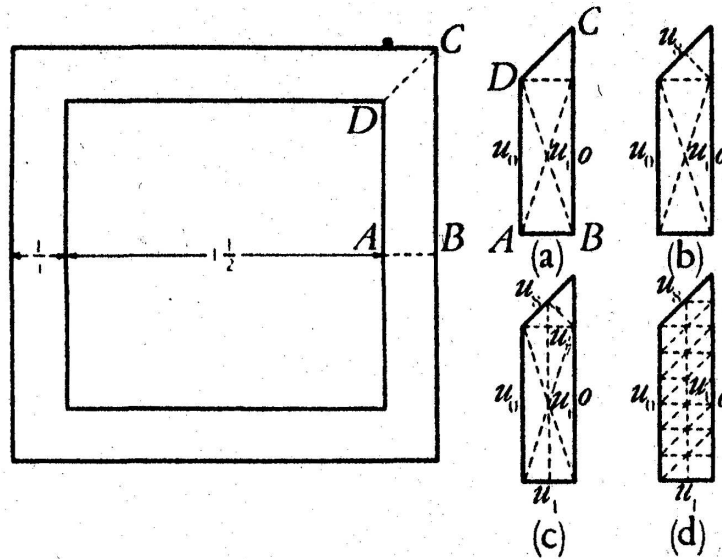


Figure 26: The first finite element computation we were able to find, by Richard Courant

hole, see Fig. 26 on the left, and wants to minimize the functional

$$\int \int (\nabla u)^2 + 2u \longrightarrow \min,$$

with  $u = 0$  on the outer boundary, and  $u = c$ , an unknown constant on the inner boundary. He then compares the results he can obtain for  $c$  and the total stiffness

$$S := - \int \int u dx dy$$

with different coordinate functions:

**Polynomials:** “with negligible amount of numerical labor”

$$\varphi_1 := a(1 - x) \quad S = 0.339, \quad c = -0.11$$

$$\varphi_2 := a(1 - x)[1 + \alpha(x - \frac{3}{4})y] \quad S = 0.340, \quad c = -0.109$$

**Finite Elements:** (“The results, easily obtainable, were”)

$$\text{Case (a): } S = 0.344, \quad c = -0.11$$

$$\text{Case (b): } S = 0.352, \quad c = -0.11$$

$$\text{Case (c): } S = 0.353, \quad c = -0.11$$

$$\text{Case (d): } S = 0.353, \quad c = -0.11$$

Courant concludes that “these results show in themselves and by comparison that the generalized method of triangular nets seems to have advantages.”

The term finite element methods was then coined by Ray Clough in [4], who had started to work with Jon Turner from Boeing on structural dynamics, and this work led to the first published description of the finite element method, without the name yet, in [29], see also the historical note by Ray Clough [5]

## 8 An Application

We now leave the sunny Swiss alps from the beginning of this article (Fig. 1), to turn to the cold Canadian winter, to illustrate how Ritz’ method, and at the same time Schwarz’ method, see (24), are used today in scientific computing. We compute the temperature distribution in a heated, but less well insulated apartment on Durocher street in Montreal, shown in Fig. 27. The walls are shown in blue, the windows in black on top, and there is also a door in black at the bottom and on the right hand side. We assume that the windows are at  $-20^{\circ}$ , and the doors at  $15^{\circ}$ . The steady state heat equation is

$$-\Delta u = f, \quad \text{in the apartment,}$$

where the heat source term  $f$  is non-zero at the heater locations, which are close to the window for the two big rooms on the left and the right, on the left wall in the third room from the left, and there is no heater in the second room from the left.

We use a Schwarz domain decomposition method, where the apartment is decomposed into separate rooms, as shown by the red partitions in Fig. 27, and a finite element discretization of the problem with linear triangular finite elements, as shown by the mesh in the figure. The “Grundfunktionen” of the Ritz method are therefore simple linear hat functions. In the middle in Fig. 27 we show the first iteration of the Schwarz method, where one can clearly see the isolated effect of the heaters and warm doors in each subdomain. At the bottom we show the final result of the simulation, which is now continuous. This result is interesting: one can see that while the heater in the living room on the left and the bedroom on the right is well placed to block the cold from the windows, the heater on the left wall in the bathroom is not effective to keep the room warm, a fact the occupant strongly felt in winter. Also the kitchen is not heated and stays cold, except when cooking and baking.

## 9 Conclusions

We have tried to give an as complete description as possible of the development which led from the variational calculus to Ritz’ work and the finite element method. There are other descriptions of these historical developments already in the literature, see for example the short description by Taylor [27], or the longer study by Leissa [20].

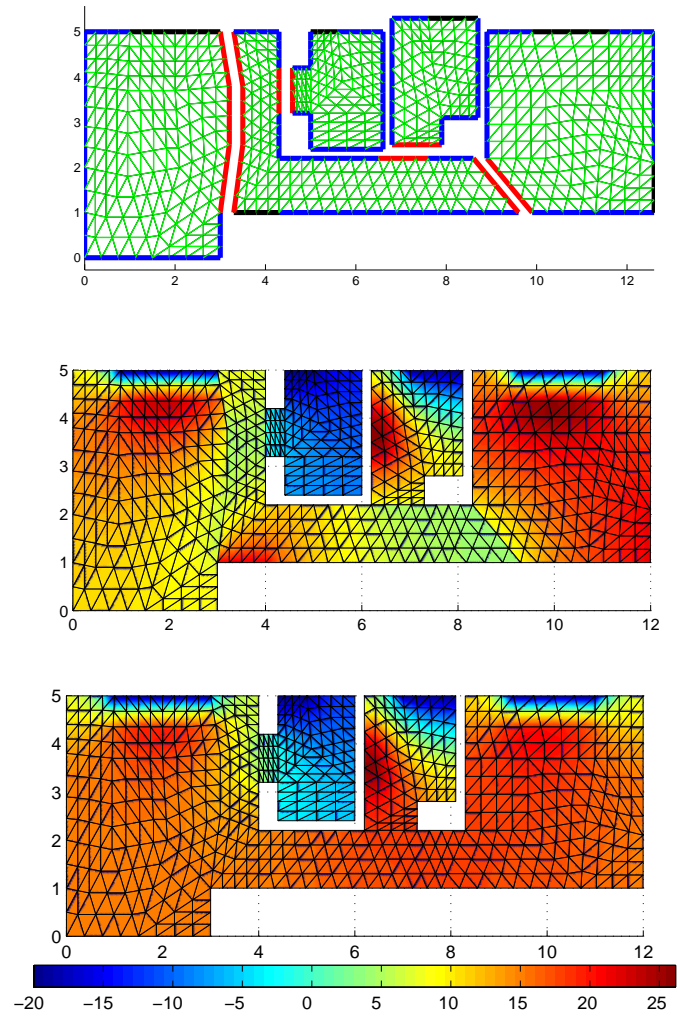
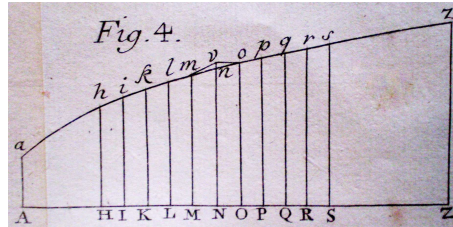


Figure 27: Triangulation and decomposition of the apartment in Montreal, in the middle the first Schwarz iteration and at the bottom the converged temperature distribution.

## 9.1 Back to Euler — the Last Surprise

After all these controversies (should the method be called Rayleigh method? Rayleigh-Ritz? Ritz method? Ritz-Galerkin? Bubnov-Galerkin? Timoshenko-Bubnov-Galerkin? Galerkin method?), let's have a fresh look at Euler's original work from 1744: We have heard above that Euler published 1744 the differential equations (3) for the variational problem (2) and that the standard proof for this equation described above was given 1755 by Lagrange. The natural question is thus: *how did Euler himself find "his" differential equation for a variational problem?* We observe in Caput II of E65 the following procedures:

1. Approx. curve by polygon



2. Approx. Integral

by sum

and differen-

tiate with respect to  $\nu$ ;

$$Z dx + Z' dx + Z'' dx + Z''' dx + \dots$$

3. Set derivative  $(P + N' dx - P')$  to zero;

$$4. \text{ inverse Euler method } \Rightarrow N - \frac{dP}{dx} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ P = \frac{\partial Z}{\partial p}. \end{array} \right)$$

What did Euler? The only thing he *could* do, in the absence of any other theory: in point 1 he discretized the curve by a *finite dimensional* object, which is precisely the hat function finite element space applied to our 1D case. In point 3, then, he solved *directly* the finite dimensional problem which he had obtained after discretizing the integral in point 2. So, finally, *the Ritz finite element method is closer to Euler's work than to anything else published in the one and a half centuries between Lagrange and Hilbert.*

## References

- [1] Ivan G. Bubnov. Report on the works of Professor Timoshenko which were awarded the Zhuranski Prize. *Symposium of the Institute of Communication Engineers*, 81, 1913. All Union Special Planning Office (SPB), in Russian.
- [2] Ivan G. Bubnov. *Structural Mechanics of Shipbuilding*. 1914. (in Russian).

- [3] Ernst Florens Friedrich Chladni. *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*. Leipzig, 1787.
- [4] Ray W. Clough. The finite element method in plane stress analysis. In *Proc ASCE Conf Electron Computat, Pittsburg, PA*, 1960.
- [5] Ray W. Clough. Thoughts about the origin of the finite element method. *Computers and Structures*, 79:2029–2030, 2001.
- [6] Richard Courant. Über die Anwendung des Dirichletschen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung. *Mathematische Annalen*, 71:145–183, 1912.
- [7] Richard Courant. Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*, 144:190–211, 1914.
- [8] Richard Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Math Society*, 49:1–61, 1943.
- [9] L. Euler. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausannae & Genevae, 1744. Enestr. 65, Opera Omnia, Ser.I, vol. 24.
- [10] L. Euler. *Institutionum calculi integralis*. Petropolis, 1768. Enestr. 342, Opera Omnia, Ser.I, vol. 11.
- [11] Boris Grigoryevich Galerkin. Rods and plates. series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates. *Engineers Bulletin (Vestnik Inzhenerov)*, 19:897–908, 1915. (in Russian).
- [12] C.F. Gauss. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. *Magnetischer Verein*, 1839. Werke vol. 5, p.195–242.
- [13] M. Gutknecht. Numerical experiments on solving Theodorsen’s integral equation for conformal maps with the Fast Fourier Transform and various iterative methods. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 4:1–30, 1983.
- [14] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis*, volume 3. John Wiley, 1986.
- [15] Adolf Hurwitz and Richard Courant. *Vorlesungen über die allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. Berlin, Julius Springer, 1922.
- [16] G. Kirchhoff. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 44:51–92, 1850.
- [17] Robert König. Konforme Abbildung der Oberfläche einer räumlichen Ecke. *Mathematische Annalen*, 71:184–205, 1912.

- [18] Rudolph König. Beitrag zur Theorie der Klangfiguren von Wheatstone. *Annalen der Physik und Chemie/Poggendorfs Annalen*, 122:238–245, 1864.
- [19] W. Thomson (later Lord Kelvin). Sur une équation aux différences partielles qui se présente dans plusieurs questions de Physique mathématique. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 12:493–496, 1847.
- [20] A. W. Leissa. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*, 287:961–978, 2005.
- [21] Lord Rayleigh. On the calculation of chladni figures for a square plate. *Philosophical Magazine Sixth Series*, 22:225–229, 1911.
- [22] B. Riemann. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Inauguraldissertation Göttingen, 1851. (Gesammelte Werke, p. 3–43).
- [23] B. Riemann. Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 54:111–114, 1857. (Gesammelte Werke, p. 96–100).
- [24] Walther Ritz. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *J. für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*, 135:1–61, 1908.
- [25] Walther Ritz. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. *Annalen der Physik*, 18(4):737–807, 1909.
- [26] Lord Rayleigh (John William Strutt). *The Theory of Sound, vol. I*. London, Macmillan, 1894. new edition 1945, Dover Publications, New York.
- [27] Robert L. Taylor. Ritz & Galerkin: the road to the Finite Element Method. *Bulletin for the international association for computational Mechanics*, 12:2–5, 2002.
- [28] Stepan (Stephen) P. Timoshenko. Sur la stabilité des systèmes élastiques. *Annales des Ponts et Chaussées*, 9(III):496–566, 1913. Traduit du russe par M. Jean Karpinski et Victor Héroufosse; originally published in Russian in Ivestija Kievskogo Politechnitscheskogo Instituta, Kiev 1910.
- [29] N. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.*, 23:805–23, 1956.
- [30] W. Voigt. Bemerkung zu dem Problem der transversalen Schwingungen rechteckiger Platten. *Göttinger Nachrichten*, pages 225–230, 1893.
- [31] K. Weierstrass. Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip. *Werke*, 2:49–54, 1895. Read in the Academy Berlin 14. July 1870.

- [32] Charles Wheatstone. On the figures obtained by strewing sand on vibrating surfaces, commonly called acoustic figures. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 123:593–634, 1833.

# Discrétisation d'une formulation mixte du problème du Laplacien de Hodge à l'aide des formes différentielles

Robert Guénette<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Département de mathématiques et de statistique  
Pavillon Alexandre-Vachon, 1045, av. de la Médecine  
Université Laval, Québec (Québec), Canada G1V 0A6*

## Résumé

Dans cet exposé, on présentera des résultats numériques concernant une formulation mixte du problème du Laplacien de Hodge introduite récemment par D. Arnold, R. Falk et R. Winther [1, 2]. Ce problème constitue une généralisation au cas vectoriel du problème classique du Laplacien et possède plusieurs applications physiques notamment en électromagnétisme. On présentera des résultats numériques en 2D et en 3D. On traitera aussi de la résolution itérative du système algébrique.

*Mots clés: Eléments finis mixtes, Formes différentielles, Laplacien de Hodge, Méthode itérative*

## 1. Position du problème

Le problème du Laplacien de Hodge peut s'énoncer de manière élégante et succincte si on utilise le formalisme des formes différentielles. On réfère au livre de H. Flander [3] pour la théorie des formes différentielles. Soit  $\Omega$  un domaine régulier et borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$ . On notera par  $\Lambda^k$  l'espace vectoriel des formes différentielles de degré  $k$  sur  $\Omega$  et par  $d : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k+1}$  la dérivée extérieure. Dans  $\mathbb{R}^3$ , la dérivée extérieure correspond respectivement aux opérateurs grad, rot, div. L'espace  $\Lambda^k$  est muni d'un produit scalaire définie par

$$(\omega, \eta) = \int_{\Omega} \omega \wedge \star \eta$$

où  $\star : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k-1}$  dénote l'opérateur de dualité de Hodge. Ceci permet de définir l'espace de Hilbert  $L^2\Lambda^k$  comme étant le complété de  $\Lambda^k$  par rapport à ce produit scalaire et l'espace de Sobolev (Hilbert)

$$H\Lambda^k = \{\omega \in L^2\Lambda^k \mid d\omega \in L^2\Lambda^{k+1}\}$$

L'opérateur adjoint de la dérivée extérieure

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta) \quad \omega \in \Lambda^k, \eta \in \Lambda^{k+1}$$

sera noté par  $\delta = (-1)^{nk+n+1} \star d\star$ . Dans  $\mathbb{R}^3$ , l'opérateur  $\delta$  correspond à -div, rot, -grad.

En utilisant ces notations, la formulation mixte du problème du Laplacien de Hodge s'énonce comme suit :

Pour  $f \in L^2\Lambda^k$ , déterminer  $(u, p) \in H\Lambda^k \times H\Lambda^{k-1}$  satisfaisant

$$\begin{aligned} (du, dv) + (dp, v) &= (f, v), & \forall v \in H\Lambda^k, \\ (u, dq) - (p, q) &= 0, & \forall q \in H\Lambda^{k-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dans l'exposé, on traitera de l'existence et unicité de ce problème continu. La solution de (1) est caractérisée par

$$\begin{aligned} p &= \delta u, & \text{dans } \Omega, \\ \delta du + dp &= f, \\ \star u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \star du &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

On notera que les deux conditions aux limites sont fournies naturellement par la formulation mixte (1). Ceci constitue une formulation mixte du problème du Laplacien de Hodge défini formellement par

$$\Delta u = f$$

où  $\Delta = \delta d + d\delta : L^2\Lambda^k \longrightarrow L^2\Lambda^k$ . La formulation mixte (1) possède plusieurs avantages par rapport à l'approche qui consiste à minimiser la fonctionnelle

$$\min_v \frac{1}{2}(dv, dv) + \frac{1}{2}(\delta v, \delta v) - (f, v)$$

En utilisant les notations vectorielles usuelles dans  $\mathbb{R}^3$  et en faisant varier l'indice  $k$ , on obtient les problèmes suivants :

- Pour  $k = 1$  : Il s'agit de trouver un champ vectoriel  $\vec{u}$  et un champs scalaire  $p$  vérifiant

$$\begin{aligned} p &= -\operatorname{div} \vec{u}, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{grad} p &= \vec{f}, \\ \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{n} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure au domaine.

- Pour  $k = 2$  : Un élément de  $\Lambda^2$  s'identifie à un champ vectoriel  $\vec{u}$  via l'opérateur  $\star$  et la variable  $p \in \Lambda^1$  devient un champ vectoriel  $\vec{p}$ . On obtient le système

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \operatorname{rot} \vec{u}, & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \operatorname{rot} \vec{p} &= \vec{f}, \\ \vec{u} \times \vec{n} &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

- Pour  $k = 3$  : Un élément de  $\Lambda^3$  s'identifie à un champ scalaire  $u$  tandis que  $p \in \Lambda^2$  est de nouveau un champ vectoriel  $\vec{p}$ . On obtient le système

$$\begin{aligned} \vec{p} &= -\text{grad } u, & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \vec{p} &= \vec{f}, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

On reconnaît la forme mixte du problème de Poisson avec les conditions aux limites de Dirichlet.

## 2. Discrétisation

On désire discrétiser le problème mixte (1). Pour cela, on introduit une triangulation  $\mathcal{T}$  du domaine  $\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} K$  par des triangles ou des tétraèdres. On notera par  $\lambda_i, i = 0, \dots, 3$  les coordonnées barycentriques d'un élément  $K$ . Pour chaque face  $f$  (ou arête) définie par les indices  $i_1, i_2, i_3$ , on considère la forme de Whitney de degré 2

$$\omega_f = 2(\lambda_{i_1} d\lambda_{i_2} \wedge d\lambda_{i_3} - \lambda_{i_2} d\lambda_{i_1} \wedge d\lambda_{i_3} + \lambda_{i_3} d\lambda_{i_1} \wedge d\lambda_{i_2}).$$

Ces formes vérifient la relation, pour deux faces  $f$  et  $f'$  de  $K$ ,

$$\int_{f'} \omega_f = \begin{cases} 1 & \text{si } f = f', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour les arêtes, la forme de Whitney de degré 1 s'écrit

$$\omega_a = \lambda_{i_1} d\lambda_{i_2} - \lambda_{i_2} d\lambda_{i_1}$$

et on obtient une relation similaire pour les arêtes

$$\int_{a'} \omega_a = \begin{cases} 1 & \text{si } a = a', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fixons l'indice  $k$ . On discrétise l'espace  $H\Lambda^k$  en choisissant comme degrés de liberté l'ensemble des  $k$ -simplexes de la triangulation. Par exemple, pour  $k = 2$ , il s'agit de l'ensemble des faces. Les fonctions de bases sont les formes de Whitney  $\omega_f$  de degré  $k$  associées aux  $k$ -simplexes  $f$  de  $\mathcal{T}$ . On note par  $\Lambda_h^k$  le sous-espace discret qui approxime l'espace  $H\Lambda^k \supset \Lambda_h^k$ . Ces éléments finis sont aussi connus sous les noms de Raviart-Thomas ou Nedelec selon l'indice  $k$ . On consultera le livre de Brezzi et Fortin [4] pour une étude exhaustive de ces éléments.

Le problème discret s'énonce comme suit :  
trouver  $(u_h, p_h) \in \Lambda_h^k \times \Lambda_h^{k-1}$  satisfaisant

$$\begin{aligned} (du_h, dv_h) + (dp_h, v_h) &= (f, v_h), & \forall v_h \in \Lambda_h^k, \\ (u_h, dq_h) - (p_h, q_h) &= 0, & \forall q_h \in \Lambda_h^{k-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Le problème approché s'écrit sous la forme d'un point de selle

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -M_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $M_p$  est la matrice masse associée à la variable  $p$ . Si le domaine  $\Omega$  est simplement connexe, le problème discret (6) admet une solution unique. La matrice globale du système est symétrique et inversible toutefois le bloc  $A$  n'est pas inversible.

Dans l'exposé, on présentera des résultats numériques en 2D et en 3D. On traitera aussi de la résolution itérative du système algébrique par l'algorithme MINRES.

## Références

- [1] D. Arnold, R. Falk, and R. Winther, *Finite element exterior calculus : from Hodge theory to numerical stability*, Bull. Amer. Math. Soc. 2010.
- [2] D. Arnold, R. Falk, and R. Winther, *Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications*, Acta numerica 2006, p. 155.
- [3] H. Flanders, *Differential forms with applications to the physical sciences*, second ed. Dover Publications, New York, 1989.
- [4] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer, New York, 1991.

# Adaptation de maillages hybrides pour les problèmes de combustion

Yannick Sirois<sup>1</sup>, François Guibault<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*BMA, 144 Barr street, Montréal, Canada, H4T 1Y4*

<sup>2</sup>*École Polytechnique de Montréal, CP 6079 succ. Centre-Ville, Montréal, QC, Canada, H3C 3A7*

## Résumé

La simulations des phénomènes de combustion dans les chaudières de taille industrielle présente des défis considérables au plan numérique. En effet, les dimensions physiques d'une chaudière se mesurent typiquement en mètres ou même en dizaines de mètres, alors que la taille appropriée des cellules de calcul afin d'obtenir une précision adéquate du champ de température et de la fraction de mélange des espèces dans la région du front de flamme, se situe dans l'ordre du dixième de millimètre ou moins. De telles disparités d'échelles font en sorte qu'une approche consistant à mailler entièrement le domaine de calcul avec des éléments partout suffisamment fins pour résoudre adéquatement les phénomènes de combustion ne sont pas envisageables en pratique, puisqu'elle mènerait à des maillages comportant des dizaines, voir des centaines de millions de nœuds de calcul en trois dimensions. Un calcul précis de ces quantités est pourtant essentiel afin de prédire les taux de production des polluants et en particulier des oxydes d'azote ( $\text{NO}_x$ ).

Dans cet article, nous décrivons une approche d'adaptation de maillage basée sur un estimateur a posteriori de l'erreur d'interpolation afin de contrôler localement la taille des cellules de calcul et ainsi accroître la précision du calcul des champs de température et de fraction de mélange des espèces. L'estimateur d'erreur est obtenu en combinant, sous la forme d'un tenseur métrique, les champs des dérivée seconde des principales variables décrivant le problème, soit les composantes de la vitesse, la température et la fraction de mélange combustible/comburant. Les dérivées de chacune des variables sont obtenues par une méthode de reconstruction locale [1] appliquée aux champs de solution calculés à l'aide du résolveur commercial Star-CD d'Adapco. Les métriques sont ensuite combinées à l'aide d'un algorithme d'intersection [2] afin de fournir une métrique cible à l'algorithme d'adaptation de maillage. Une combinaison d'opérations de lissage géométrique, de lissage topologique, de raffinement et de déraffinement est utilisée afin de modifier localement le maillage afin qu'il satisfasse au mieux la métrique cible spécifiée. Chacune des opération d'adaptation tente de modifier le maillage afin de minimiser une norme de distance entre la métrique du maillage actuel et la métrique spécifiée. Cette norme, appelée coefficient de non-conformité de l'élément ou du maillage [3, 4], permet de formuler des critères compatibles d'adaptation pour différents types d'éléments (triangle, quadrilatères en 2D, tétraèdres, hexaèdres, prismes en 3D) et d'obtenir un algorithme d'adaptation convergent pour des maillages hybrides [5], c'est-à-dire comportant plusieurs types d'éléments.

