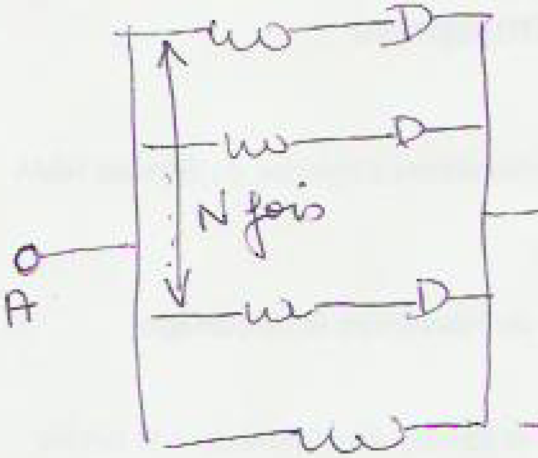
Modèle de Maxwell Generalisé Uniaxiale

- Supposons que l'~~ea~~ soit en 1-D ~~a~~
- Supposons qu'on ait N cellules de Maxwell et un systeme generalisé :



Pour chaque cellules on a ε_i σ_i 1, .., N

Pour le ressort on a σ_0 et ε_0

En parallele :

- les déformat^ns^ ε_i s'equilibrent $i = 0, .., N$
- les contraintes σ_i s'additionnent $i = 0, .., N$

Pourquoi ?

On applique un déplacement au points A et B sur notre "corps" 1D. Étant 1D toutes les deformations ε_i (0, .., N) sont les mêmes (elles s'equilibrent)

Pour la contrainte, le pt A (ou B) subit une "traction" qui est la somme des tractions de chaque "bras" (0, ..., N)

Conclusion :

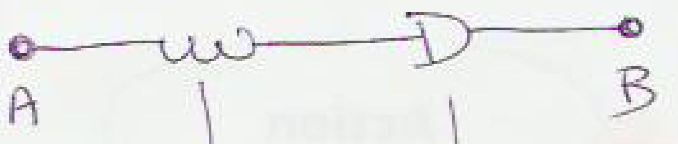
$$\varepsilon = \varepsilon_i \qquad i = 0, \dots, N \qquad (1)$$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{N} \sigma_i = E_0 \varepsilon + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \qquad (2)$$

Encore un modèle 1-D

Mais en série.

c'est une cellule de Maxwell



$$\underbrace{\sigma_R = E \varepsilon_R \ (3)}_{\text{Hooke (solide)}} \qquad \underbrace{\sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_v \ (4)}_{\text{Newton (fluide)}}$$

En série :

- Les contrainte s'equilibrent $\sigma_R = \sigma_v = \sigma_{tot}$
- Les deformation s'additionnent $\varepsilon = \varepsilon_R + \varepsilon_v$

Pourquoi ?

On applique un deplacement au pt A et B sur notre corps 1D. Étant a l'équilibre les contraintes subit a chaque bout s'égalent

donc $\sigma_R = \sigma_V = \sigma$ (5)

Pour les deformations on a que deux composantes "mobile" il est clair que la deformations totale doit être la somme des deformat