Un cas de simulation d'un combusteur pour laquelle des résultats expérimentaux sont disponibles [6, 7] sera utilisé afin d'illustrer le gain en précision et la réduction en coût de calcul que permet l'approche d'adaptation de maillage proposée.

**Mots clés:** *Adaptation de maillage, maillage hybride, métrique, combustion, polluants*

## Références

- [1] M.-G. Vallet, C.-M. Manole, J. Dompierre, S. Dufour, and F. Guibault. Numerical comparison of some hessian recovery techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(8) :987–1007, 2007.
- [2] S. McKenzie, J. Dompierre, A. Turcotte, and E. Meng. On metric tensor representation, intersection, and union. In *11th ISGG Conference*, page 12, Montréal, QC, May 2009. École Polytechnique de Montréal.
- [3] P. Labbé, J. Dompierre, M.-G. Vallet, F. Guibault, and J.-Y. Trépanier. A universal measure of the conformity of a mesh with respect to an anisotropic metric field. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 :2675–2695.
- [4] Y. Sirois, J. Dompierre, M.-G. Vallet, and F. Guibault. Measuring the conformity of non-simplicial elements to an anisotropic metric field. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(14) :1944–1958, 2005.
- [5] Y. Sirois, J. Dompierre, M.-G. Vallet, and F. Guibault. Hybrid mesh smoothing based on riemannian metric non-conformity minimization. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(1-2) :47–60, 2010.
- [6] Max H. Lewis and L. Douglas Smoot. Turbulent gaseous combustion - 1. local species concentration measurements. *Combustion and Flame*, 42(2) :183–196, 1981. Compilation and indexing terms, Copyright 2009 Elsevier Inc. Compendex 1982020006839.
- [7] Philip J. Smith and Douglas L. Smoot. Turbulent gaseous combustion - 2. theory and evaluation for local properties. *Combustion and Flame*, 42(3) :277–285, 1981. Compilation and indexing terms, Copyright 2009 Elsevier Inc. Compendex 1982030003850.

# TOWARD A CFD-BASED INTEGRATED APPROACH TO AIRCRAFT-ROTORCRAFT-ENGINE-PROPELLER ICE PROTECTION SYSTEM DESIGN

Wagdi G. Habashi

*Director, CFD Laboratory, Department of Mechanical Engineering, McGill University  
NSERC-J. Armand Bombardier-Bell Helicopter-CAE Industrial Research Chair of Multidisciplinary  
Montreal*

## **Résumé**

With the power of computers and supercomputers increasing exponentially, there is a growing thrust for more advanced multi-disciplinary CFD simulations in aerospace. A particular current interest is the application of simulation techniques for the better understanding of in-flight icing. Recent and recurring incidents/accidents clearly demonstrate to the general public that the problem is far from being fully mastered and that certification does not mean immunity from accidents, and hopefully impresses on in-flight icing specialists that they have to embrace in a much faster way new technologies. The applications of CFD in the icing field are literally light-years behind aerodynamics analysis/design methods, often used within the same organizations. A significant number of ice protection system designers are still mired in correlations and 2D, inviscid, incompressible flows. The presentation introduces a paradigm shift within that community that demonstrates that :

1. Icing simulation is an invaluable tool and an indispensable companion to testing,
2. Icing simulation and aerodynamics should be integrated based on “identical” CFD tools,
3. Ice protection ought to be for the aircraft as a system not as disconnected components,
4. This means that the same icing simulation code should handle aircraft, rotorcraft and engines,
5. The icing certification envelope and the aerodynamic envelope have to be coupled,
6. CFD, when combined with Reduced Order Modeling, can lead to real-time solutions that can be used for effective pilot training in in-flight simulators.

*Mots clés: Multi-disciplinary CFD, Icing,*

# Error indicator and mesh adaptation in FreeFem++

Frédéric Hecht

*Laboratoire Jacques-Louis Lions,  
Université Paris 6, France.  
mailto:hecht@ann.jussieu.fr  
http:www.ann.jussieu.fr/~hecht*

## Résumé

The main goal of this presentation is to present different new and old techniques of mesh adaptation, under the assumption : The mesh generation needs a metric to define the “mesh size” constraint [3],[4].

The Hessian error indicator gives naturally the metric, but the construction is clear for  $P_1$  and  $L^p$  norm. I explain how to build anisotropic error indicator for high order finite element [6], [7].

The other error indicators (residual or hierarchical [5]) give just a level of error, so how to build a metric from this local error indicator.

By using of a priori error estimates, the new mesh size is almost given by the following formulae :

$$h_{n+1}(x) = \frac{h_n(x)}{f_n(E_n(x))}$$

where  $E_n(x)$  is the level of error at point  $x$  given by the local error indicator,  $h_n$  is the previous “mesh size” field, and  $f_n$  is a user function, generally just linear.

I will present how to test and use all this techniques with FreeFem++ software , see [1, 2].

**Mots clés:** *FreeFem++, metric based adaptation, high order finite element*

## Références

- [1] F.Hecht : *freefem++ documentation*, on the web at <http://www.freefem.org/ff++>.
- [2] I. Danaila, F. Hecht, O. Pironneau : *Simulation numérique en C++* Dunod, 2003.
- [3] P.L. George : *Automatic triangulation*, Wiley 1996.
- [4] F. Hecht : The mesh adapting software : bamg. INRIA report 1998.
- [5] R. Verfürth — A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, Wiley & Teubner (1996).

- [6] F. Hecht, R. Kuate — Error indicator and mesh adaption, in FreeFem++ , 17 Mesh Round Table. Pittsburgh, Pennsylvania, <http://www.imr.sandia.gov/>, 2008
- [7] J-M. Mirebeau, A. Cohen — Anisotropic smoothness classes : from finite element approximation to image models submitted to J. Math. Imaging and Vision, 2009. <http://www.ann.jussieu.fr/~cohen/cartoon.pdf>

# Approximation des EDP stochastiques par la méthode des éléments finis

Hassan Manouzi

*Département de mathématiques et statistique,  
Université Laval, Québec, Canada G1K 7P4  
(hm@mat.ulaval.ca)*

## Résumé

Stochastic partial differential equations (SPDEs) play fundamental and important roles in many problems. Their mathematical treatment is more involved compared to that of deterministic partial differential equations. Their numerical simulations become an important strategy in practical applications.

We propose the development of finite element approximations of SPDEs, particularly those SPDEs modelling fluid flows such as the stochastic pressure equations or the stochastic Navier-Stokes equations that involve additive and multiplicative white noises. We give existence and uniqueness results for the continuous problem and its approximation by finite element method. Optimal error estimates are derived and algorithmic aspects of the method are discussed. Our method will reduce the problem of solving SPDEs by solving a set of deterministic ones. Moreover, one can reconstruct particular realizations of the solution directly from Wiener chaos expansions once the coefficients are available. Finally, we present numerical results of some test problems.

*Mots clés: Stochastic PDEs, FEM, Error estimate*

# Développement asymptotique topologique et adaptation de maillage

A. ALLA<sup>1</sup>, M. MASMOUDI<sup>2</sup>, Z. MGHAZLI<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> *Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences  
Laboratoire Interdisciplinaire en Ressources Naturelles et en Environnement (LIRNE)  
Equipe d' Ingénierie MATHématique (E.I.MA.)  
B.P. 133 Kenitra, Maroc*

<sup>2</sup>*Université Paul Sabatier  
Institut de Mathématique de Toulouse  
Equipe de Mathématiques pour l'Industrie et la Physique (MIP)  
118 Route de Narbonne, F31062 Toulouse cedex 9, France*

## Résumé

Les estimations *a posteriori* et les procédures d'adaptation de maillage sont devenues ces dernières décennies, l'un des principaux axes de développement dans le domaine de l'analyse numérique et un outil indispensable dans la discrétisation des équations aux dérivées partielles. Elles ont pour but d'améliorer la qualité de la solution calculée et permettent d'assurer, d'une part que la solution approchée est d'une précision fixée, et d'autre part que cette précision est équidistribuée.

Ayant obtenu un estimateur d'erreur *a posteriori*, ce dernier est utilisé comme critère pour construire un procédé d'adaptation de maillage de manière à amener l'erreur réellement commise à un niveau choisi par l'utilisateur. Les algorithmes d'adaptation sont généralement basés sur des procédés de remaillage par création de nœuds (raffinement), retournement d'arêtes, suppression de nœuds (déraffinement) et déplacement des nœuds.

La première question qui peut se poser est : ayant un nombre fixé de nœuds d'un maillage, quelle est la position "optimale" de ces nœuds dans le sens qui réduit l'erreur d'approximation d'un problème. Mathématiquement, ce problème est équivalent à un problème de minimisation d'une fonctionnelle coût liée à l'erreur d'approximation. Une étude dans ce sens a été réalisée dans [5] en utilisant la fonctionnelle d'énergie comme fonction coût. Dans [1] on trouve une analyse et une mise en œuvre d'une technique de déplacement des nœuds en utilisant la norme de l'estimateur hiérarchique (Cf. [2]) comme fonctionnelle coût sous la contrainte de deux problèmes variationnels discrets, l'un lié à la solution approchée et l'autre lié à l'estimateur d'erreur hiérarchique.

Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage du domaine  $\Omega$  et notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble de ses nœuds. La fonctionnelle à minimiser dépend de  $\mathcal{M}$  à travers la solution approchée qui dépend de  $\mathcal{T}_h$  :

$$j(\mathcal{M}) = J(u_h(\mathcal{T}_h)).$$

où  $u_h$  est la solution numérique associée au maillage  $\mathcal{T}_h$ . Le problème ainsi posé, est un problème d'optimisation de forme dont les paramètres sont la position des nœuds du maillage. Les techniques classiques (cf.[6]) ont été utilisées pour calculer la dérivée de forme de la fonctionnelle coût par rapport aux variables de contrôles qui sont ici les nœuds du maillage, et une position optimale des nœuds est obtenue.

Les méthodes classiques de l'optimisation de forme excluent le changement topologique du domaine et ne permettent pas la création de trous. Pour le problème du maillage ces méthodes ne permettent pas le changement de la topologie du maillage en ajoutant un nœud supplémentaire dans la grille. Une alternative, qui permettrait d'ajouter, et surtout de trouver l'endroit optimal pour ajouter ce nœud est l'utilisation des techniques de développement asymptotique topologique. L'idée de ces techniques, qui au départ revient à Céa, Gioan et Michel [3] et dont une présentation dans le contexte de l'optimisation topologique se trouve dans [4], permet d'ajouter des trous dans le domaine.

Pour ajouter un nœud à une distance  $\varepsilon$  de l'un des sommets d'un triangle  $K_0$  de  $\mathcal{T}_h$ , on considère la nouvelle paramétrisation constituée des nœuds du maillage ainsi perturbé, notée

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{M} \oplus \{x_{K_0}^\varepsilon\}.$$

Le développement asymptotique de  $j(\mathcal{M})$  est de la forme

$$j(\mathcal{M}_\varepsilon) = j(\mathcal{M}) + f(\varepsilon)g(K_0) + o(f(\varepsilon)),$$

$$f(\varepsilon) > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0.$$

$g(K_0)$  est le gradient topologique de  $j(\cdot)$  et va fournir des informations pour ajouter un nœud dans le triangle  $K_0$ .

Dans cette présentation nous allons montrer comment calculer le gradient topologique de la fonctionnelle à minimiser et qui est liée à l'estimateur hiérarchique. On introduit le lagrangien et on montre que ce gradient topologique va dépendre de l'état adjoint. On montrera enfin sur quelques tests numériques que l'adaptation avec cette technique se fera à moindre coût.

**Mots clés:** *Estimateur hiérarchique, développement asymptotique topologique, adaptation de maillage, optimisation de forme.*

## Références

- [1] A. ALLA, M. FORTIN, F. HECHT, Z. MGHAZLI : R-Adaptation de maillage par l'estimateur d'erreur hiérarchique, ARIMA, Volume 5, p1-10, (2006).
- [2] R.E. BANK, R.K. SMITH : A posteriori error estimates based on hierarchical bases , SIAM J.Numer.Anal, 1993, Vol.30, N.4, p.921-935.
- [3] J. CÉA, A. GIOAN, J. MICHEL : "*Quelques résultats sur l'identification de domaine*", Calcolo 10(1973), pp. 207-232.
- [4] J. CÉA, S. GARREAU, PH. GUILLAUME, M. MASMOUDI : "*The shape and topological optimizations connection*", Comput. Methods Appl. Anal. Numer., 20(1986), pp. 371-402.
- [5] M.C. DELFOUR, G. PAYRE, J.P. ZOLESIO : An optimal triangulation for second order elliptic problems, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 50, 1985, 231-261.
- [6] J. SOKOLOWSKI, J.P. ZOLESIO : Introduction to Optimization, shape sensitivity analysis, Springer series in computational mathematics, Vol.16, 1992.

# Adaptation de maillage pour les problèmes de surfaces libres instationnaires

Yvan Mokwinski, François Guibault, Steven Dufour,

*École Polytechnique de Montréal, C.P. 6079, succ. Centre-Ville, Montréal, QC, Canada*

## Résumé

Nous proposons une stratégie d'adaptation de maillage et d'estimation d'erreur a posteriori pour la modélisation de problèmes à surfaces libres dans un contexte Eulérien de capture de l'interface. L'objectif de cette étude est d'appliquer avec précision la modélisation de la dynamique des surfaces libres en se concentrant sur la qualité de la discrétisation de la variable de capture de l'interface.

Une stratégie d'adaptation de maillage non structuré basée sur une méthode de point fixe, proposée par Alauzet et al.[1], est utilisée pour obtenir une discrétisation spatiale optimale des équations aux dérivées partielles régissant le problème à surface libre considéré. Parmi ces équations on retrouve les équations de Navier-Stokes et une équation de transport dont la variable de marquage est solution. Nous proposons une extension de cette stratégie d'adaptation en incluant une étape de réinitialisation de la variable Eulérienne de capture de l'interface, combinant différentes approches proposées par Remacle et al. ([2],[3]) et par Claisse et al. ([4], [5]). Cette extension est complétée par un prédicteur peu coûteux (en se basant sur une méthode de Galerkin discontinu) de l'évolution de la surface libre et par l'application des estimateurs d'erreurs a posteriori applicable à l'équation de transport, proposé par Pelletier et al.[6], permettant de corriger la discrétisation afin de confiner l'évolution de l'interface à l'intérieur d'une région raffinée. Le transfert des variables discrétisées sur un nouveau maillage afin de reprendre ou continuer les calculs nécessite l'utilisation d'une méthode d'interpolation. Si ce transfert n'est pas effectué à l'aide de méthodes numériques adéquates, alors surviennent des problèmes de conservation de la masse et de perturbations des dérivées temporelles. L'impact de la stratégie de transfert sur ces quantités sera étudié. Une stratégie spécifique pour le transfert des variables est présentée et inclue l'étape de réinitialisation de la variable de marquage. Afin d'assurer une application précise du modèle à la Brackbill régissant les effets de tension de surface, le problème du calcul d'une carte de métrique adéquate est abordé.

La stratégie d'adaptation de maillage proposée permet de réduire le nombre d'itération d'adaptation, et de ce fait le nombre et l'impact des étapes d'interpolation. L'évolution de la surface libre est prédite par la résolution efficace d'une équation de transport supplémentaire à l'aide des méthodes de Galerkin discontinus. L'étape de réinitialisation a pour effet de supprimer la diffusion de la densité de maille dans le temps, permettant d'évaluer convenablement les quantités physiques et d'appliquer correctement le modèle régissant les effets de tensions de surface. Des problèmes à surface libre permettant la vérification des méthodes

de résolution seront présentés afin d'illustrer la méthodologie, la précision et le coût total des calculs. Les problèmes représentatifs de la dynamique des surfaces libres seront privilégiés.

**Mots clés:** *Adaptation de maillage, surface libre, normale, courbure, reconstruction, estimation d'erreur*

## Références

- [1] F. Alauzet, P. J. Frey, P. L. George, and B. Mohammadi. 3d transient fixed point mesh adaptation for time-dependent problems : Application to cfd simulations. *Journal of Computational Physics*, 222(2) :592–623, 2007. doi : DOI : 10.1016/j.jcp.2006.08.012.
- [2] J.F. Remacle, N. Chevaugeron, É. Marchandise, and C. Geuzaine. Efficient visualization of high-order finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(4) :750–771, 2006.
- [3] E. Marchandise, P. Geuzaine, N. Chevaugeron, and J.-F. Remacle. A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for the computation of bubble dynamics. *Journal of Computational Physics*, 225(1) :949–974, 2007. doi : DOI : 10.1016/j.jcp.2007.01.005.
- [4] A. Claisse and P. Frey. Construction d'une courbe régulière d'approximation d'un ensemble de points. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(17-18) :1017–1022, 2008.
- [5] A. Claisse, V. Ducrot, and P. Frey. Levelsets and anisotropic mesh adaptation. *Submitted to AIMS*, 2008.
- [6] D. Pelletier, A. Zaki, and A. Fortin. Adaptive remeshing for hyperbolic transport problems. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 3(2) :79–99, 1994.

# Vérification, validation, incertitudes et maillages adaptatifs

D. Pelletier<sup>1</sup>, S. Etienne<sup>1</sup>, A. Garon<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>*Ecole Polytechnique de Montreal, Montreal, Canada*

## Résumé

On discute des enjeux de vérification, validation et de prédiction d'incertitudes en CFD. On utilise des maillages adaptatifs lors des études systématiques de raffinement de maillages requises pour la vérification de code et de simulation. On présente la méthode des solutions manufacturées pour la vérification de code. Des exemples de vérification réussie et échouée démontrent qu'une prédiction fiable s'obtient uniquement avec un modèle mathématique approprié et une solutions numérique précise (vérifiée) des équations différentielles. L'article met l'accent sur les bonnes pratiques en CFD pour assurer une vérification systématique et la rigueur de la validation. Finalement, on utilise la méthode de l'équation des sensibilités pour obtenir des estimés des incertitudes sur les prédictions induites par celles des inputs.

*Mots clés: éléments finis adaptatifs, Vérification, validation, incertitude, Navier-Stokes*

## 1. Introduction

La prédiction numérique des écoulements turbulents a fait l'objet d'efforts de recherche intenses de puis plusieurs années. On constate que les prédictions diffèrent souvent grandement entre auteurs, et ce pour un même problème. Cette observation est d'autant plus déconcertante lorsque les utilisateurs obtiennent des résultats très différents alors que leurs algorithmes sont similaires. Le tableau 1 présente les prédictions de la longueur de la zone de recirculation pour un écoulement turbulent sur une marche descendante. Tous les auteurs sauf deux (Donaldson, and Ilinca *et al.*) utilisent une variante du modèle  $k - \epsilon$  standard, des lois de parois et un algorithme de type TEACH [1]. La seule explication possible des différences observées réside dans la qualité du maillage et peut-être dans des détails d'implémentation.

Pour contrer ce phénomène, Roache propose une approche permettant de distinguer les erreurs de modélisation de erreurs numériques [2]. L'étape dite de vérification apporte une réponse à la question *La résolution des équations est-elle faite correctement?* La question des erreurs numériques est au centre du processus de vérification. L'essence de la vérification est de déterminer si les erreurs numériques de la prédiction sont suffisamment petites pour que nous

Référence	Turbulence Model	$L/H$
Kim et al.	experiment	$7 \pm 0.5$
Mansour and Morel	$k - \epsilon$	5.2
Pollard	$k - \epsilon$	5.88
Rodi et al.	$k - \epsilon$	5.8
Launder et al.	ASM	6.9
Abdelmeguid et al.	$k - \epsilon$	6
Demirdzic et al.	modified $k - \epsilon$	6.2
Donaldson et al.	RSM	6.1
Ilegbusi and Spalding	modified $k - \epsilon$	7.2
Nallasamy and Chen	$k - \epsilon$	5.8
Syed et al.	$k - \epsilon$	5.8
Ilinca et al.	$k - \epsilon$	6.2

TABLE 1 – Longueur de la zone de recirculation pour la marche descendante

puissions dire qu'à toutes fins utiles nous avons trouvé *LA solution des EDPS*. La deuxième étape dite de Validation pose plutôt la question *Résolvons-nous les bonnes équations pour ce problème?* Le point central en validation est de déterminer si le modèle mathématique est une représentation fidèle des phénomènes physiques considérés.

La méthode d'éléments finis adaptatives que nous utilisons pour effectuer la vérification et la Validation (**VnV**) a fait ses preuves pour un large spectre de d'écoulements laminares [3], turbulents et incompressibles [4, 5, 6], compressibles [7, 6], incluant les effets de transfert de chaleur convectifs et conjugués [8, 9, 10, 11]. Plus récemment elle a été appliquée avec succès en analyse de sensibilité et d'incertitude ainsi qu'en design optimal [12, 13, 14].

## 2. Définitions

Etablissons d'abord la distinction entre Vérification et Validation. En français courant ces deux mots sont synonymes. Par contre, en CFD, ils ont acquis un sens technique propre au contexte de la CFD. Nous adoptons les définitions reconnues [15, 2, 16] : la *Vérification* c'est de *bien résoudre les équations* et elle de la *Validation* c'est de *résoudre les bonnes équations*.

Lors de la vérification de son code le développeur définit précisément les équations différentielle à résoudre, fait la démonstration qu'elles sont résolues correctement avec un ordre de précision donné et ce, de façon consistante de sorte que lorsque la finesse du maillage tend vers zéro, le programme produira *LA solution des EDPs*. On peut aussi faire la distinction entre vé-

rification et validation en faisant le parallèle entre mathématiques et sciences de l'ingénieur. La vérification relève exclusivement de l'analyse numérique et cherche à répondre à la question : *Faisons nous un bon travail d'analyse numérique pour résoudre ces équations ?* La validation, quant à elle, relève des sciences de l'ingénieur car elle tente de répondre à la question *le modèle mathématique est-il adéquat pour le problème qui nous intéresse ?*

À la lumière de ce qui précède il devient évident qu'on ne peut pas valider un code. Au mieux, on pourra valider le code pour une classe restreinte d'écoulements. Il devient clair aussi que le code et les simulations doivent faire l'objet de vérifications séparées. La vérification d'un code de simulation nécessite l'évaluation de l'erreur entre une solution analytique et la solution numérique. La vérification d'une simulation nécessitera des estimations ou des encadrements de l'erreur pour s'assurer que rien n'empêche le code de livrer l'ordre de précision attendu.

La validation s'intéresse à la fidélité du modèle mathématique des phénomènes physiques d'intérêt. On compare prédictions numériques et données expérimentales pour déterminer à quel point le modèle constitue une représentation adéquate de la réalité. On notera que tout exercice de validation perd son sens et sa crédibilité si le code et la simulation n'ont pas été vérifiés au préalable. Roache prône les études de raffinement systématique du maillage et l'extrapolation de Richardson comme outil de vérification pour les maillages structurés. Nous pensons que remaillage adaptatif est un outil efficace pour automatiser le délicat processus de génération de maillage complexes.

On assimile souvent la validation à une simple comparaison entre mesures et prédictions. En pratique cela s'avère plus complexe. Premièrement, il faut entreprendre l'exercice sur un cas pour lequel on détient des mesures suffisamment complètes pour définir entièrement le problème de simulation afin de garantir que la simulation et l'expérience traitent exactement le même problème (même géométrie, mêmes conditions limites et initiales etc.. En pratique, il est difficile d'obtenir des données de qualité. En effet, plusieurs sources d'erreur peuvent compromettre la précision des données recueillies (calibration, biais, techniques d'acquisition et d'essais etc. [17] Finalement, la plupart des expériences rapportées dans la littérature n'ont pas été conçues à des fins de validation. Il leur manque souvent des données critiques pour la simulation : détails géométriques, des conditions limites ou initiales, [2]. Oberkampf note aussi que

“as one progresses down the list to more difficult quantities for CFD to predict, the experimental uncertainty generally increases also” [18]. Ces considérations peuvent entraîner de fausses validations ou encore de fausses invalidations.

Nous avons choisi délibérément les données expérimentales et des modèles d'écou-

lements afin d'illustrer une variété de situations. Toutes nos prédictions sont vérifiées au sens de Roache. Les exemples retenus montrent qu'un code vérifié peut très bien conduire à la validation d'une simulation dans un cas, et l'invalidation d'une autre, illustrant ainsi la difficulté de l'opération.

### 3. Le modèle mathématique

On utilise les équations de Navier-Stokes pour un gaz parfait :

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \\
 \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu_e (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \rho \mathbf{f} \\
 \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \mathbf{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T) + \rho q_s \\
 \rho &= \frac{p}{RT}
 \end{aligned} \tag{1}$$

ici  $\mu_e$  et  $\lambda_e$  sont la viscosité et la conductivité efficaces qui incluent les effets de la turbulence via le modèle  $k - \epsilon$  standard :

$$\begin{aligned}
 \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k &= \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_T} \\
 \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon &= \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + \rho C_1 C_\mu k P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k}
 \end{aligned}$$

de sorte que  $\mu_e$  et  $\lambda_e$  sont dénnées par :

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad \lambda_T = \frac{c_p \mu_T}{Pr_T}$$

L'effet des parois solides est incorporé par le biais de fonctions de parois (wall function [8]). On utilise le changement de variable suivant afin de garantir la positivité des variables de turbulence :  $\mathcal{K} = \ln(k)$   $\mathcal{E} = \ln(\epsilon)$ . Cette tranformation ne change en rien le modèle de turbulence [7, 8, 4]. On résout ces équations par une méthode d'éléments finis utilisant le triangle quadratique de Taylor-Hood [19] ( $P_2 - P_1$ ). On consultera [4, 10, 11] pour les détails.

## 4. Adaptation de maillage

Nous procédons par remaillage adaptatif à la manière de Peraire [20]. Ignat présente une description détaillée de notre approche [8]. On obtient des estimations locales et globales des erreurs à l'aide de reconstruction de type moindres-carrés des dérivées que l'on calcule pour tous des champs de solution. [voir 21]. On calcule une estimation de l'erreur pour chaque variable dépendante ( vitesse, pression, température, et variables de turbulence  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{E}$ ).

L'algorithme procède comme suit : (1) étant donné un maillage et sa solution on évalue la taille idéale de chaque élément de ce maillage en utilisant les estimations d'erreurs et le taux de convergence asymptotique de l'élément ; le maillage suivant est conçu de façon à réduire l'erreur par facteur prédéfini par l'utilisateur (2 ou 3). Il en résulte une nouvelle distribution de taille des éléments pour chacune des variables dépendantes ; sur chaque élément on retient la plus petite ; (2) le maillage adapté est généré par un mailleur de type frontal, puis (3) on résout le problème sur ce nouveau maillage. On répète ce processus jusqu'à l'obtention d'une solution dont la précision est satisfaisante.

## 5. Vérification de code et solution manufacturée

La méthode des solutions manufacturées (MSM) est une technique très efficace pour la vérification d'un code de calcul. Les solutions analytiques qu'elle produit offrent un cadre rigoureux pour évaluer simultanément la performance et la précision du code de simulation, de l'estimer d'erreur, et de la méthode adaptative, en une seule étude de raffinement de maillage.

Notre premier exemple (CV-1) imite un jet rond laminaire impactant une paroi so-

lides fortement chauffées [voir 22] :

$$\begin{aligned}
 p &= e^{-400(x^2+r^2)} \\
 T &= e^{\frac{200x}{1+4r^2}} \\
 \rho &= \frac{\gamma_r M_r^2 p + 1}{\frac{T_s}{T_r} T + 1} \\
 u &= 100x^2(e^{-x^2r^2} - e^{-0.01})/\rho \\
 v &= -100xr(e^{-x^2r^2} - e^{-0.01})/\rho
 \end{aligned}$$

Note : toutes les propriétés physiques du fluide dépendent de la température[22] On

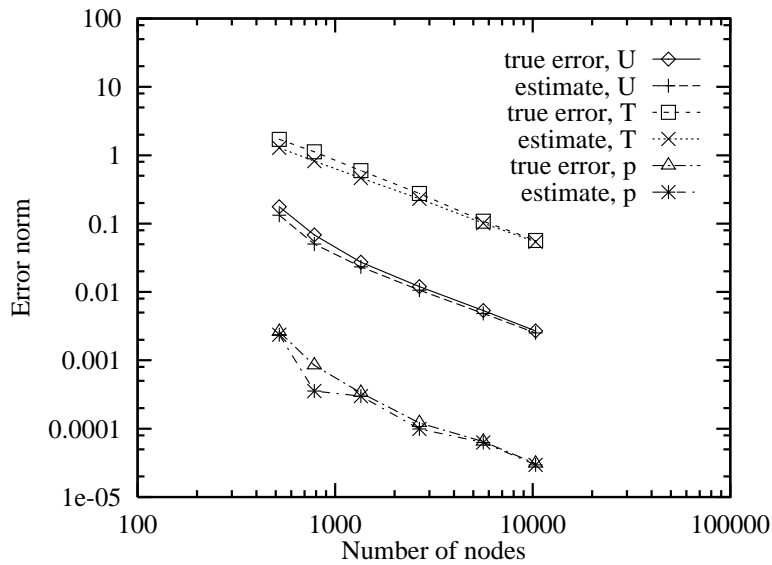


FIGURE 1 – Jet laminaire (CV-1) : Trajectoires des erreurs

substitue ces expressions de la solution manufacturée (SM) dans les équations de Navier-Stokes pour déterminer les termes source  $\mathbf{f}$  et  $q_s$ . La figure 1 montre l'évolution des erreurs avec le raffinement du maillage. L'erreur relative sur le maillage final est inférieure à 1%, une indication que la prédiction converge vers la solution exacte. Les erreurs diminuent au taux prévu par la théorie de sorte qu'on peut dire que le code est *Vérifié* pour ce genre d'écoulement. On peut aussi affirmer que l'estimateur d'erreurs est lui aussi vérifié et asymptotiquement exact puisqu'il converge vers l'erreur exacte.

La vérification de code par la MSM est un atout tant pour le développeur que pour

l'utilisateur. Pour le premier, elle sert à convaincre le dernier que l'implémentation du schéma de discrétisation est correcte. L'utilisateur s'en servira pour confirmer qu'il comprend et utilise correctement son outil de simulation. En pratique la MSM est si sensible à toute erreur affectant le taux de convergence que plusieurs personnes utilisent la MSM pour *debugger* leur programme. Une SM bien conçue activera tous les termes et dérivées apparaissant dans les EDPs pour garantir la rectitude du processus et qu'on observera un taux de convergence optimal et conforme à la théorie.

Le deuxième exemple (CV-2) imite l'écoulement incompressible turbulent dans un jet rond [23] :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{3}{8\pi} \frac{c}{\epsilon_0 x} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2} \\
 v &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{c}}{x} \frac{\eta - \frac{1}{4}\eta^3}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2} \\
 k &= 4 \times 10^{-3} \frac{e^{-\frac{\eta^3}{5}}}{x^2} + 10^{-4} \\
 \mu_T &= 5 \times 10^{-4} e^{-\frac{\eta^3}{5}} + 5 \times 10^{-5} \\
 \epsilon &= \frac{\rho C_\mu k^2}{\mu_T}
 \end{aligned}$$

ou :

$$\eta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sqrt{c} r}{\epsilon_0 x}$$

Le tableau 2 présente les trajectoires des erreurs sur l'énergie cinétique de la turbulence et la viscosité turbulente  $\mu_T$ . L'index d'efficacité de l'estimateur d'erreur  $\theta = \frac{\text{estimateur}}{\text{erreur vraie}}$  tend vers l'unité. Ces données indiquent que la solution numérique et l'estimateur convergent au même taux. Chaque cycle adaptatif améliore simultanément la précision de la solution et celle de l'estimateur. On peut donc affirmer que le code, l'estimateur et la stratégie adaptative sont vérifiés pour cette classe d'écoulements turbulents.

cycle	noeuds	erreur exacte $K$	erreur estimée $K$	efficacité (%) $K$	erreur exacte $\mu_t$	erreur estimée $\mu_t$	efficacité (%) $\mu_t$
0	348	$1.25 \times 10^0$	$1.17 \times 10^0$	94	$1.07 \times 10^{-4}$	$9.61 \times 10^{-5}$	89
1	658	$6.34 \times 10^{-1}$	$7.18 \times 10^{-1}$	113	$4.09 \times 10^{-5}$	$4.03 \times 10^{-5}$	98
2	1572	$2.57 \times 10^{-1}$	$2.56 \times 10^{-1}$	99	$1.19 \times 10^{-5}$	$1.02 \times 10^{-5}$	85
3	3693	$8.89 \times 10^{-2}$	$8.64 \times 10^{-2}$	97	$4.43 \times 10^{-6}$	$3.81 \times 10^{-6}$	86
4	9141	$3.16 \times 10^{-2}$	$3.08 \times 10^{-2}$	97	$1.59 \times 10^{-6}$	$1.47 \times 10^{-6}$	92

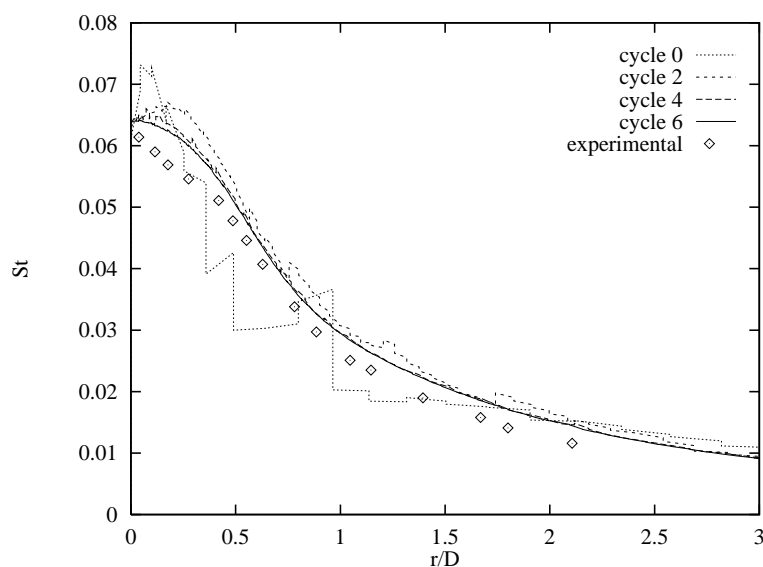
TABLE 2 – Jet turbulent (CV-2) : convergence de  $K$  and  $\mu_t$ 

## 6. Verification et Validation de simulations

Nous présentons maintenant des résultats sur quelques problèmes d'intérêt pratique. Le jet laminaire illustre les difficultés qui peuvent survenir lorsque l'on tente de valider une simulation avec des données expérimentales recueillies à d'autres fins que la validation. Nous poursuivons avec quelques simulations turbulentes. Nous avons choisi le modèle  $k - \epsilon$  standard avec fonctions de parois pour plusieurs raisons. D'abord, ce modèle est populaire et offert par tous les vendeurs. De plus, les fonctions de parois réduisent la tâche de calcul en évitant les maillages extrêmement fins requis près d'une parois par la plupart des modèles de turbulence à bas Reynolds. Finalement l'approche des lois de parois vit un regain d'intérêt pour les écoulements industriels complexes [24]. Il est donc raisonnable de s'en servir ici.

### Un jet laminaire impactant (VnV-1)

Cet exemple tiré de [6] correspond à une expérience rapportée dans [25]. La figure 2 démontre la convergence du nombre de Stanton ( $St$ ). Irrégulière sur le maillage initial, la distribution de  $St$  converge clairement avec l'adaptation du maillage indiquant que cette simulation est *Vérfifiée* et est une solution numériquement exacte des EDP. Cependant, on notera une sur-prédiction faible mais systématique des mesures. Scholtz explique avoir obtenu le nombre de Stanton de manière indirecte en utilisant une analogie entre transfert de masse et de chaleur pour convertir les mesures de transfert de masses en nombre de Stanton. Cette expérience date de 1970 et avait été conçue pour obtenir une caractérisation globale des échanges thermiques et non pour valider notre simulation. De fait, l'article de Scholtz ne contient aucune sur les conditions limites ou les incertitudes des mesures. Néanmoins on peut dire

FIGURE 2 – Je laminaire ( $V_nV-1$ ) : Stanton

que la simulation est validée d'une certaine manière car les prédictions présentent un accord raisonnable avec les mesures.

### Un jet turbulent impactant ( $V_nV-2$ )

Cette configuration, tirée de [26], est un bon exemple d'une simulation vérifiée mais non validée. On sait depuis longtemps que le modèle  $k-\epsilon$  avec lois de parois est un piètre choix pour ce problème. Mais c'est un excellent exemple de bonnes pratiques CFD garantissant la rigueur des opérations de vérification et de validation (une invalidation dans ce cas précis)

La figure 3 est typique des prédictions de 'k' qui sont vérifiées car elles sont convergées. Le maillage final, montré à la figure 4, présente un raffinement prononcé dans plusieurs régions. Ces prédictions vérifiées sont non validées. En effet, on peut constater un écart d'un facteur 8 entre prédictions et mesures de l'énergie cinétique turbulente. On consultera [6] pour plus de détails.

L'étape de vérification est essentielle pour deux raisons : s'assurer que des erreurs numériques ne faussent pas la comparaison avec les mesures, et par le fait même garantir que les différences sont attribuables exclusivement aux faiblesses du modèle mathématique. Cet exemple frappant met en évidence l'importance que l'on doit accorder à la vérification du code et de toute simulation avant de tirer des conclusions

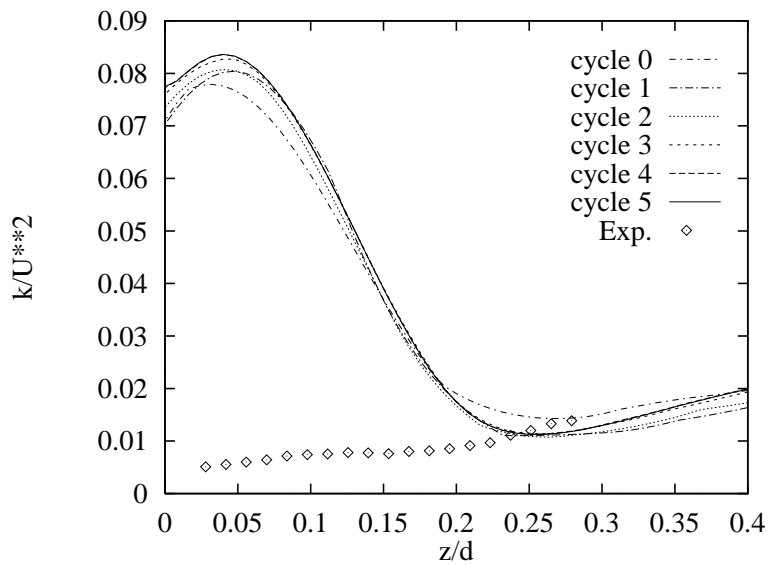


FIGURE 3 – Jet turbulent impactant ( $\mathbf{VnV-2}$ ) :  $k/U^2$  at  $r/d = 0.5$

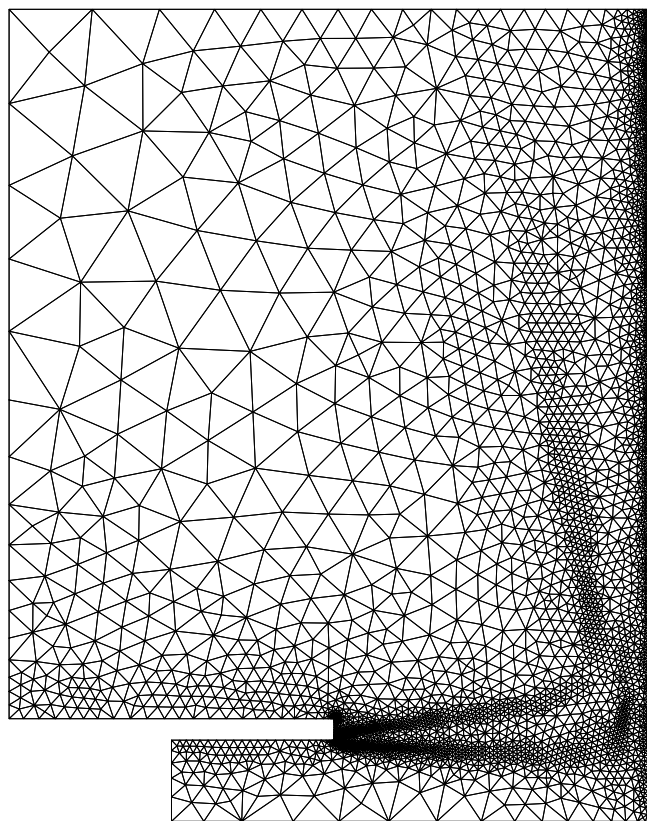


FIGURE 4 – Jet turbulent impactant ( $\mathbf{VnV-2}$ ) maillage final

sur la validité du modèle.

### Écoulement Turbulent dans un diffuseur (VnV-3)

Cet écoulement dans un diffuseur conique de  $30^\circ$  illustre à merveille les dangers de procéder à un exercice de validation sur des prédictions non-vérifiées. Les mesures sont tirées de Chaturvedi [27]. La figure 5 présente une étude de convergence de la

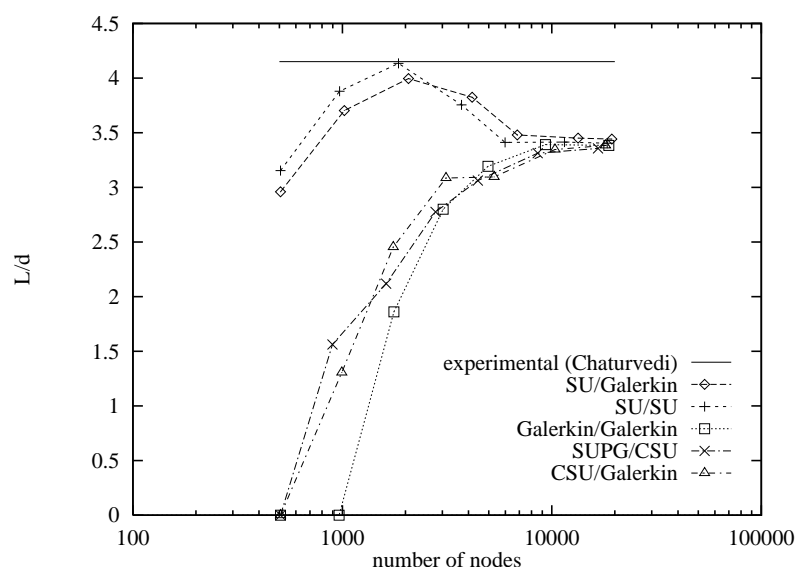


FIGURE 5 – Diffuseur à  $30^\circ$  (VnV-3) : longueur de la recirculation

longueur de la zone de recirculation obtenue avec différents schémas de discrétisation. Le trait horizontal représente la longueur mesurée. On observe des différences importantes entre les diverses prédictions sur les maillages les plus grossiers : certains schémas prédisent un zone de recirculation et d'autres pas. De plus, la technique SU, reconnue pour sa diffusion excessive donne l'illusion d'une vérification quasi-parfaite sur son troisième maillage. Cependant en poursuivant les cycles d'adaptation force est de constater que cet accord n'est qu'une illusion. En fait, tous les schémas convergent vers la même mauvaise valeur de 3,5. La prédiction est donc vérifiée car on n'observe aucun changement notable entre les prédictions des trois derniers maillages. Cependant, bien que vérifiées, ces prédictions sont évidemment non-validées.

Le cas du schéma SU présente une leçon importante. La fausse validation observée au cycle 3 donnera, à l'analyste un faux sentiment de confiance dans son outil CFD.

L'étude de raffinement de maillage n'est donc pas un luxe, mais bien un ingrédient essentiel au bon usage des technologies de simulation.

### Écoulement turbulent dans une expansion soudaine d'un tuyau (VnV-4)

Jusqu'à présent les résultats furent plutôt décevants. Pourtant, il leur arrive parfois d'être remarquablement bons. C'est le cas de l'expansion soudaine dans un tuyau telle que celle de Chaturvedi [27]. Il s'agit en fait d'un diffuseur avec un angle de  $90^\circ$ . On a effectué les simulations avec les mêmes schémas stabilisés utilisés pour le diffuseur de  $30^\circ$  [11]. La figure 6 compare les prédictions de la longueur de la zone recirculation. La convergence avec le raffinement du maillage est évidente. Les prédictions sont donc vérifiées et validées (L'accord entre prédictions et mesures en témoigne)

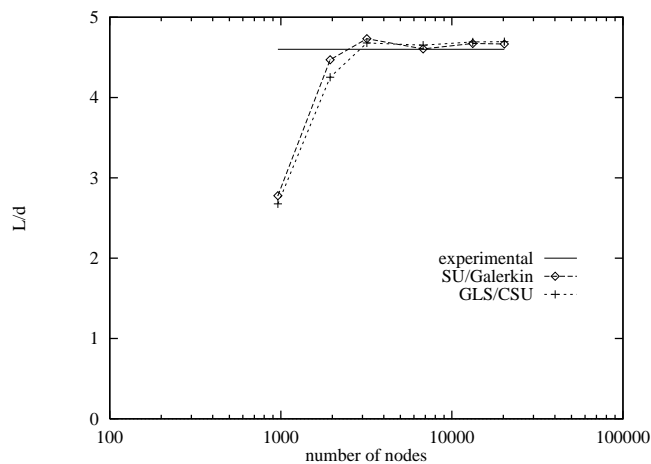


FIGURE 6 – Expansion soudaine (VnV-4) : longueur de la recirculation

Alors que les prédictions pour l'expansion sont validées, celle du diffuseur ne le sont pas. Cela illustre l'importance d'effectuer une vérification complète des prédictions avant de procéder à leur validation, et ce même si le code a déjà été validé sur un cas similaire. Cette stratégie garantit que le modèle mathématique de l'écoulement sera la seule cause possible en cas d'échec de l'étape de validation.

## 7. Analyse de sensibilité et d'incertitude

Il existe deux significations au mot *sensibilité*. La première fait référence au gradient d'une fonction objectif par rapport aux paramètres de design. L'autre désigne les dérivées partielles de la solution de l'écoulement par rapport à des paramètres contrôlant l'écoulement. En plus du design optimal, on trouve, pour ces *sensibilités d'écoulement* des applications autres que l'optimisation : l'identification des paramètres clé régissant un écoulement, l'évaluation rapide de solutions d'écoulements voisins, et l'analyse d'incertitude. [12].

Il existe plusieurs façons de calculer les sensibilités d'écoulement : différences finies, différentiation automatique et la méthode de l'équation des sensibilités (MES). Nous avons opté pour cette dernière et pour simplifier les développements nous présentons la MES pour dans le contexte d'un écoulements laminaire incompressible. Sa généralisation aux écoulements compressibles ou turbulents de type RANS est simple. Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible sont notre point de départ.

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

On obtient les équations des sensibilités continues (ESC) en appliquant le théorème des fonctions implicites aux équations précédentes pour un paramètre générique  $a$ . Le champs de vitesse  $\mathbf{u}$  est donc une fonction de l'espace et du paramètre  $a$ , que l'on note  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; a)$ . On définit les dérivées partielles  $s_u^a = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a}$ ,  $s_p^a = \frac{\partial p}{\partial a}$ . On identifie la dérivée des autres quantités par (' (i.e.  $\mu'_a = \frac{d\mu}{da}$ ). Après quelques manipulations on aboutit au système d'EDP suivant :

$$\begin{aligned} \rho'_a \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho s_u^a \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_u^a &= -\nabla s_p^a \\ &+ \nabla \cdot [\mu'_a(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ \mu_a(\nabla s_u^a + (\nabla s_u^a)^T)] \quad (5)$$

$$\nabla \cdot s_u^a = 0$$

Ces équations sont générales et valables pour tout paramètre  $a$ . On fait l'hypothèse que toutes les quantités (écoulement, propriétés physiques, coefficients dans les lois de comportement etc..) dépendent de l'état de l'écoulement et de  $a$ . On inclut donc toutes les dépendances possibles dans la formulation. On note que le système d'EDP précédent est linéaire. On obtient les conditions limites de la même façon. On obtiendra les équations des sensibilité à l'ordre deux en différentiant les équations précédentes par rapport à un paramètre  $b$  [voir 28].

On peut concevoir l'incertitude comme une perturbation de l'écoulement au voisinage de son état nominal. On suppose que les paramètres sont statistiquement indépendants, aléatoires, obéissent à une distribution normale autour de la moyenne, et que l'écart type est petit par rapport à la moyenne. La cascade des incertitudes d'input au travers du code CFD se fait de la même façon que pour un montage expérimental [29]. Par exemple, supposons que les paramètres d'intérêt pour la simulation ont une valeur nominale (moyenne de  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ) et un écart type de  $\sigma_a = (\sigma_{a_1}, \dots, \sigma_{a_n})$ . On peut estimer la moyenne  $\bar{\mathbf{F}}$ , et l'écart type  $\sigma_F$  d'une fonction output  $F$  par la méthode des moments :

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{a}}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial a_i \partial a_j}}_{s_F^{a_i a_j}} \sigma_{a_i} \sigma_{a_j} \quad (6)$$

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^n \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial a_i}}_{s_F^{a_i}} \sigma_{a_i} \right)^2 + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \left( \underbrace{\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial a_i \partial a_j}}_{s_F^{a_i a_j}} \sigma_{a_i} \sigma_{a_j} \right)^2 \quad (7)$$

Les systèmes d'équations pour les sensibilités sont toujours linéaires. Les variables de l'écoulement (et leur sensibilités d'ordre un, le cas échéant) apparaissent comme des coefficients dans les équations des sensibilités. On peut donc résoudre l'ensemble des systèmes d'EDP en trois étapes : (1) résoudre les équations de l'écoulement, (2) résoudre les équations des sensibilités d'ordre un, (3) résoudre les équations des sensibilités d'ordre deux. Les équations des sensibilités ont le même opérateur : celui issu de la linéarisation de Newton des équations de l'écoulement. Si on résout aussi l'écoulement par la méthode de Newton, la matrice de la dernière itération donne directement les facteurs L et U de la matrice des sensibilités de sorte qu'une fois l'écoulement obtenu, on peut obtenir les sensibilités à faible coût en ré-

solvant des systèmes triangulaires.

## 8. Verification, Validation et Incertitudes

Nous présentons maintenant un exemple complet de Vérification, Validation et d'analyse d'incertitudes de notre code RANS que nous appliquons à l'expérience effectuée en soufflerie par Martnuzzi [30] : l'air s'écoule autour d'un obstacle carré placé à proximité de la plaque sur laquelle se développe l'écoulement turbulent à un nombre de Reynolds de 22,000 basé sur la longueur  $D$  de l'arête du carré. Pour une garde au sol de  $S \leq S_0 = 0.25$  l'écoulement moyen est stationnaire. La garde au sol  $s$  est notre paramètre d'intérêt. Nous considérons des perturbations  $\delta s$  négatives (vers le bas) autour de la valeur nominale  $s_0$  pour garantir que l'écoulement pour  $s = s_0 - \delta s$  soit lui aussi stationnaire.

L'adaptation de maillage est pilotée par des estimations d'erreur calculées pour toutes les variables de l'écoulement et leurs sensibilités. Les résultats sont convergés. Après 8 cycles d'adaptation le maillage contient 556,567 noeuds. La figure 7 montre le maillage 6 à 220,000 points. Les zones de raffinement prononcé sont clairement visibles. Elles ont capturé l'essence de l'écoulement : la décélération au bord d'attaque de la plaque, les couches limites le long de la plaque et au plafond de la soufflerie, la couche cisailée émanant du bord d'attaque supérieur de l'obstacle et le jet pariétal induit par l'écoulement d'air passant sous l'obstacle. La convergence des

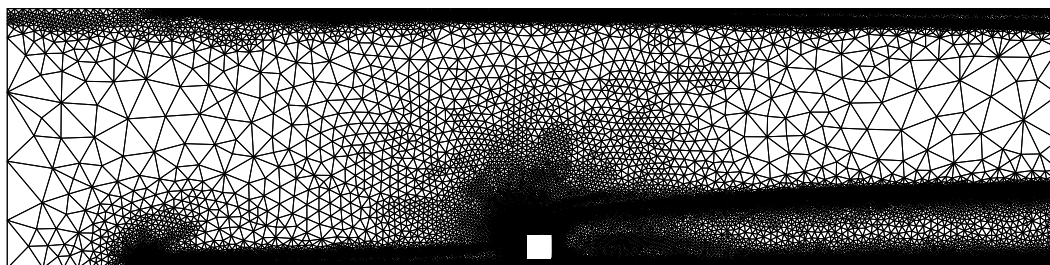
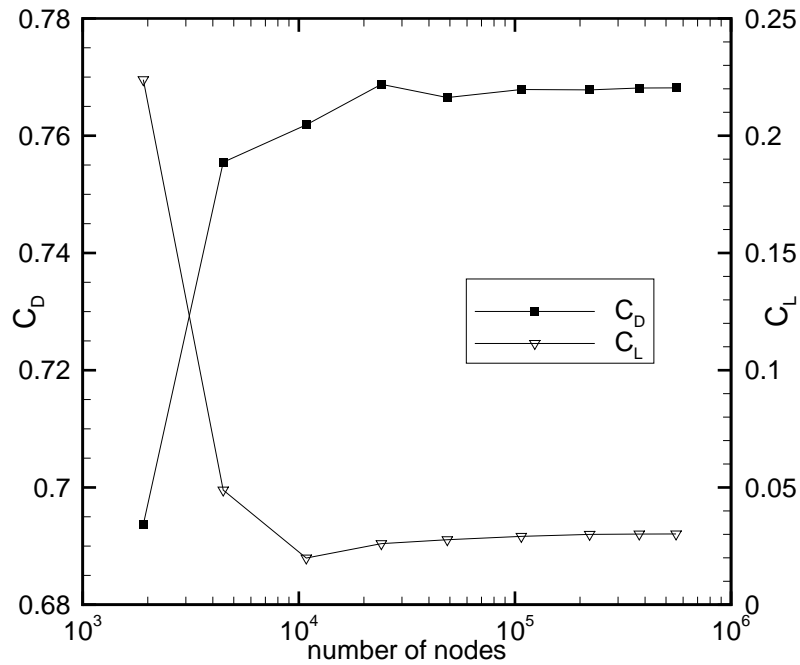


FIGURE 7 – VnV-5 : Maillages après 6 cycles d'adaptation

coefficients de trainée et de portance est évidente sur la figure 8. La figure 9 montre

FIGURE 8 – **VnV-5** : Convergence de  $C_L$  et  $C_D$ 

la convergence de la distributions du coefficient de friction  $c_f$  et de sa sensibilité par rapport à  $s$  le long de la plaque. Le premier pic de  $c_f$  se produit près du bord d'attaque de la plaque ( $x/s = -15$ ). Le second pic se trouve légèrement en amont de l'obstacle là où l'air est forcé à passer sous le carré. La grandeur de la sensibilité à cet endroit indique que de petites perturbation de  $s$  auront un effet important sur  $c_f$  (voir figure 9(b)). La valeur quasi nulle en amont du carré indique que les variations de  $S$  n'ont aucun effet sur l'écoulement à cet endroit. La convergence avec l'adaptation du maillage nous indique que la simulation est vérifiée. Puisque la simulation est vérifiée, le niveau d'accord avec les mesures expérimentales nous donnera une bonne idée de la fidélité du modèle de turbulence. À la figure 10 le profil transversal du tenseur de Reynolds  $-\overline{u'v'}$  at  $x/D = 1$  est remarquablement proches des mesures, d'autant plus que  $-\overline{u'v'} = -\nu_T(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$  est moins précise que  $u$  au même endroit. Néanmoins il y a des différence notables entre prédictions et mesures qui indiquent que le modèle est incapables de reproduire certains détails fins de l'écoulement. Ces prédictions seront validées ou invalidées dépendamment du niveau de désaccord que l'on est prêt à tolérer.

La figure 11 présente les lignes de courant déduites du champ de vitesse au voi-

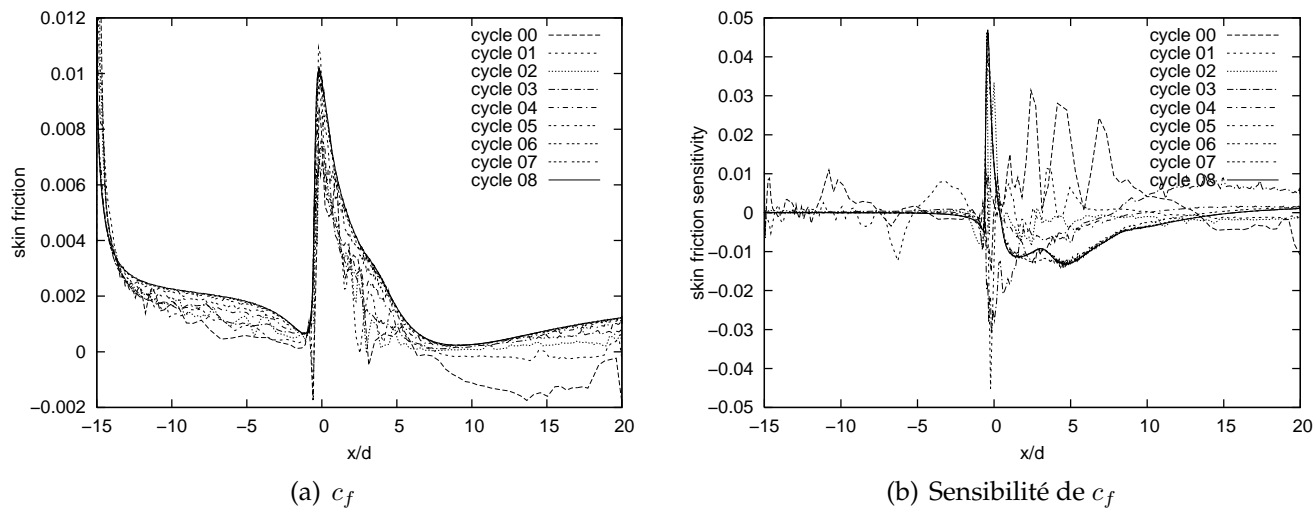


FIGURE 9 – **VnV-5** : Convergence du coefficient de friction et de sa sensibilité

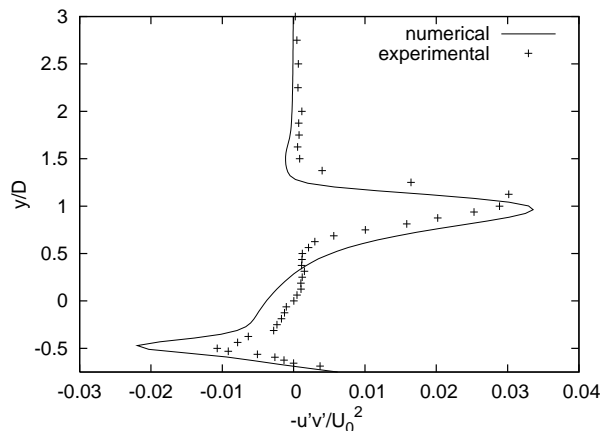


FIGURE 10 – **VnV-5** : Validation du tenseur de Reynolds à  $x = 1$

sinage de l'obstacle. Elle montre aussi les lignes de courant des sensibilités de la vitesse par rapport à la garde au sol  $s$ . Elles montrent clairement que l'air contourne le carré en s'écoulant vers le haut le long de la face amont de l'obstacle pour ensuite être dévié vers l'aval et se faire entrainer par l'écoulement principal.

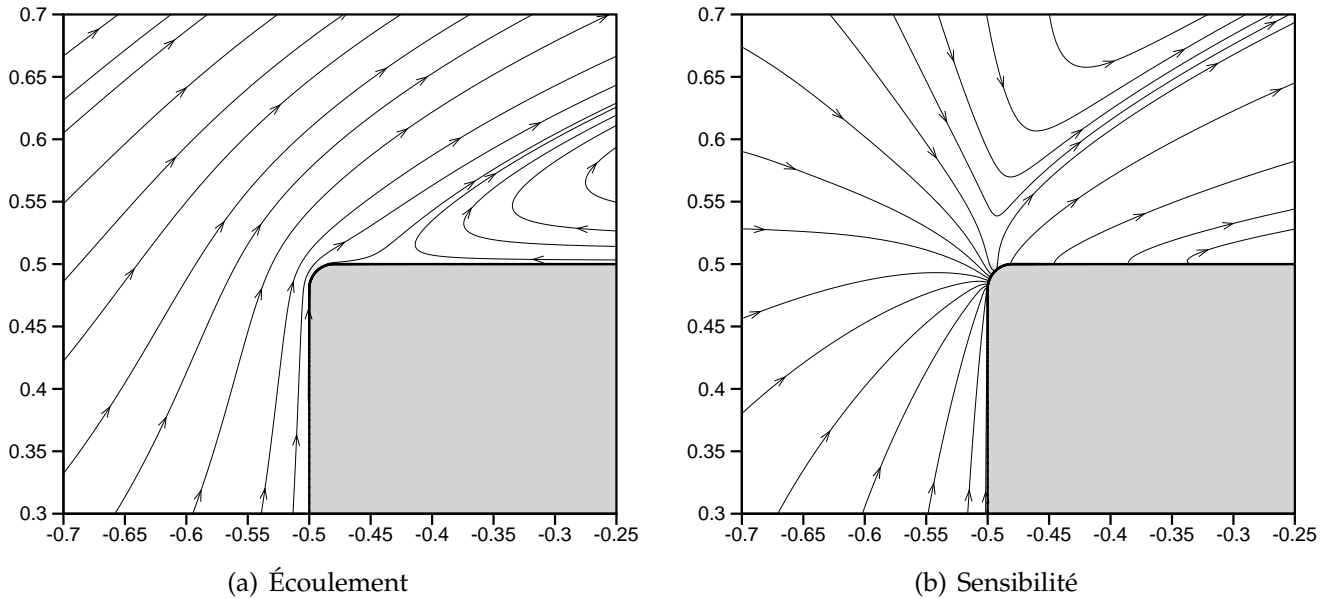


FIGURE 11 – **VnV-5** : Lignes de courant et leurs sensibilités près du coin

Sur la figure 11(b), certaines des lignes de courant des sensibilités ont une intersection avec la paroi du carré. Lorsque le carré est abaissé, le fluide qui était immobilisé par les effets visqueux à la paroi se trouve maintenant libre de suivre l'écoulement. Ce phénomène de transpiration des sensibilités est typique des sensibilités de forme induite par un paramètre de forme. Ces lignes de courant indiquent que :

1. Le fluide près de la face amont de l'obstacle pourra se joindre plus aisément au courant principal lorsque l'obstacle sera abaissé. Les lignes de courant sont orientées diagonalement vers le haut comme le confirment les lignes de courant des sensibilités de la vitesse.
2. Celles qui pointent vers le bas et se terminent sur l'arrondi du coin nous indiquent que : abaisser le bloc permet au fluide qui aurait été bloqué, de s'insérer dans l'écoulement principal à une hauteur moindre. Le fluide qui se trouvait au ras de la surface du coin dans la configuration nominale, n'a plus à faire un détour aussi long pour contourner l'obstacle lorsqu'il est plus bas. Les vecteurs

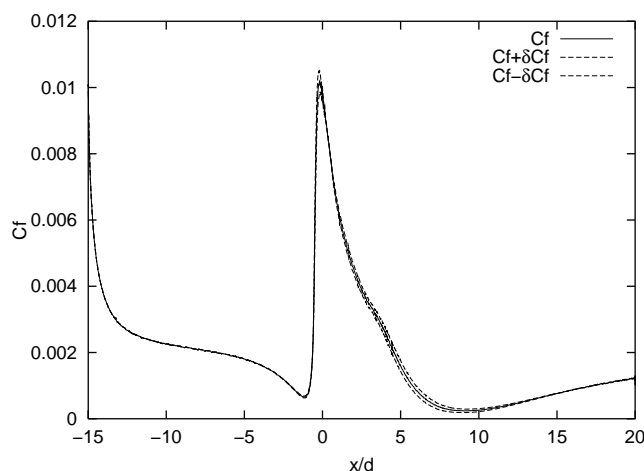


FIGURE 12 – **VnV-5** : incertitude sur  $C_f$  du à celle sur la garde au sol  $s$

vitesse seront alors à un angle plus faible par rapport à l'horizontale. L'allure des lignes de courant des sensibilités qui pointent vers le bas le confirment.

3. Abaisser l'obstacle permettra à du fluide qui adhérait sur la face supérieure de l'obstacle d'être entraîné plus rapidement dans l'écoulement externe. Les lignes de courant émanant de cette frontière nous rappellent que les vecteurs vitesse seront orienté diagonalement vers le haut et vers l'aval.

Nous procédons maintenant à la cascade de l'incertitude  $\delta s$  au travers du code CFD pour déterminer un interval d'incertitude sur le coefficient de friction le long de la plaque.

$$\delta c_f = \pm \frac{\partial c_f}{\partial S} |\delta S|$$

La figure 12 présente la distribution du coefficient de friction et son intervalle d'incertitude lorsque  $\delta s = 5\%$ . Cet intervalle est petit mais aisément détectable.

## 9. Conclusion

La procédure de vérification et validation proposée est une approche rigoureuse et systématique pour améliorer la précision et la fiabilité des simulations CFD. Elle est générique. Tout problème formulé sous la forme d'EDP s'y prête (élasticité, dynamique des structures, hydrologie, conduction de la chaleur etc). La méthodologie s'applique à toute technique numérique dont l'erreur peut s'exprimer sous la

forme  $e = O(h^p)$ . La méthodologie procède en trois étapes : (1) Vérification du code, (2) Vérification d'une simulation, et (3) Validation de la simulation

La vérification de code garantit que le solveur est implémenté correctement et que sa précision est conforme à la théorie. La méthode des solutions manufacturées est un outil très puissant permettant de construire des solutions suffisamment complexes pour garantir que tous les termes des EDP auront été testés. L'adaptation de maille simplifie cette tâche en automatisant la génération des maillages, une tâche parfois fort délicate à accomplir, surtout pour des géométries complexes.

La vérification de simulation diffère de la vérification de code en ce que la solution exacte n'est pas disponible. On s'en remet alors à des estimateurs d'erreur et au développement d'intervalles de confiance des estimateurs. Ici aussi, l'adaptation de maillage simplifie la tâche de l'utilisateur. Finalement la validation procède en comparant des solutions vérifiées avec des mesures que qualité tirée d'une expérimentation conçue pour la validation.

Grâce à l'adaptivité, la génération de maillage n'est plus un empêchement à la vérification. L'estimateur utilisé semble suffisamment fiable pour quantifier les erreurs et garantir que les erreurs sont assez petites pour que l'opération de vérification soit effectuée en toute confiance. Cependant, il faut noter que la vérification ne peut pas se substituer à la validation. Elle se borne à en simplifier le processus.

La méthode de l'équation des sensibilités s'est avérée un outil de choix pour accroître la compréhension des écoulements complexes. Elle permet aussi d'identifier les paramètres clé contrôlant l'écoulement et de les classer par ordre d'importance. Finalement, elle permet d'effectuer la cascade des incertitudes d'input au travers du code pour obtenir une estimation des incertitudes des outputs.

## Références

- [1] M Nallasamy. Turbulence models and their applications to the predictions of internal flows. *Computers and Fluids*, 15 :151–194, 1987.
- [2] P.J. Roache. *Verification and Validation in computational Science and Engineering*. Hermosa publishers, Albuquerque, NM, 1998.
- [3] J.-F. Hétu and D. H. Pelletier. Fast, adaptive finite element scheme for viscous incompressible flows. *AIAA Journal*, 30(11) :2677–2682, 1992.

- [4] F. Ilinca and D. Pelletier. Positivity preservation and adaptive solution for the  $k - \epsilon$  model of turbulence. *AIAA Journal*, 36(1) :44–51, January 1998.
- [5] F. Ilinca, D. Pelletier, and A. Garon. An adaptive finite element method for a two-equation turbulence model in wall-bounded flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 24 :101–120, 1997.
- [6] E. Turgeon and D. Pelletier. Verification and validation of adaptive finite element method for impingement heat transfer. *AIAA Journal of thermophysics and Heat Transfer*, 15 :284–292, July-September 2001.
- [7] F. Ilinca, D. Pelletier, and L. Ignat. Adaptive finite element solution of compressible turbulent flows. *AIAA Journal*, 36(12) :2187–2194, December 1998.
- [8] L. Ignat, D. Pelletier, and F. Ilinca. Adaptive computations of turbulent forced convection. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 34 :847–871, 1998.
- [9] D. Pelletier, J.-F. Héту, and F. Ilinca. Adaptive finite element method for thermal flows. *AIAA Journal*, 32(4) :741–747, April 1994.
- [10] D. Pelletier, L. Ignat, and F. Ilinca. Adaptive finite element method for conjugate heat transfer. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 32(3) :267–287, 1997.
- [11] E. Turgeon, D. Pelletier, and L. Ignat. Effects of adaptivity on finite element schemes for turbulent hetransfer and flow predictions. *Numrical Heat Transfer, Part A*, 38 :847–868, 2000.
- [12] D. Pelletier, S. Etienne, and A. Hay. The sensitivity equation method in fluid mechanics. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(2) :31–62, 2008.
- [13] D. Pelletier, E. Turgeon, D. Lacasse, and J. Borggaard. Adaptivity, sensitivity and uncertainty : Towards standards in cfd. *AIAA Journal*, 41(10) :1925–1932, October 2003.
- [14] J. Cori, S. Etienne, A. Hay, and D. Pelletier. Design method for low Reynolds number laminar airfoils using nurbs an a sensitivity equation method. In *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada, 5–8 January 2007. AIAA Paper 2007-1129.

- [15] AIAA. Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations. Technical Report AIAA-G-077-1998, America Institute of Aeronautics and Astronautics, June 1998.
- [16] F. G. Blottner. Accurate navier-stokes results for the hypersonic flow over a spherical nosetip. *AIAA Journal of Spacecraft and Rockets*, 27(2) :113–122, March-April 1990.
- [17] H. W. Coleman. Uncertainty considerations in validating cfd codes with experimental data transfer. In *AIAA 27th Fluid Dynamics Conference*, New Orleans, Louisiana, 17–20 June 1996. AIAA Paper 96-2027.
- [18] W. L. Oberkampf, F. G. Blottner, and D. P. Aeschliman. Methodology for Computational Fluid Dynamics Code Verification/Validation. In *AIAA 26th Fluid Dynamics Conference*, AIAA Paper 95-2226, San Diego, California, June 19-22 1995.
- [19] M. Crouzeix and P. A. Raviart. Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *R.A.I.R.O.*, 3 :77–104, 1973.
- [20] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, 72(2) :449–466, 1987.
- [21] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The super-convergent patch recovery and a *a posteriori* error estimates. part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :1331–1364, 1992.
- [22] E. Turgeon, D. Pelletier, and F. Ilinca. Compressible heat transfer by an adaptive finite element method. *Internatinal Journal of Thermal Sciences*, 41 :721–736, 2002.
- [23] É. Turgeon. Application d’une méthode d’éléments finis adaptative à des écoulements axisymétriques. Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 1997.
- [24] H. Grotjans and F. Menter. Wall functions for general application cfd codes. In *ECOMAS95*, 17–20 June 1995.

- 
- [25] M. T. Scholtz and O. Trass. Mass transfer in a non uniform impinging jet, part 1 & 2. *AIChE Journal*, 16 :82–96, 1970.
- [26] J. F. Brison and G. Brun. Round normally impinging turbulent jets. In *15th Meeting of IAHR Working Group on Refined Flow Modeling, ECL, Lyon, 1991*.
- [27] M. C. Chaturvedi. Flow characteristics of axisymmetric expansions. *Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 89 :61–92, 1963.
- [28] J.-N. Mahieu, S. Étienne, D. Pelletier, and J. Borggaard. Second-order sensitivity equation method for laminar flow. *International Journal of Computational Fluid dynamics*, 19(2) :143–157, February 2005.
- [29] H. W. Coleman and W. G. Steele. *Experimentation and Uncertainty Analysis for engineers*. Wiley Inter-Science, 2nd edition, 1999.
- [30] K. Wu and R. Martinuzzi. Experimental study of the turbulent wake flow behind a square cylinder near a wall. In *ASME Fluids Engineering Division, Vancouver, B.C., June 22-26 1997*. No. FEDSM97-3151.

# Adaptive finite elements with large aspect ratio

Marco Picasso,

*Institut d'Analyse et Calcul Scientifique  
Ecole Polytechnique Federale de Lausanne  
EPFL SB IACS ASN, MA C2 632, Batiment MA, Station 8  
CH-1015 Lausanne, Suisse*

## **Résumé**

A posteriori error estimates for finite elements with large aspect ratio will be presented for elliptic, parabolic and some hyperbolic problems. Numerical results on uniform and adapted meshes will confirm the theoretical predictions.

*Mots clés: Error estimation, large aspect ratio*

# L'héritage étudiant de Michel

Roger Pierre,

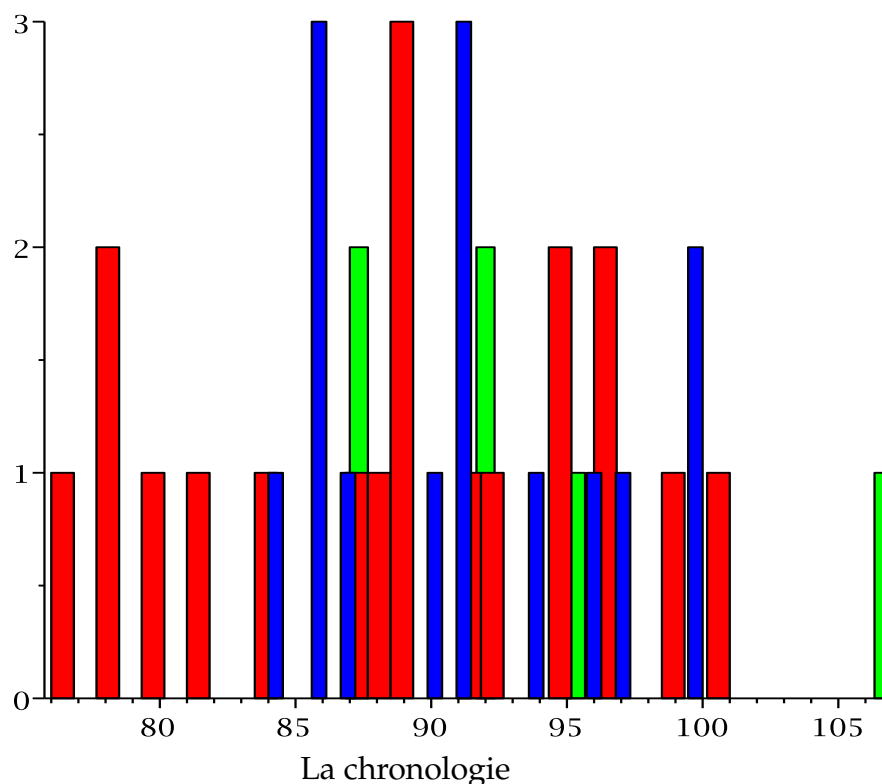
*Université Laval*

## Résumé

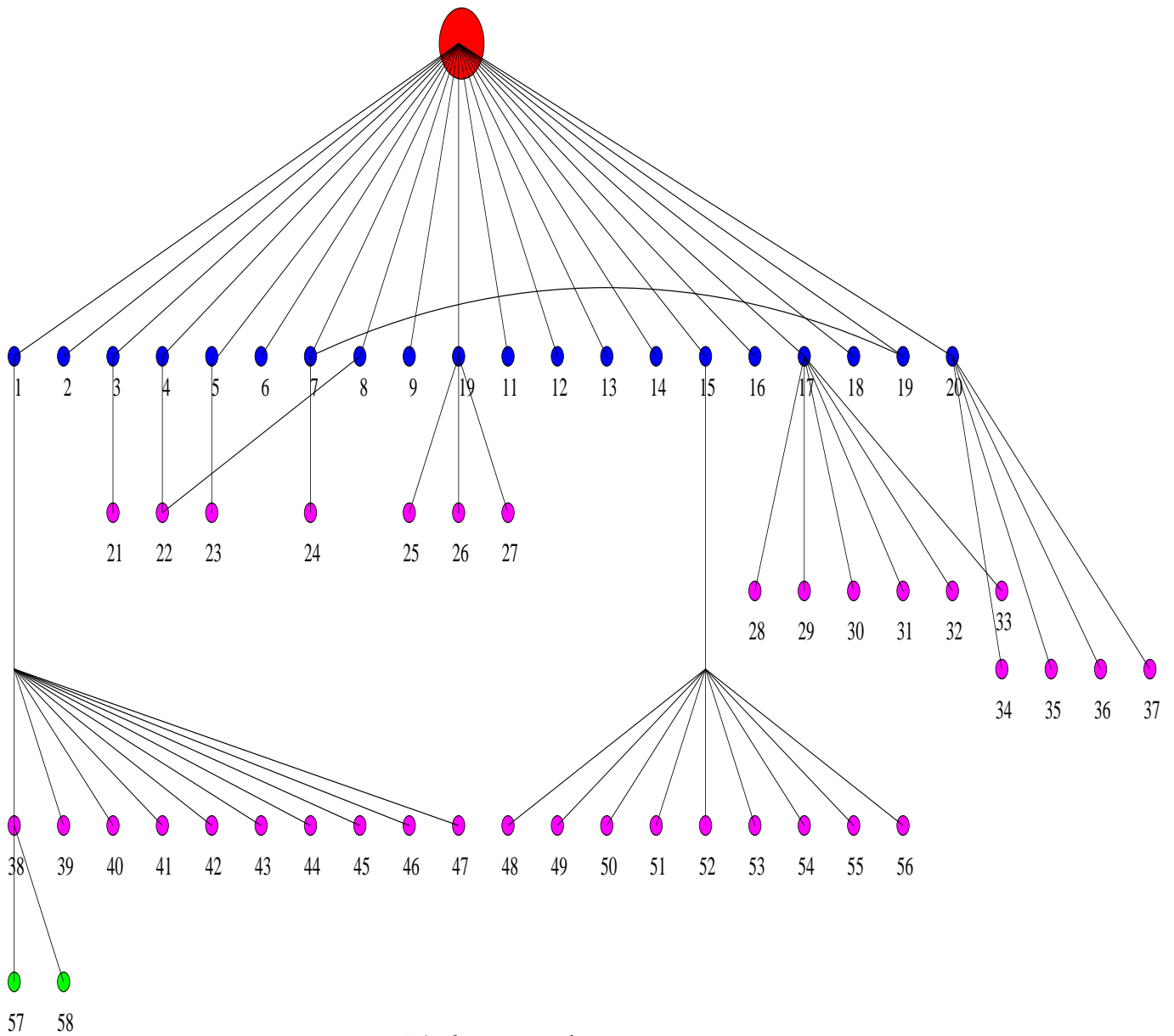
Comme le démontre cette rencontre de trois jours, la carrière scientifique de Michel Fortin fut très fructueuse. En particulier, une visite du site [genealogy.math.ndsu.nodak.edu](http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu), fournirait des informations intéressantes sur son héritage étudiant. Dans cet exposé, nous montrerons que ces informations sont beaucoup trop sommaires et nous présenterons les résultats d'une étude archéologique récente. Le reste de la journée convaincra les participants que cet héritage est non seulement quantitativement important mais, également, qualitativement très riche.

## 1. Perspective historique

Michel a dirigé les travaux de nombreux étudiants de maîtrise (19, en rouge) et doctorat (14, en bleu). En plus, il a codirigé, plus ou moins directement les travaux de plusieurs autres étudiants, que ce soit des étudiants de génie ou des étudiants inscrits dans d'autres institutions (6, en vert).



En accord avec les règles du *Math genealogy project*, nous présentons une généalogie des doctorants.



L'arbre généalogique

Les noms					
	1ère génération		2ième génération		3ième génération
1	A. Fortin [20]	21	Y. Loukili	57	A. Ramadane
2	R. Aboulaich [21]	22	H. Brahmi	58	H. Souhail
3	D. Esselaoui [22]	23	L. Laayouni		
4	H. Manouzi [23]	24	F. Youbissi		
5	A. Souissi [25]	25	C. Olah		
6	S. Boivin [26]	26	P. Tremblay		
7	R. Guénette [27]	27	O. Rousseau		
8	M. Farhloul [28]	28	A. Chaiea		
9	S. El Hajji [29]	29	B. Achcab		
10	G. Yang [30]	30	A. El Mahdad		
11	Y. Bourgault [31]	31	N. Touhami		
12	R. Assila [32]	32	M. Gabbouhy		
13	G. Martin [33]	33	A. Bergam		
14	A. Serghini [34]	34	S. Alonso		
15	A. Soulaïmani [35]	35	J. Doucet		
16	Z. Mghazli [36]	36	D. Vidal		
17	G. Leborgne [37]	37	S. Navaee-Ardeh		
18	P. Fleury [38]	38	A. Zine		
19	A. El Maliki [39]	39	A. Zaki		
20	F. Bertrand [39]	40	M. Jardak		
		41	A. Béliveau		
		42	S. Dufour		
		43	D. N'dri		
		44	A. Bagayogo		
		45	Y. Belhammadia		
		46	K. Benmoussa		
		47	A. Kane		
		48	N. ElKadri		
		49	N. BenSalah		
		50	A. Rebaine		
		51	R. Ata		
		52	A. Ben Haj Ali		
		53	R. Kechroud		
		54	J.M. Zokagoa		
		55	A. Fahsi		
		56	M. Toure		

## 2. Perspective scientifique

La vérification des dates de publication des mémoires et thèses montre bien que la formation des thésards a fait partie intégrante de l'activité de recherche de Michel. Il est intéressant d'étudier l'influence de son évolution académique sur le choix des projets de recherche proposés.

### 1 Analyse Numérique

- Optimisation et problèmes de point selle.
  - De 72 à 80 : [1], [2], [3], [4]
- Éléments finis mixtes.
  - De 80 à 89 : [20], [23], [6], [36].
  - De 90 à 99 : [28], [34].
- Algèbre linéaire numérique
  - De 80 à 89 : [21], [8], [10].
  - De 90 à 99 : [12], [15].
  - De 00 à  $\infty$  : [39].
- Problèmes instationnaires.
  - De 80 à 89 : [9], [11], [35].
  - De 90 à 99 : [26], [31], [33].
- Algorithmique.
  - De 80 à  $\infty$  : parallélisme [17], adaptation de maillage [19].

### 2 Applications

- Mécanique des fluides incompressibles newtoniens.
  - De 80 à 89 : [9], [11], [20], [23], [25], [35].
  - De 90 à 00 : [14], [16], [18], [26], [29], [31], [33].
- Mécanique des fluides incompressibles non-newtoniens.
  - De 80 à 89 : [22].
  - De 90 à 99 : [27], [37], [38], [39].
- Semi-conducteurs.
  - De 90 à 99 : [30], [32].

### 3. Perspective sociologique

Dans cette troisième section, nous allons nous intéresser aux étudiants eux-mêmes : qui étaient-ils, d'où venaient-ils, où sont-ils allés après leur passage à l'université Laval.

Notons d'abord que sur les 36 thésards de Michel 7 sont des femmes.

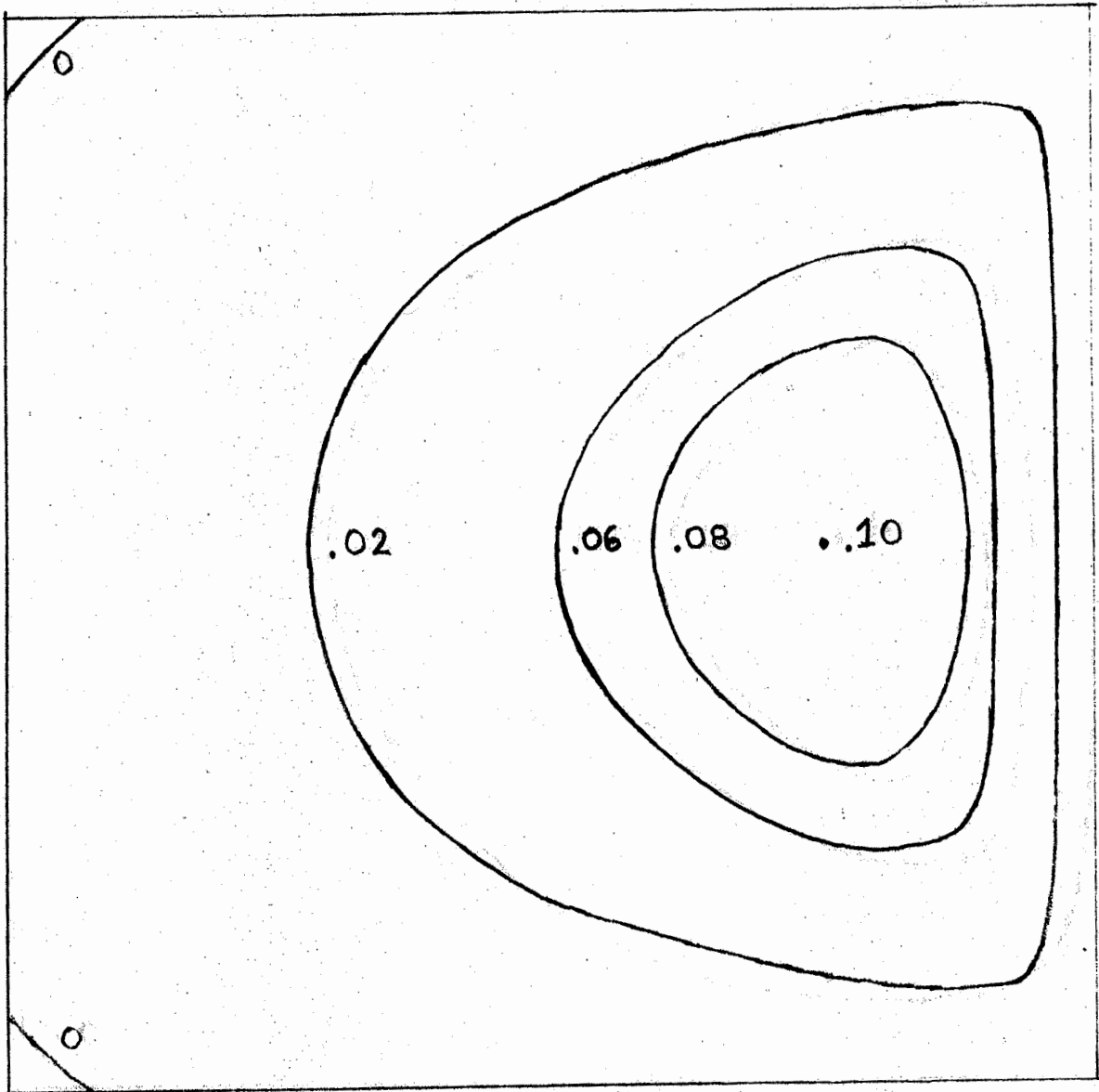
Sur le plan géographique : le groupe des 36 thésards est constitué de 15 québécois, 2 français, 12 maghrébins, 1 chinois, 1 libanais et trois représentants d'Afrique noire.

Sans surprise, la plupart de ces thésards sont devenus professeurs. Plusieurs travaillent dans des collèges au Québec et probablement ailleurs. Parmi les doctorants, six sont retournés au Maroc dont deux à Kénitra et quatre à Rabat ; trois sont professeurs à Laval ; un à l'École Polytechnique de Montréal ; un à l'école de technologie supérieure ; deux à l'Université Laurentienne ; un à l'Université du Québec à Chicoutimi et un à l'Université de Moncton. À l'étranger, un travaille à Hong Kong et un à Clermont-Ferrand.

### 4. Un clin d'oeil technologique

Je termine cette courte retrospective en vous présentant un coup d'oeil amusé sur les progrès technologiques qu'ont connus notre domaine de recherche depuis les débuts de la carrière de Michel. Aux fins de comparaison, j'ai choisi l'écoulement incompressible dans une cavité carrée unitaire. Il ne s'agit pas ici de comparer la précision des résultats mais bien plutôt les moyens technologiques disponibles pour les présenter. On passe d'un tracé à main levée à une représentation tridimensionnelle assez sophistiquée.

Figure 1.1 : Problème de la cavité  
Fonction de courant  
 $v = 1$  .



Michel Fortin, 1972

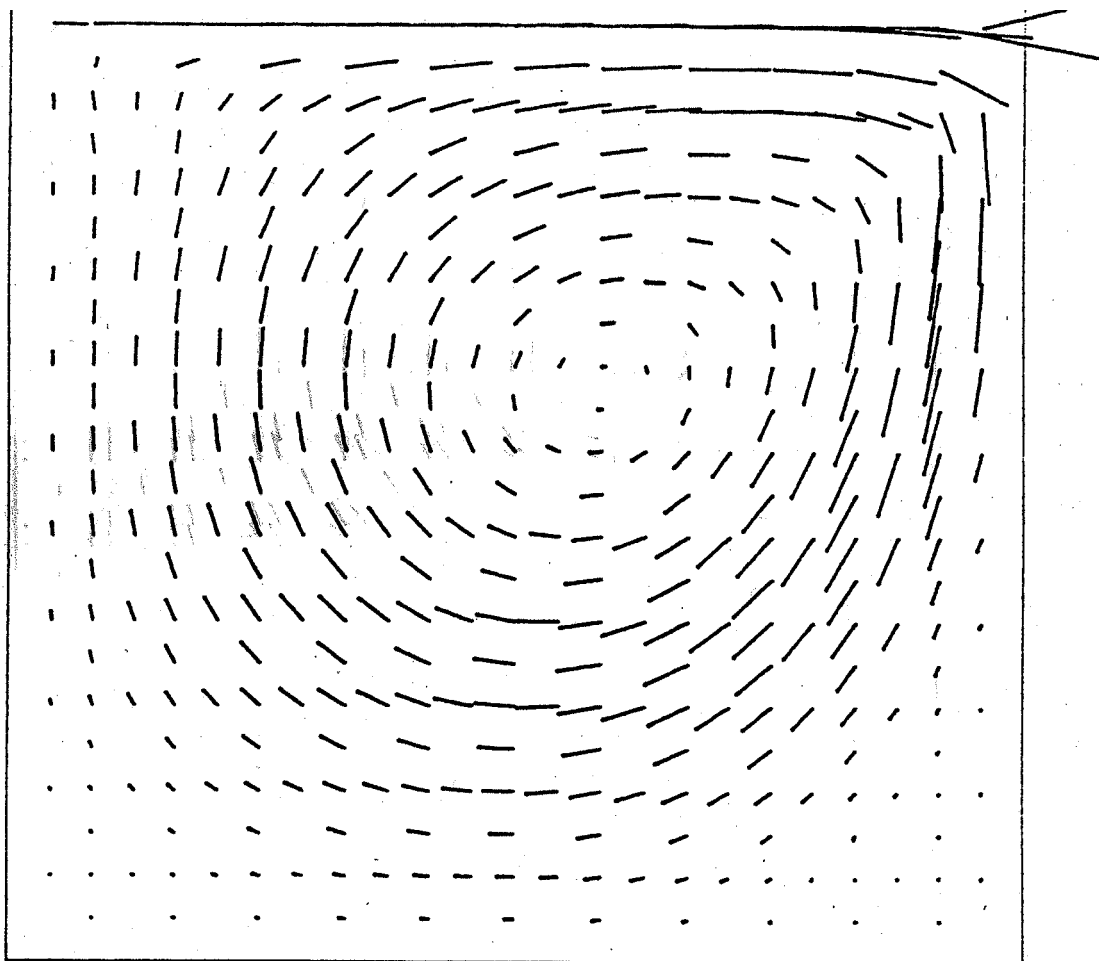
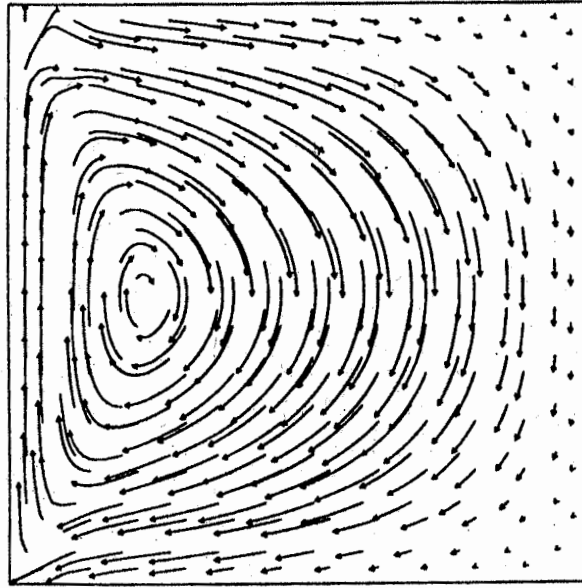


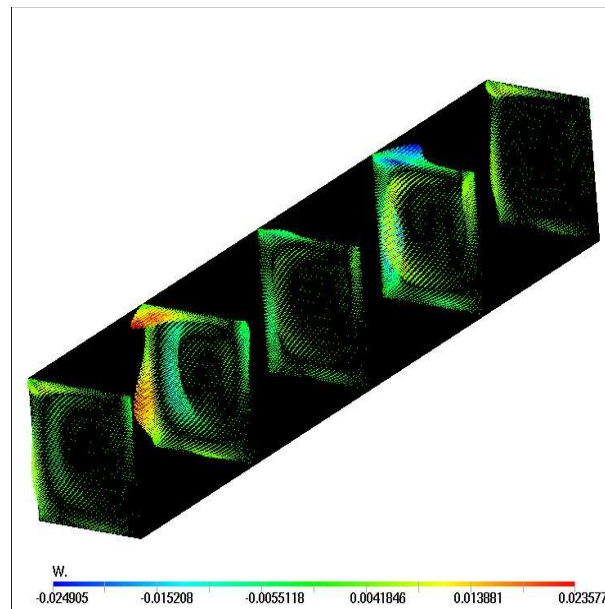
FIGURE 5.2: ELEMENT CONFORME ( $Re = 500$ )

André Fortin, 1984



Écoulement dans une cavité après filtrage.

Sylvain Boivin, 1987



Etienne Non, 2010

## Références

- [1] Jocelyn Dallaire. Quelques résultats sur la dualité dans le problème de la torsion élasto-plastique, 1976.
- [2] Léon Côté. Sur une méthode d'éléments finis mixtes pour le problème d'élasticité, 1978.
- [3] Richard Trudel. Sur une méthode d'analyse typologique, 1978.
- [4] Jean Moussi. Existence d'un multiplicateur de Lagrange en dimensions finie et infinie, 1980.
- [5] Gemma Omana Wallo. Les équations de Schrodinger non linéaires, 1981.
- [6] Marie-Josée L'Heureux. Résolution numérique d'un problème biharmonique, 1984.
- [7] Sylvain Boivin. Stabilisation de certaines approximations par éléments finis d'écoulements incompressibles, 1987.
- [8] Sylvie Martel. Résolution du problème de Stokes par une méthode multigrille, 1988.
- [9] Yves Bourgault. Etude de la méthode des caractéristiques, 1989.
- [10] Hani Harbi. Méthode de décomposition de domaine, 1989.
- [11] Julien Dompierre. Sur la méthode de Lesaint-Raviart, 1989.
- [12] Grégoire Martin. Méthodes de préconditionnement par factorisation incomplète, 1991.
- [13] Christine Dufour. Modélisation de la propagation d'un feu de forêt, 1992.
- [14] Serge Frigon. Une méthode de volumes finis dirigés pour des problèmes hyperboliques en une dimension, 1995. Codirection, P. Joyal.
- [15] Kouakou Donatien N'dri. Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes d'évolution, 1995.
- [16] Hassan Lahoussine. Sur l'équation de transport, 1996.
- [17] Carl Robitaille. Une expérience de parallélisation d'un code d'éléments finis, 1996.
- [18] Stéphane Girard. Une méthode de volumes finis en 2D à la manière des éléments finis et méthodes avoisinantes, 1999. Codirection P. Joyal.
- [19] Fabrice Ndikumagenge. Estimateur d'erreur a posteriori basé sur une méthode hiérarchique et adaptation de maillages, 2001. Codirection R. Guénette.

- [20] André Fortin. Méthodes d'éléments finis pour les équations de Navier-Stokes, 1984.
- [21] Rajae Aboulaich. Méthode du gradient conjugué pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, 1986.
- [22] Driss Esselaoui. Méthodes numériques pour la simulation d'écoulements viscoélastiques, 1986.
- [23] Hassan Manouzi. Approximation par éléments finis d'un modèle de simulation de la turbulence, 1986.
- [25] Ali Souissi. Quelques problèmes d'optimisation de formes en hydrodynamique, 1987.
- [26] Sylvain Boivin. Simulation d'écoulements compressibles à nombre de Reynolds élevé, 1990.
- [27] Robert Guénette. Etudes théoriques et numériques du modèle de Leslie-Ericksen pour les cristaux liquides, 1991.
- [28] Mohamed Farhloul. Méthodes d'éléments finis mixtes et volumes finis, 1991.
- [29] Saïd El Hajji. Bifurcation dans les équations de Navier-Stokes, 1991. Codirection de Jean-Jacques Gervais.
- [30] Geng Yang. Simulation numérique du modèle hydrodynamique des semiconducteurs par la méthode des éléments finis, 1994.
- [31] Yves Bourgault. Méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides, conservation et autres propriétés, 1996.
- [32] Rachid Assila. Résolution numérique, par éléments finis, d'un modèle hydrodynamique des semiconducteurs avec masse effective variable, 1997.
- [33] Grégoire Martin. Étude numérique des équations d'un fluide micropolaire, 2000.
- [34] Abdellatif Serghini. Méthodes d'éléments finis mixtes hybrides : application aux équations de convection-diffusion et de Navier-Stokes, 2000.
- [35] Azzédine Soulaïmani. Contribution à la résolution numérique des problèmes à surface libre. 1987. Directeur : Ghouri Dhatt.
- [36] Zoubida Mghazli. Une méthode mixte pour les problèmes d'hydrodynamique. 1987. U de M., directeur : Michel Delfour.

- [37] Gilles Leborgne. Simulation numérique d'écoulement de fluides viscoélastiques de type Oldroyd : utilisation d'éléments finis de degré 1. Ecole Polytechnique de Paris, 1992, directeur : P.A. Raviart.
- [38] Pierre Fleury. Modélisation mathématique et numérique de l'écoulement de fluides viscoplastiques non-Newtoniens. Application au filage et au laminage. Ecole Polytechnique de Paris, 1992, directeur : P.A. Raviart.
- [39] F. Bertrand. Modélisation tridimensionnelle du procédé de malaxage à mouvement planétaire de fluides visqueux rhéologiquement complexes. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France. 1995, directeur : O. Choplin.
- [39] Abderrahman El Maliki. Résolution de problèmes aux limites à l'aide de méthodes itératives hiérarchiques à préconditionneur variable. 2007. Directeur : Robert Guénette.

# High Quality Surface Remeshing Using Harmonic Maps.

J-F Remacle<sup>1</sup>, C. Geuzaine<sup>2</sup> and E. Marchandise<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Université catholique de Louvain, Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering (iMMC), Place du Levant 1, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgium*

<sup>2</sup>*Université de Liège, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Montefiore Institute B28, Grande Traverse 10, 4000 Liège, Belgium*

## Résumé

We present an efficient and robust technique for surface remeshing based on harmonic maps. We show how to ensure a one-to-one mapping for the discrete harmonic map. Topological and geometrical limitations of harmonic maps are also put to the fore and discussed. More precisely, we address issues of surfaces with high genus and/or with large aspect ratio. We develop a multiscale version of the harmonic parametrization of and then combine it with a multilevel partitioning algorithm to come up with an automatic remeshing algorithm that overcomes the above mentioned limitations of harmonic maps. We finally show that, with the proposed approach, we are able to recover high quality meshes from both low input STL triangulations (see Figure 1) and complex surfaces defined by many CAD patches. The overall procedure is implemented in the open-source mesh generator Gmsh.

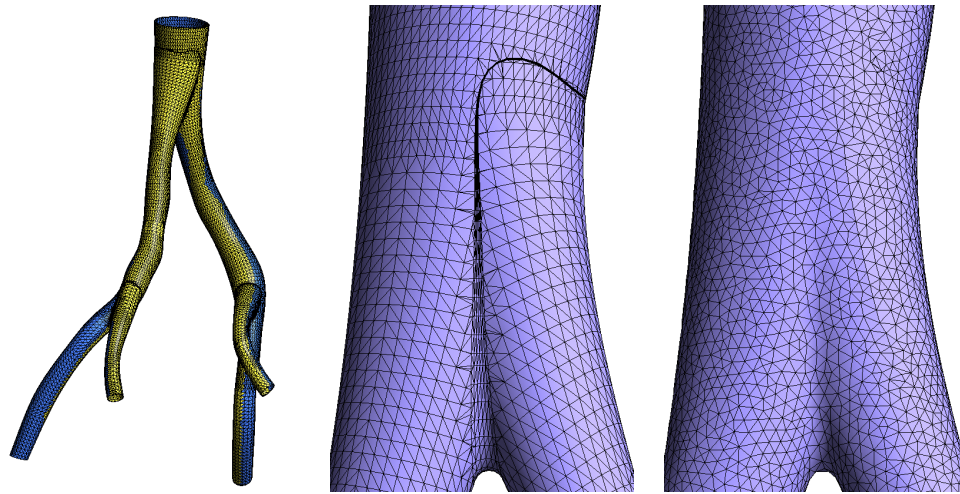


FIGURE 1 – Remeshing of a the iliac artery presented in Fig. 1. Figure a) shows one of the mesh partitions computed with the multiscale partitioning method and Figure b) and c) show a zoom of the mesh near the iliac bifurcation before and after the remeshing procedure based on a Laplacian harmonic map.

# Le couplage coeur-thorax avec interfaces définies par ensembles de niveaux

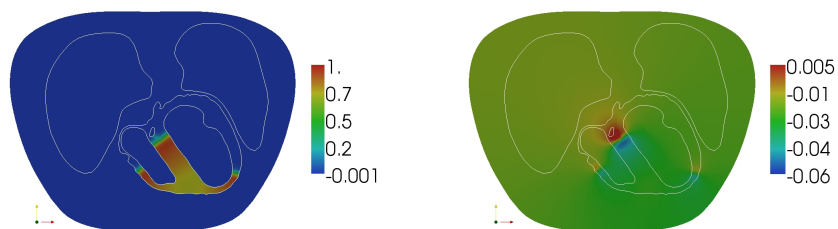
Myriam Rioux, Yves Bourgault, Olivier Rousseau,

Département de mathématiques et statistiques, Université d'Ottawa,  
Ottawa, Canada. Correspondance à: [mrriou068@uottawa.ca](mailto:mrriou068@uottawa.ca)

## Résumé

Le raffinement des techniques non invasives pour visualiser les tissus humains et examiner leurs fonctions permet des progrès remarquables. Il est avantageux de tirer profit de cette imposante quantité d'information pour faire des simulations numériques les plus réalistes possible. Partant d'images médicales segmentées, des méthodes de couplage pour simuler l'activité électrique du coeur sont explorées en tenant compte d'une description des domaines par ensembles de niveaux. Les résultats des simulations sur des maillages conformes aux interfaces sont comparées à des simulations faites sur des maillages non conformes aux interfaces, ces dernières décrites par ensembles de niveaux. L'adaptation de maillage en fonction de la solution et de la description des domaines est également utilisée pour économiser du temps de calcul. Un objectif de ce travail est de prouver qu'il est possible d'éviter de produire des maillages conformes aux interfaces, tout en ayant des propriétés de convergence satisfaisantes. Cette façon d'attaquer ce problème est très prometteuse puisqu'éventuellement, la description des domaines pourrait être changée dans le cas d'une géométrie mobile (e.g. durant un battement de coeur). Cela faciliterait grandement l'intégration d'un modèle combinant la conduction et la contraction du myocarde.

**Mots clés:** Ensembles de niveaux, maillages non-conformes, adaptation de maillage.



(a) Front de dépolarisation se propageant dans le coeur, celui-ci amorçant la contraction (systole ventriculaire).

(b) Propagation du potentiel extra-cellulaire dans le thorax.

FIG. 1 – Coupe 2D d'un thorax humain : les contours définissent la surface des ventricules et des poumons. Simulation numérique par éléments finis.

# Quelques techniques de stabilisation pour les problèmes d'advection-diffusion

Abdellatif Serghini Mounim,

*Département de mathématiques et d'informatique  
Université Laurentienne, 935, route du lac Ramsey  
Sudbury (ON), P3E 2C6, Canada*

## Résumé

L'approximation de l'équation d'advection-diffusion via la méthode des éléments finis standard produit souvent des résultats inacceptables. Cette équation décrit de nombreux phénomènes de transport, et il est bien connu que les méthodes de Galerkin ne sont pas assez stables pour des problèmes dont les effets de transport ou d'advection sont prédominant. Ce manque de stabilité se manifeste par des oscillations parasites en présence de couches limites ou de couches limites de sortie qui pourraient polluer complètement la solution discrète. Pour remédier à cette difficulté, diverses méthodes ont été développées au cours des dernières années. Nous présentons trois techniques de stabilisation dédiées à l'approximation de ce type d'EDP, et qui consistent à :

- modifier la formulation standard de sorte que la forme résultante ait des propriétés de stabilité satisfaisante.
  - utiliser des fonctions de base ayant un caractère stabilisant.
  - enrichir l'espace de discrétisation à l'aide de fonctions bulles ayant un lien avec la solution.
- Les idées présentées ici sont en partie tirées de [1, 2].

*Mots clés: Advection-diffusion, Éléments finis, Volumes finis, Stabilisation*

## Références

- [1] M. Fortin and A. Serghini Mounim, Mixed and hybrid finite element methods for convection-diffusion equations and their relationships with finite volume Part I. *Calcolo* 42 (2005), no. 1, 1-30.
- [2] A. Serghini Mounim, A Space-Time Mixed-Hybrid Finite Element Method For The Damped Wave Equation. *Numer. Methods Partial Differential Equations*. 24 (2008). No. 2, 368-382.

# Analyse de structures de chaussée rigide aux arrêts d'autobus par la méthode des éléments finis : une application de l'adaptation de maillage

Olivier Sigouin<sup>1</sup>, Pascale Pierre<sup>1</sup>, Jean Deteix<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>*Département de génie civil, Université Laval, Québec, Canada*

<sup>2</sup>*Département de mathématique et de statistique, Québec, Canada*

*Correspondance à : olivier.sigouin.1@ulaval.ca*

## Résumé

Le passage répété des autobus urbains affectés au transport en commun dans les corridors qui leur sont dédiés provoque une dégradation précoce de la structure de chaussée. Ces dommages atteignent leur apogée dans les zones d'arrêt d'autobus. Dans l'objectif de développer des structures de chaussée qui résisteront adéquatement aux sollicitations présentes dans les zones d'arrêt d'autobus, un modèle simplifié de la structure de chaussée a été élaboré et analysé par la méthode des éléments finis. L'adaptation des maillages a permis de simplifier considérablement le processus d'analyse.

*Mots clés: Adaptation de maillage, éléments finis, structure de chaussée, revêtement de chaussée, arrêt d'autobus*

## 1. Introduction

Dans un contexte où les différents gouvernements prônent la réduction des émissions de gaz à effet de serre et où la congestion des réseaux routiers urbains occasionne d'énormes pertes au niveau économique et humain, le développement du transport collectif prend tout son sens. Ce développement entraîne cependant une augmentation du nombre d'autobus urbains circulant sur les chaussées des villes, ce type de véhicule occupant une place importante dans les différents réseaux de transport collectifs.

Les autobus urbains étant des véhicules extrêmement agressifs pour les structures de chaussée, une détérioration prématurée de celles-ci est souvent observée dans les voies où ceux-ci circulent fréquemment et surtout dans les zones les plus sollicitées, soit aux arrêts d'autobus situés sur les artères principales et aux environs des stations de métro [1]. Le freinage, l'immobilisation et l'accélération des véhicules toujours aux mêmes endroits imposent à la chaussée des charges et des efforts de cisaillement très importants. Lorsque la température s'élève, les propriétés visco-élastiques des enrobés bitumineux actuellement utilisés pour le revêtement des chaussées urbaines font en sorte que ceux-ci présentent un comportement peu adapté aux

zones fortement sollicitées qui se traduit principalement par la formation d'ornières importantes et de fissures de fatigue dans les tracés de roue.

La mise en place de revêtements composés d'une dalle de béton (revêtement rigide) ou de pavés de béton (revêtement semi-rigide) en remplacement de l'enrobé bitumineux (revêtement flexible) dans les zones d'arrêt d'autobus constitue une solution intéressante pour résoudre de façon durable ce problème. Malgré le fait que cette approche soit utilisée dans plusieurs grandes villes à travers le monde, très peu de documentation spécifique à celle-ci est disponible actuellement.

Pour mieux comprendre le comportement des structures de chaussées comportant ce type de revêtement, des analyses basées sur un modèle simplifié ont été réalisées par la méthode des éléments finis. Comme il sera discuté au cours des prochaines sections, l'adaptation de maillages s'est avérée une solution efficace pour simplifier la construction du modèle et pour améliorer les résultats obtenus.

## 2. Description du modèle

Dans le cadre de cette étude, un modèle simplifié représentant une structure de chaussée revêtue d'une dalle de béton a été élaboré. La figure 1 présente le modèle utilisé. Celui-ci est constitué de quatre couches distinctes, soit le revêtement, la fondation, la sous-fondation ainsi que le sol naturel, appelé sol d'infrastructure. Le bloc formé par la fondation, la sous-fondation ainsi que le sol d'infrastructure constitue ce qui sera appelé «la base» du modèle dans la suite du texte.

Pour le calcul de la solution, une condition limite d'encastrement a été imposée à la face inférieure de la base du modèle (surface inférieure) et des conditions de symétrie ont été appliquées sur ses quatre faces verticales.

Tel que le montre la figure 1, six surfaces ont été ajoutées sur le dessus du revêtement. Ces surfaces représentent la position des pneus de l'autobus. Leurs dimensions ont été déterminées selon les recommandations proposées par l'Association du ciment Portland [2] pour l'analyse

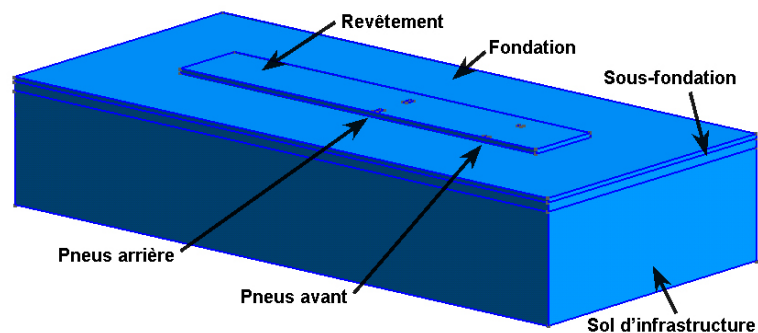


FIGURE 1 – Modèle simplifié utilisé pour l'analyse par la méthode des éléments finis.

de structures de chaussées rigides (revêtues de béton). Leur position a ensuite été établie à partir des dimensions d'un autobus urbain de type NovaBus LFS, soit le modèle de véhicule le plus couramment rencontré sur les chaussées municipales du Québec.

Le maillage du modèle a été réalisé à l'aide du logiciel gmsh [3] en utilisant l'algorithme MeshAdapt+Delaunay pour le maillage des surfaces (2D) et l'algorithme Tetgen+Delaunay pour le maillage des volumes (3D).

Dans l'objectif de faciliter l'analyse du problème, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été posées. D'abord, les matériaux sont supposés homogènes et isotropes et le comportement de la structure de chaussée correspond à une loi linéaire-élastique. Ensuite, les charges appliquées sont statiques et les différentes couches se comportent de façon liées. Ces différentes hypothèses sont justifiées par le comportement des structures de chaussée rigides et semi-rigides dans la gamme de sollicitations en cause dans le cas étudié.

La résolution du problème a été effectuée à l'aide du code MEF++ faisant appel à un solveur itératif de type HP.

La figure 2 montre une représentation graphique du champ des déplacements verticaux  $U_z$  obtenu lors de la résolution à partir d'un modèle ayant une base présentant une largeur excédentaire de 5 mètres tout autour de la dalle.

Afin de s'assurer que la présence des conditions aux limites imposées aux différentes faces de la base n'influence pas significativement les déformations obtenues dans les zones d'intérêt, soit sous les empreintes des quatre pneus,

Afin de s'assurer de l'indépendance des résultats par rapport aux conditions aux limites imposées aux différentes faces de la base, une étude de l'influence des dimensions de la base sur les déplacements verticaux  $U_z$ , mesurés au centre de chacune des zones de chargements pour les pneus avant et au centre entre chaque paire de pneus jumelés pour les pneus arrières,

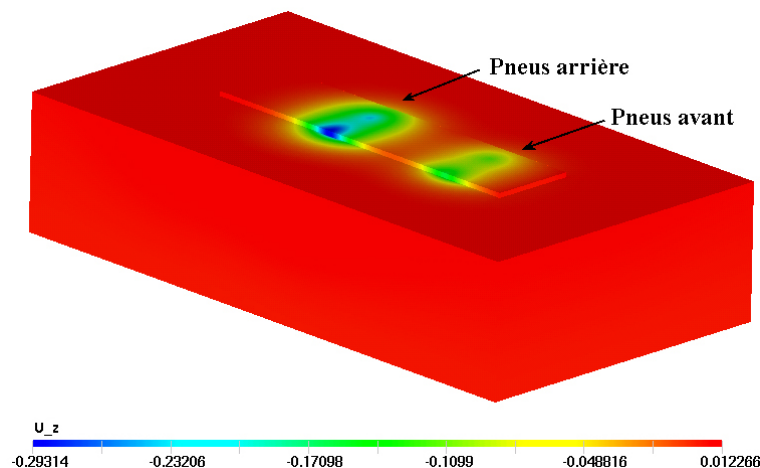


FIGURE 2 – Déplacements verticaux  $U_z$  obtenus avec le modèle ayant une largeur excédentaire de 5 mètres tout autour de la dalle et possédant un sol d'infrastructure d'un épaisseur de 5 mètres.

a été effectuée. Cette étude a permis d'établir qu'un modèle ayant une base qui présente une largeur excédentaire de 50 mètre tout autour de la section de revêtement et qui possède un sol d'infrastructure d'une épaisseur de 50 mètres permet de réduire adéquatement l'influence des conditions aux limites. C'est donc avec un modèle présentant ces dimensions que les simulations sont réalisées.

### 3. Adaptation de maillages

Comme les charges appliquées sur le modèle sont concentrées en quatre endroits précis correspondant aux pneus de l'autobus et que la taille de ces zones est restreinte par rapport à la dimension du modèle, il est devenu souhaitable de procéder à un raffinement du maillage dans ces zones. Cette procédure peut être réalisée de façon manuelle en construisant conséquemment le modèle dans la logiciel de maillage, *gmsh* dans notre cas, et en assignant adéquatement les paramètres contrôlant la création du maillage. Cependant, cette approche devient rapidement fastidieuse et complexifie beaucoup la construction du modèle.

Pour palier à cette situation l'adaptation de maillage « automatisée » a été introduite. Cette approche permet de débiter l'analyse à partir d'un maillage grossier, donc peu coûteux autant au niveau des efforts nécessaires pour le générer qu'au niveau du temps de calcul et de la mémoire, car celui-ci sera raffiné au cours du processus. Elle permet également de retirer les surfaces des pneus qui étaient présentes à la surface du revêtement. Ces surfaces, sur lesquelles les charges étaient appliquées par l'imposition d'une condition de Neumann, permettent de définir précisément les zones chargées et d'éviter certains problèmes de convergence lors de la résolution. Ainsi, plutôt que d'appliquer les charges sur des surfaces prédéfinies, une fonction conditionnelle liée à la position sur la surface du revêtement est utilisée. Cette situation a pour grand avantage de permettre la modification de la position des charges appliquées sans avoir à faire de modifications au niveau du modèle ; il n'y a qu'à modifier la fonction conditionnelle et à redémarrer le processus de résolution-adaptation pour qu'une nouvelle solution basée sur un maillage adapté au nouveau cas de chargement soit obtenu.

Plusieurs variables d'adaptation peuvent être introduites dans le processus d'adaptation. Dans le cas présent, quatre variables ont été retenues, soit le champ des déplacements ( $U_x$ ,  $U_y$  et  $U_z$ ) ainsi que le champs des contraintes verticales  $\sigma_{zz}$ .

Le nombre de sommets souhaités a pour sa part été fixé à 50000 de façon à laisser libre court au processus de raffiner adéquatement les zones d'intérêt.

### 4. Résultats et Discussion

La figure 3 présente une vue globale du champ des déplacements verticaux de la surface supérieure du modèle obtenu après la première résolution ainsi que du maillage initial, qui

présentait 13514 sommets. Comme le maillage de départ était relativement grossier, la figure 3 permet de constater que la solution initiale est de très mauvaise qualité. La figure 4 montre pour sa part le champ des contraintes verticales  $\sigma_{zz}$  sur la surface supérieure du modèle ainsi que pour deux coupes transversales effectuées directement au centre des empreintes des pneus avant et arrière. Cette figure permet de constater que le champ des contraintes est de mauvaise qualité en raison du fait que ce champs est obtenu par un calcul utilisant le champ des déplacements  $U$ .

À la suite de la première séquence de résolution-adaptation, les résultats obtenus montrent une amélioration importante de la solution (figures 5 et 6). Effectivement, le champ des déplacements verticaux  $U_z$  est beaucoup plus «lisse» et le champ de contraintes  $\sigma_{zz}$  présente une résolution fortement accrue. Cela peut principalement être constaté sur les deux coupes transversales du modèle montrant l'évolution de la contrainte  $\sigma_{zz}$  avec la profondeur.

Le calcul de la norme L2 entre la solution obtenue initialement et celle obtenue après la première séquence de résolution-adaptation conduit à une valeur de 4525.

Après quatre séquences de résolution-adaptation, la solution obtenue est de bonne qualité, tel que constaté sur les figures 7 et 8. En comparant visuellement les figures 5 et 7, nous pouvons constater que le champ des déplacements verticaux  $U_z$  n'évolue pas de façon significative à la surface du modèle. Cela est confirmé par la valeur de la norme L2 calculée entre la solution obtenue après la première séquence de résolution-adaptation et celle obtenue après quatre séquences qui passe à de 4525 à 1633. La comparaison des figures 6 et 8, qui présentent les champs de contraintes verticales  $\sigma_{zz}$ , montre clairement que la qualité de la solution au niveau des contraintes est grandement améliorée par les trois séquences de résolution-adaptation supplémentaires.

La poursuite du processus de résolution a ensuite été poursuivi jusqu'à dix itérations. La figure 9 présente le champ de contraintes verticales  $\sigma_{zz}$  alors obtenu. On y constate que l'enveloppe des contraintes verticales  $\sigma_{zz}$  est encore plus raffinée. Tel qu'attendu, le champs des déplacements verticaux  $U_z$  reste pour sa part pratiquement inchangé tel que l'indique la valeur de la norme L2 qui est maintenant de 1261 pour la différence entre les solutions issues de quatre et dix itérations.

Finalement, la figure 10 montre qu'une variation négligeables des valeurs des déplacements verticaux  $U_z$  survient rapidement lors du processus d'adaptation du maillage, ce qui confirme les résultats fondés sur les valeurs de la norme L2 discutés ci haut. Les déplacements relatifs présentés sur ce graphique sont mesurés au centre de chacune des zones de chargement pour les pneus avant et au centre entre chaque paire de pneus jumelés pour les pneus arrière, tel que mentionné précédemment.

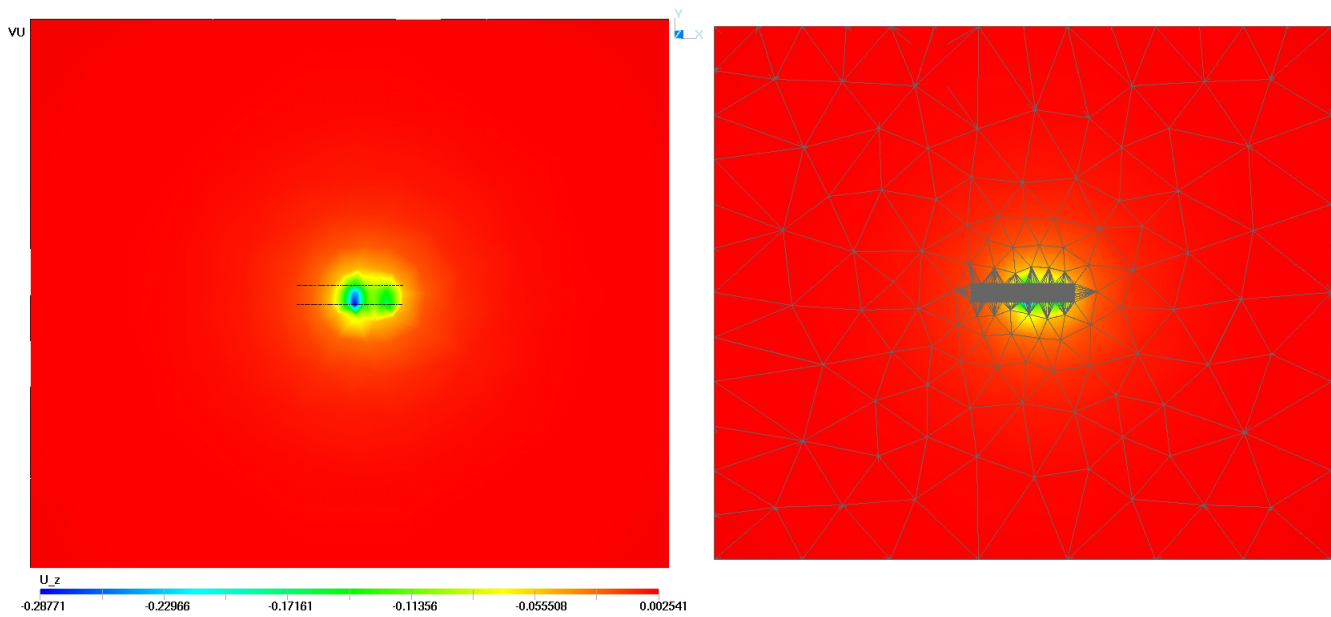


FIGURE 3 – Déplacements verticaux  $U_z$  obtenus suite à la résolution avec le maillage de départ.

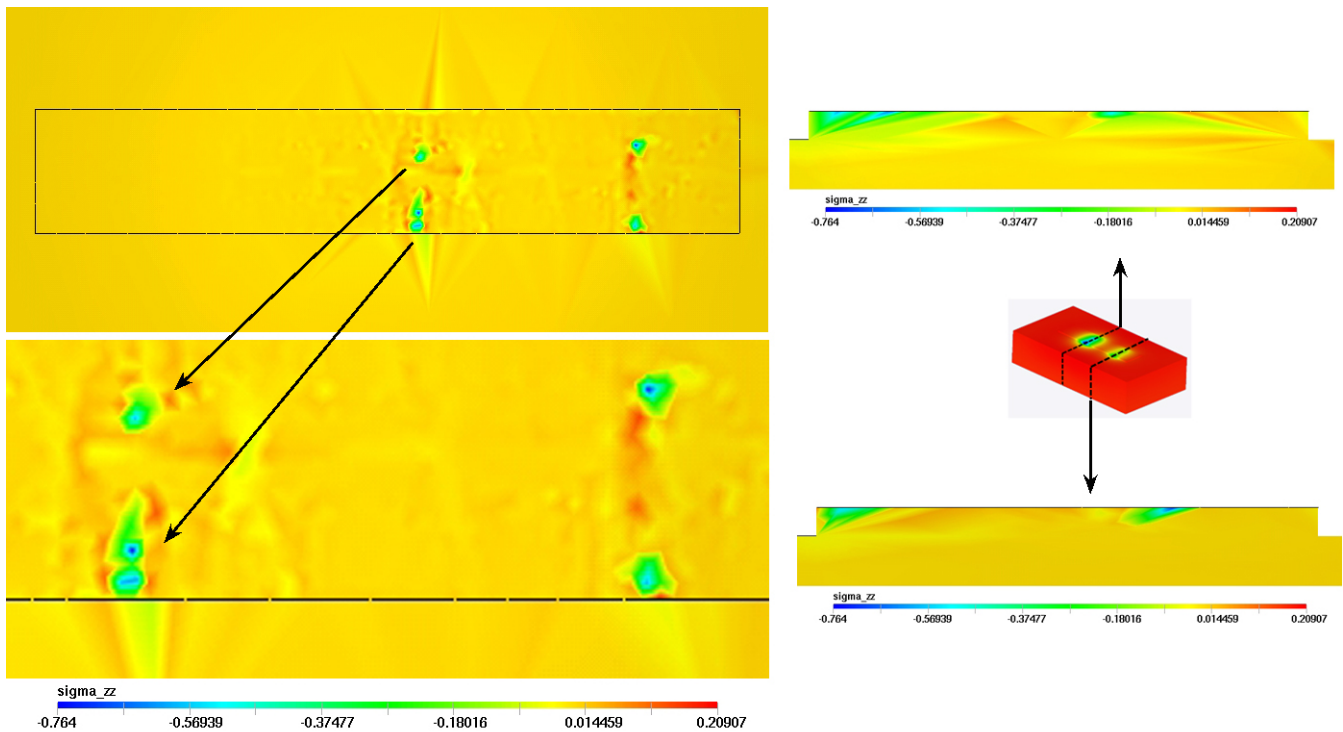


FIGURE 4 – Contraintes verticales  $\sigma_{zz}$  obtenus suite à la résolution avec le maillage de départ.

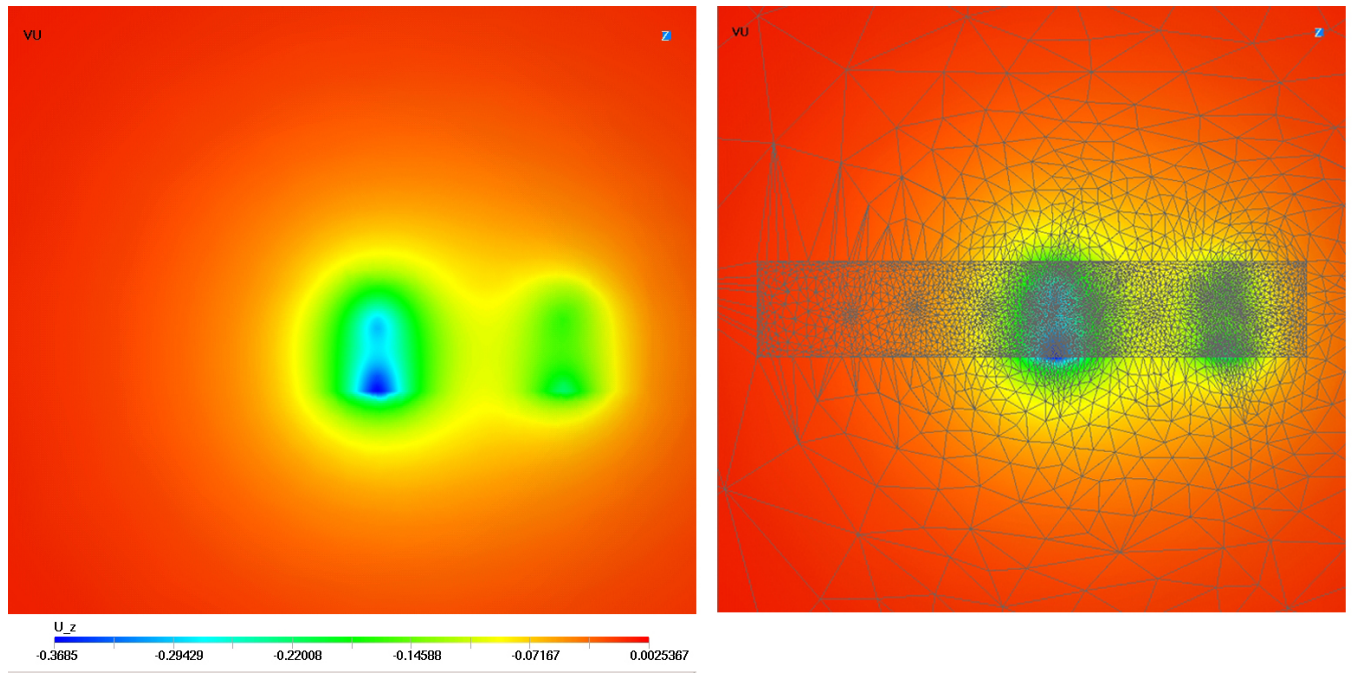


FIGURE 5 – Déplacements verticaux  $U_z$  et maillage obtenus suite à la première séquence de résolution-adaptation.

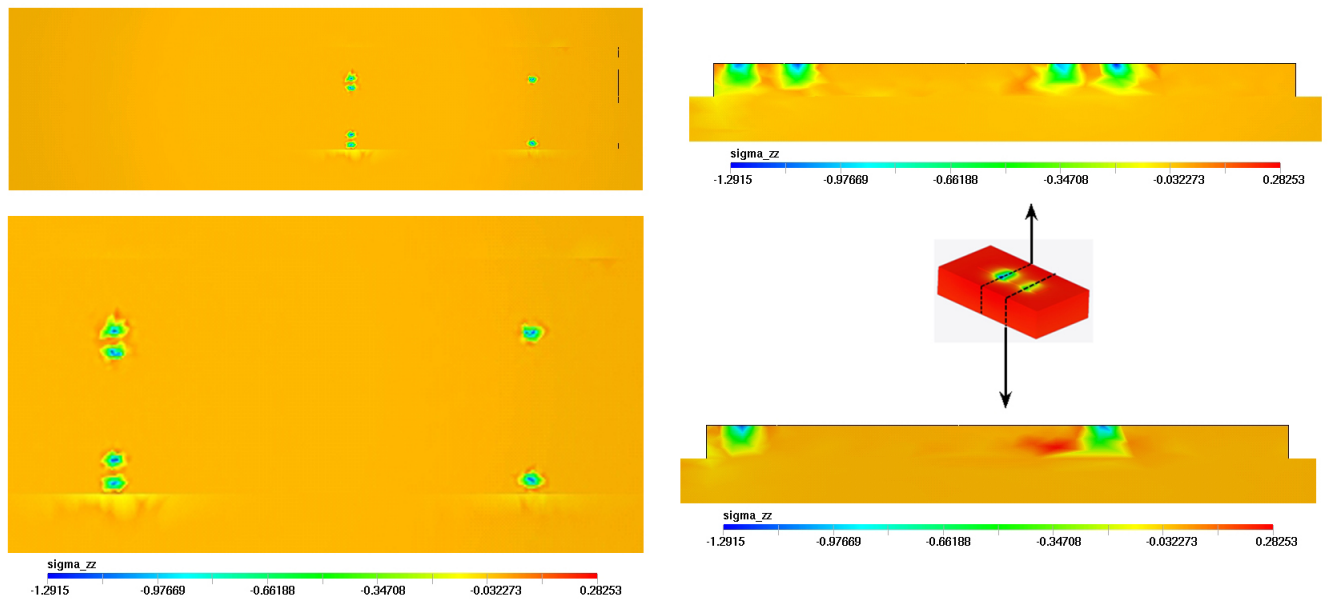


FIGURE 6 – Contraintes verticales  $\sigma_{zz}$  obtenues suite à la première séquence de résolution-adaptation.

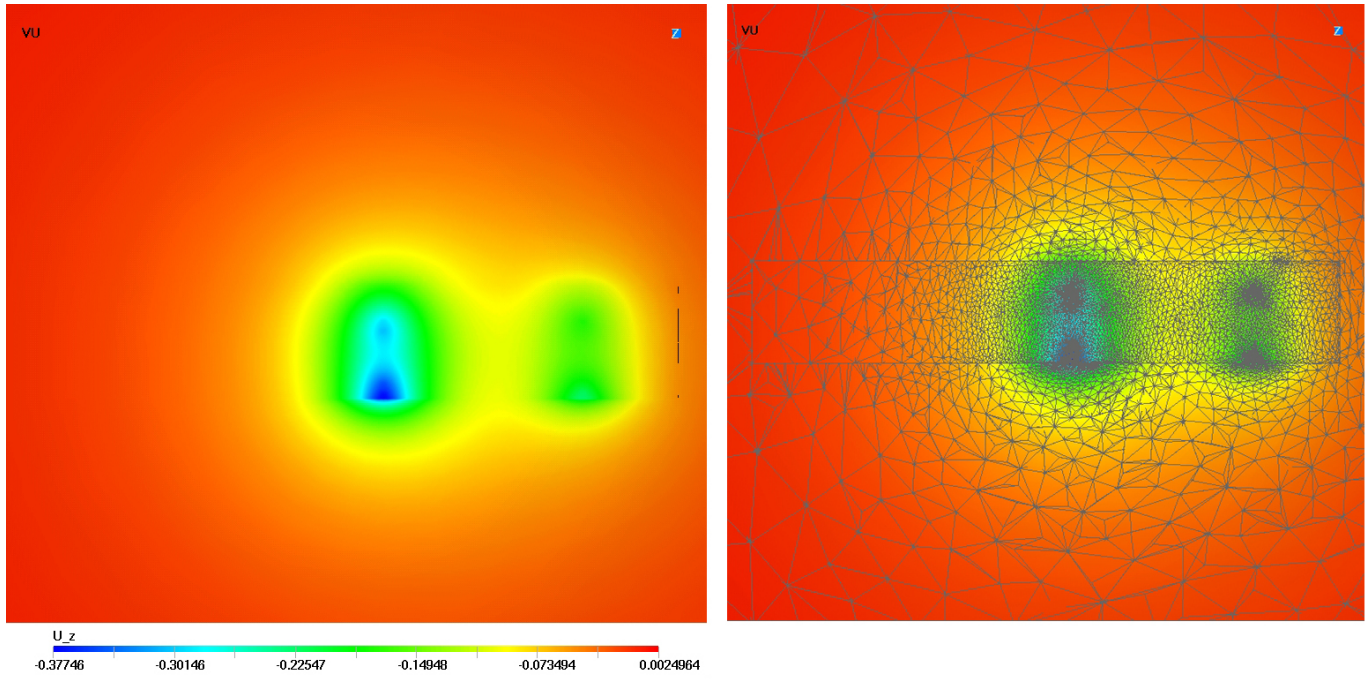


FIGURE 7 – Déplacements verticaux  $U_z$  et maillage obtenus après quatre séquences de résolution-adaptation.

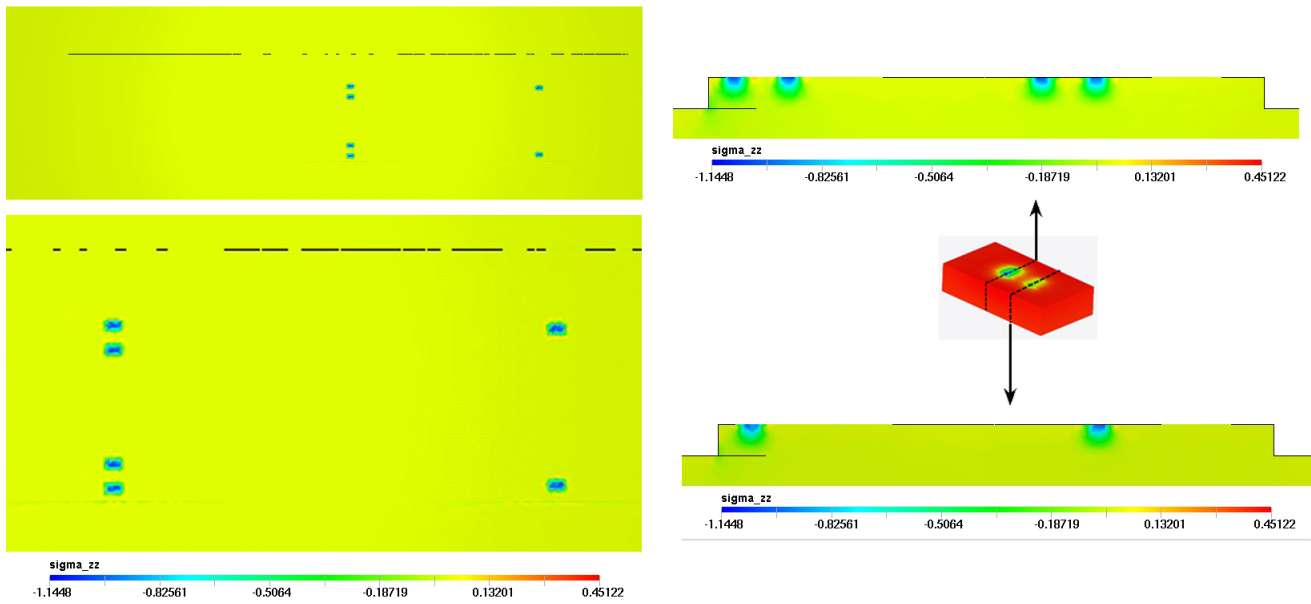


FIGURE 8 – Contraintes verticales  $\sigma_{zz}$  obtenues après quatres séquences de résolution-adaptation.

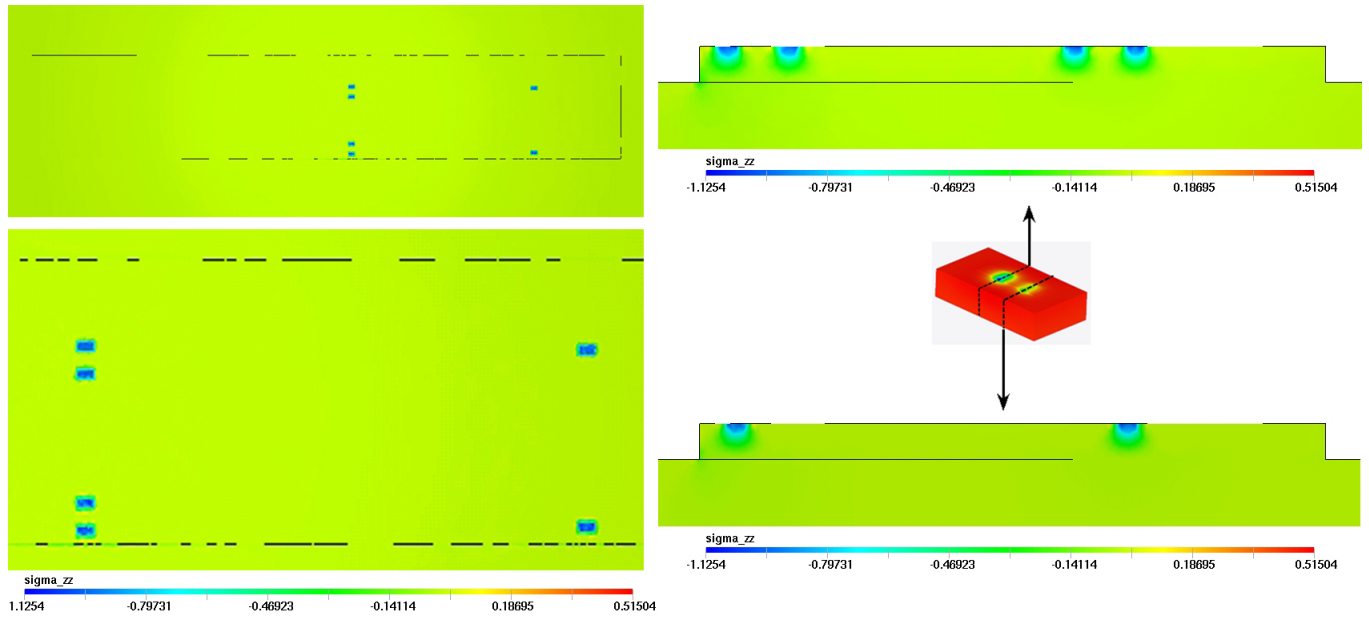


FIGURE 9 – Contraintes verticales  $\sigma_{zz}$  obtenues après dix séquences de résolution-adaptation.

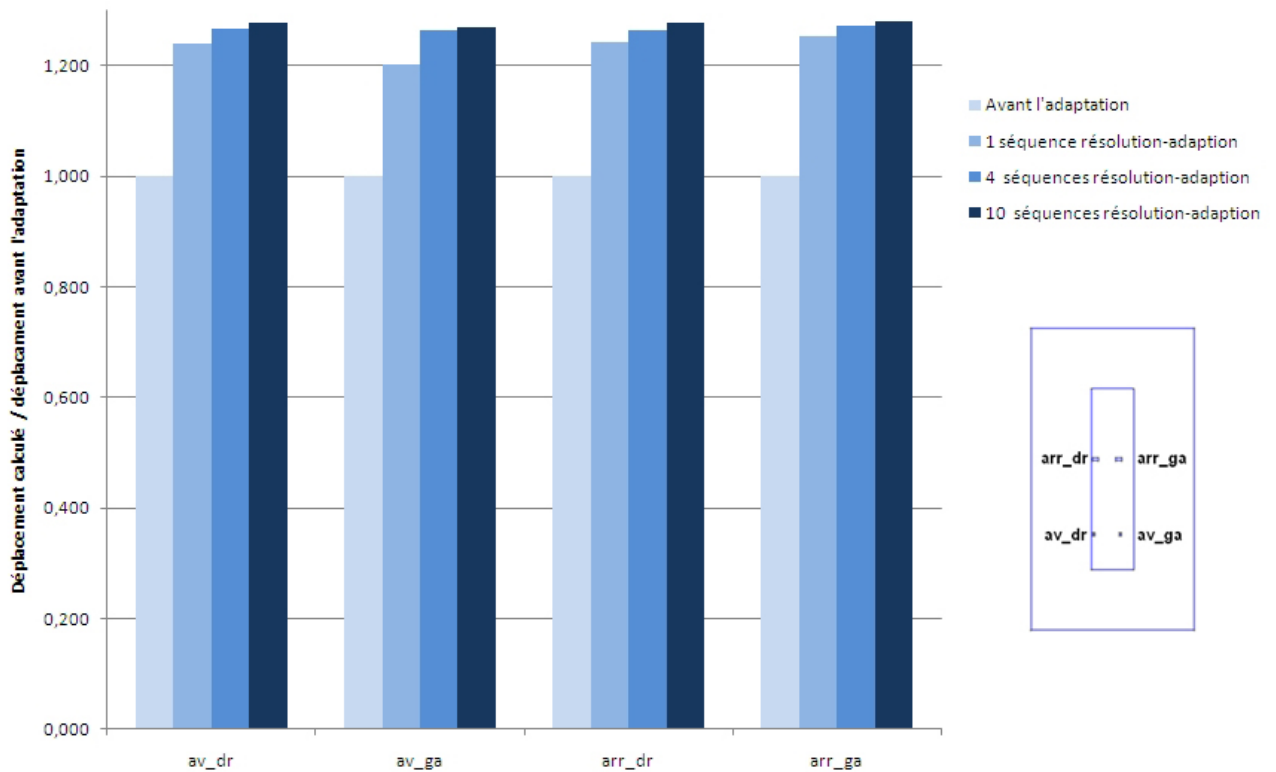


FIGURE 10 – Déplacement relatifs mesuré au centre de chacune des zones de chargements pour les pneus avant et au centre entre chaque paire de pneus jumelés pour les pneus arrière, exprimés par rapport aux valeurs obtenues avant les séquences de résolution-adaptation.

## 5. Conclusion

En conclusion, l'utilisation des éléments finis et de l'adaptation de maillage permet de comprendre la répartition des déplacements et des contraintes au sein des structures de chaussée rigides et d'être un complément intéressant au programme expérimental du projet de recherche.

## Références

- [1] Vinet, N. (2008). Nos chaussées toujours plus sollicitées... Projet pilote de mise en place de dalles de béton préfabriquées à un arrêt d'autobus - Ville de Montréal, Contact Plus, 64, 18-20.
- [2] Oloo, S. Y., Fredlund, D. G., Gan, J. K.-M. (1997). Bearing capacity of unpaved roads., Canadian Geotechnical Journal, 34(3), 398-407.
- [3] Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, Version 2.3.0, Christophe Geuzaine et Jean-François Remacle.

# Méthodes numériques pour des problèmes à frontières mobiles

Azzeddine Soulaïmani

*Département de génie mécanique*

*Ecole de technologie supérieure*

*1100 Notre-Dame O.*

*Montréal (QC) H3C 1K3*

## Résumé

Cette présentation fera une revue des travaux effectués durant les dernières années sur des méthodes numériques de résolution de problèmes à frontières mobiles.

On s'intéresse d'abord aux problèmes de propagation d'ondes de bris de barrage sur des terrains complexes qui sont modélisés par les équations de Saint-Venant en deux dimensions. La difficulté réside dans la détection des interfaces entre les zones sèches et mouillées. Une autre problématique qui intéresse les ingénieurs est l'estimation des incertitudes qui affectent les résultats des modèles numériques après la prise en compte des incertitudes sur les données physiques. Au cours des dernières années, on a exploré des méthodes particulières Lagrangiennes (méthode SPH et méthode NEM) et des méthodes Eulériennes (VF). Dans la première classe de méthodes, la discrétisation se base sur la notion de particules en mouvement Lagrangien. On part de la prémisse qu'en adoptant une description Lagrangienne les fronts seraient plus faciles à déterminer et ce avec une bonne précision. Aussi, ces méthodes sont souvent dites dans littérature comme méthodes sans maillage. Nous montrons qu'il est presque toujours nécessaire de recourir à un maillage. Ces méthodes ont aussi besoin d'une stabilisation comme avec les méthodes Eulériennes. En particulier, la méthode développée dénommée Natural Volume Method s'est avérée une discrétisation (Lagrangienne) de type Volumes Finis dont le flux est évalué avec une interpolation de type NEM (Natural Element Method). Dans la deuxième classe de méthodes, on a développé un modèle numérique basé sur un schéma de Volumes Finis qui respecte les conditions de conservation et de stabilité (C-property) sur un domaine qui est partiellement mouillé. Les résultats des expériences numériques montrent les avantages et les inconvénients de chaque approche numérique. Comme certaines données du problème (conditions aux limites, bathymétrie, coefficient de frottement) sont en général entachées d'incertitudes, les résultats du modèle numérique sont aussi incertains. Une approche fiabiliste est adoptée pour estimer la probabilité de dépassement d'un mur de protection.

Le deuxième problème concerne la stabilité aéroélastique d'une aile d'avion en vol transsonique. Il s'agit de modéliser l'interaction dynamique entre une structure flexible et un écoulement compressible à haute vitesse. En effet, il s'avère que la vitesse critique de stabi-

lité est minimale en vol transsonique. Nous avons développé une suite de modèles numériques basés sur différentes modélisation du fluide (équation du potentiel complet FP, équations d'Euler et équations Navier-Stokes moyennées) alors que la structure est modélisée par l'élastodynamique linéaire. Pour traiter le problème de frontière mobile, une description ALE est adoptée si bien que le maillage est continuellement en mouvement. Comme il s'agit d'un problème très gourmand en temps de calcul, les codes développés sont entièrement parallélisés. Des résultats de simulation sur l'aile aéroélastique Agard montrent une bonne comparaison avec des données expérimentales.

*Mots clés: Frontières mobiles, propagation d'ondes, équations d'Euler et de Navier-Stokes*

## Références

- Riadh Ata et Azzeddine Soulaïmani. A stabilized SPH method for inviscid shallow water flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Vol. 47, No. 2, pp. 139–159, (2004).
- Ata R., Soulaïmani A. et Chinesta, F., The natural volume method (NVM) : Presentation and application to shallow water inviscid flows. *International journal for numerical methods in fluids*, vol. 59, No. 1, pp.19–45, (2009).
- Jean-Marie Zokagoa and Azzeddine Soulaïmani. Modeling of Wetting-Drying Transitions in Free Surface Flows over Complex Topographies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, doi :10.1016/j.cma.2010.03.023
- Azzeddine Soulaïmani, Zhengkun Feng and Amin Ben Haj Ali. Solution techniques for multi-physics problems with application to computational nonlinear aeroelasticity. *Nonlinear Analysis*, Vol 63, issues 5-7, 2005
- Amine Ben Haj Ali and Azzeddine Soulaïmani. An unstructured finite elements method for solving the compressible RANS equations and the Spalart-Allmaras turbulence model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, doi :10.1016/j.cma.2010.03.014

# Estimation d'erreur a posteriori pour les modèles de flammelette sous-maille

TURBIS, Pascal

*Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, CP 6128 succ. Centre-ville, Montréal (Québec) H3C 3J7, Canada. [turbis@dms.umontreal.ca](mailto:turbis@dms.umontreal.ca)*

## Résumé

Les résidus et les problèmes duaux sont fréquemment employés pour l'estimation des erreurs de discrétisation a posteriori en dynamique des fluides computationnelle. Ici, on utilisera une méthode similaire dans le but d'estimer les erreurs de modélisation associées aux modèles de flammelette sous-maille en combustion turbulente non prémélangée. Les flammelettes sont des solutions asymptotiques pour le transport complet des réactifs dans la limite de flammes très minces. Elles sont utilisées comme fermeture turbulente du système, même pour les flammes modérément minces. Le défi est d'estimer les erreurs sur le vif, à un coût computationnel au plus celui lié à l'utilisation des bibliothèques de flammelette, des relations précalculables entre les scalaires réactifs et les scalaires passifs appropriés. Nous montrerons que cela est possible en utilisant l'estimateur de Braack et Ern, basé sur les résidus pondérés par une solution duale, et des bibliothèques de flammelette duales. Les erreurs estimées sont utilisées pour choisir un modèle performant parmi une hiérarchie, ainsi que pour l'optimisation des paramètres d'un modèle donné. Les travaux de recherche ont été effectués sous la supervision des professeurs Anne Bourlioux (Université de Montréal) et Alexandre Ern (École Nationale des Ponts Paris-Tech).

## Références

- [1] . Bourlioux, A. Ern, P. Turbis, A posteriori error estimation for subgrid flamelet models, *Mult. Mod. Simul.*, 8 (2010), pp. 481–497.

# Anisotropic mesh adaptation for a logarithmic formulation of the $k - \epsilon$ turbulence equation

B. A. Wane , Richard Bois , José M. Urquiza and André Fortin .

GIREF

Dépt. de mathématiques et de statistique  
Université Laval, Québec, Canada

## Résumé

In this work, we apply an anisotropic mesh adaptation strategy to benchmark turbulent flow problems. We show that anisotropic meshes can be very efficient to reduce the number of elements while maintaining the accuracy of the solution. The equations for the turbulence variables are solved in a logarithmic form, in order to preserve their positivity. The whole strategy is applied to a shear layer flow problem with a closed form solution, and to the flow over a backward facing step.

*Mots clés:* Turbulent flow ;  $k - \epsilon$  turbulence model ; wall functions ; logarithmic formulation ; anisotropic mesh adaptation

## 1. MODELING OF THE PROBLEM

### 1.1. Turbulence model in logarithmic form

We consider the time-averaged continuity and momentum equations for an incompressible fluid in turbulent regime with Boussinesq's hypothesis :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot [(\mu + \mu_T)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)], \tag{2}$$

where  $\rho$  is the density,  $\mathbf{u}$  the velocity,  $p$  the pressure,  $\mu$  the viscosity, and  $\mu_T$  the eddy viscosity. We close this system of equations with the  $k - \epsilon$  turbulence model of Launder and Spalding [1]. The eddy viscosity is expressed in terms of two turbulence variables, the turbulence kinetic energy  $k$  and its rate of dissipation  $\epsilon$  :

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \tag{3}$$

The turbulence quantities are governed by the following transport equations :

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_T P(\mathbf{u}) - \rho \epsilon, \quad (4)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_T P(\mathbf{u}) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (5)$$

where  $P(\mathbf{u})$  is the production of turbulence defined by

$$P(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

The standard  $k - \epsilon$  turbulence model is not valid for low values of the turbulent Reynolds number defined as  $Re_T = \frac{1}{\mu_T}$ . This is often the case in the vicinity of solid walls. The strategy adopted here uses wall functions which describe the solution in the near wall region (see Lacasse et al. [2]).

## 1.2. Adaptive strategy

The main steps of the adaptative procedure are the following :

- An initial mesh is provided and the problem is solved providing a numerical solution for  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{E}$  ;
- Approximations of the gradients of the different variables are computed.
- A hierarchical error estimator is used to estimate the error on the mesh (see Bois et al. [3]).
- The mesh is then modified using local operations. Nodes and edges are swept a few times in order to perform :
  - Edge refinement and node suppression to control the error in  $L^2$  norm ;
  - Edge swapping, and node displacement to equidistribute the error and to minimize the energy norm ;
- A new mesh is produced and the process is repeated until the desired number of nodes is reached.

As will be seen in the numerical results, the resulting meshes may present elements with large aspect ratio in regions where the different variables allow it.

## 2. Results and discussion

### 2.1. A shear layer with a closed form solution

This problem served as a validation case in reference [4] to test the accuracy of their error estimation technique and the efficiency of their adaptive isotropic meshing strategy. This is an example of a so-called manufactured solution. The computational domain is the rectangle

$[100, 300] \times [-75, 75]$ . The exact solution is substituted in the Navier-Stokes and turbulence transport equations and appropriate source terms are determined using Maple™. The velocity and the turbulence fields depend on  $x$  and  $y$  while the eddy viscosity is a linear function of  $x$  only :

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{u_1 - u_2}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma y}{x}\right), \\
 u_y(x, y) &= \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2\right), \\
 k(x, y) &= k_0 \left( c_k + \exp\left(-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2\right) \right), \quad \epsilon(x, y) = \frac{\epsilon_0}{k_0} \frac{k(x, y)}{x}, \\
 \mu_T &= \mu_{T_0} x, \\
 p(x, y) &= 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

## 2.2. Flow over a backward facing step

This problem was studied experimentally by Kim [5] and served as a benchmark solution for the 1981 Stanford Conference on Complex Turbulent Flows. The Reynolds number based on the inlet mean velocity  $U$  and the step height  $HT$  is  $Re = (UHT)/\mu = 47625$ . Uniform profiles are specified for all variables at the inlet section.

## Références

- [1] B. E. Launder and D. B. Spalding. *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, London, 1972.
- [2] D. Lacasse. Application d'une méthode d'éléments finis adaptative á des écoulements turbulents. Master's thesis, École polytechnique de Montréal, Montréal, 2004.
- [3] R. Bois, M. Fortin, and A. Fortin. A fully optimal anisotropic mesh adaptation method based on a hierarchical error estimator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, page 30 pages, 2010. Submitted.
- [4] F. Ilinca, J.-F. Héту, and D. Pelletier. A unified finite element algorithm for two-equation models of turbulence. *Computers & Fluids*, 27(3) :291–310, 1998.
- [5] J.J Kim. Investigation of separation and reattachment of turbulent shear layer : flow over a backward facing step. *PH.D thesis, Stanford University*, 1978.

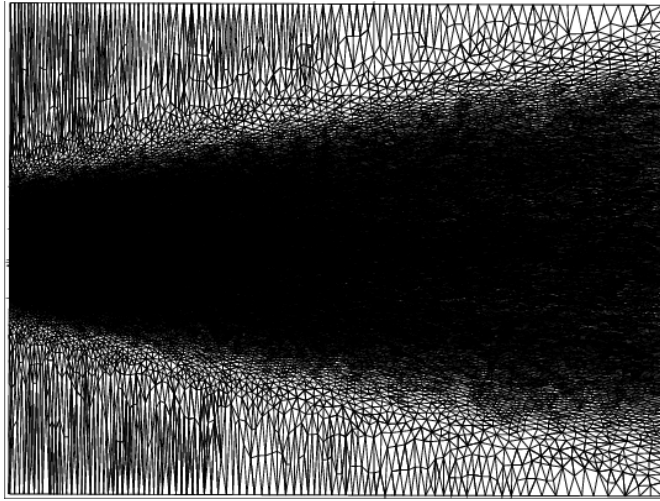


FIG. 1 – Adapted mesh : 17300 elements, 34989 nodes

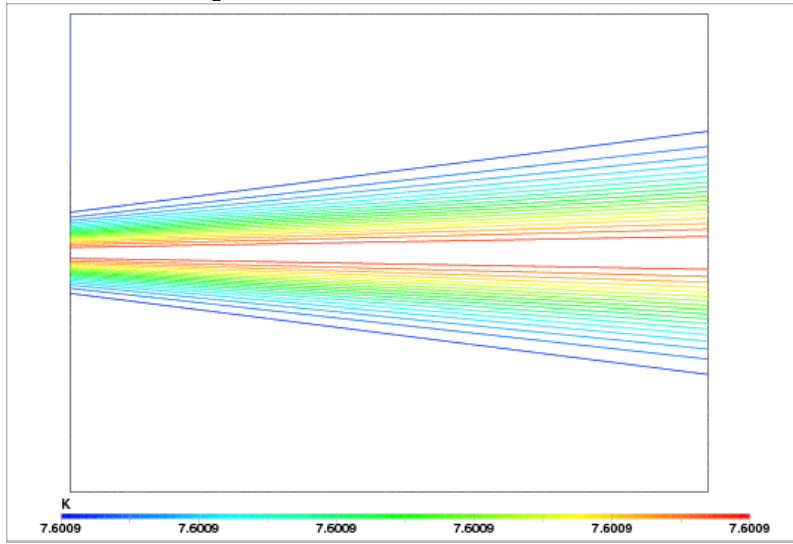


FIG. 2 –  $K$

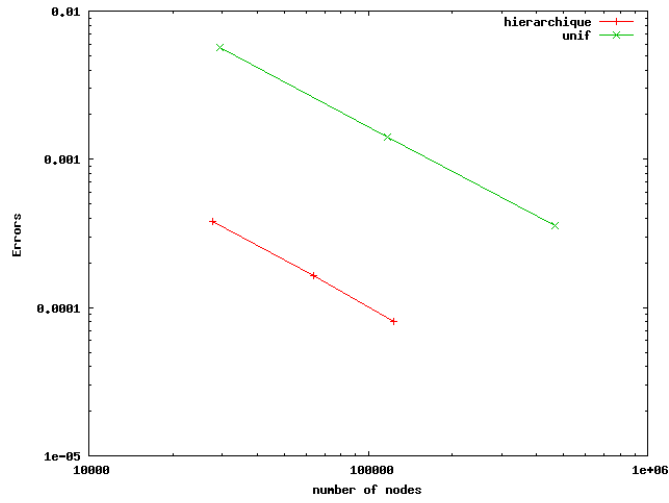
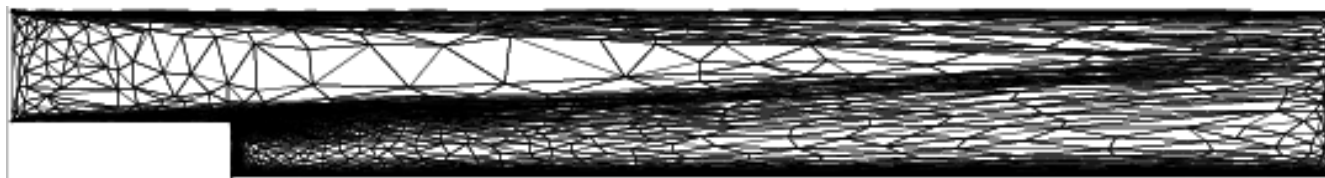
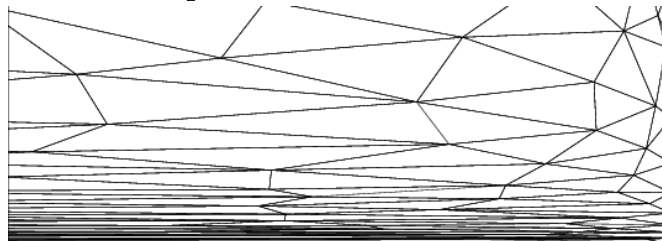


FIG. 3 – Energy norm of the error



Adapted mesh : 8094 elements



Zoom on the adapted mesh from  $x = 10L$  to  $x = 20L$

FIG. 4 – Computational meshes for the backward facing step

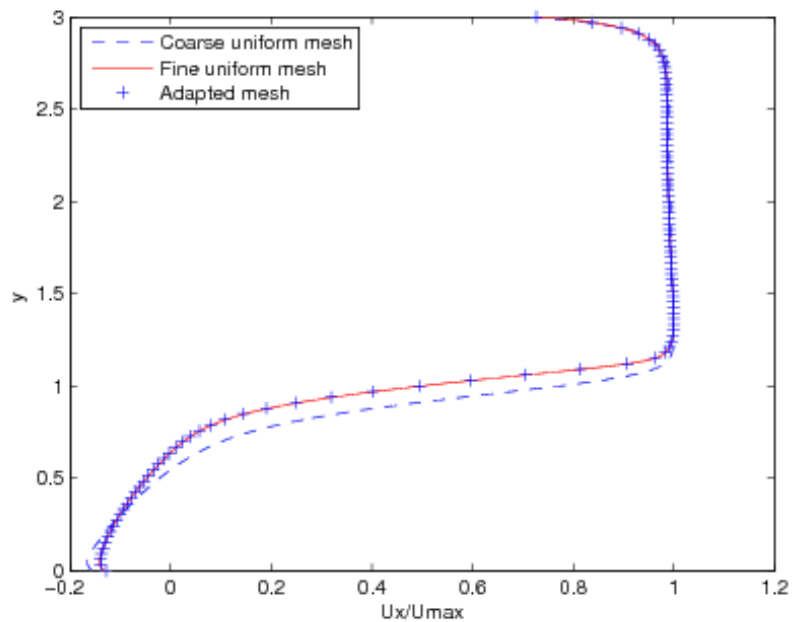


FIG. 5 – Velocity profile in the backward facing step, at a distance  $x = 4L/3$  after the step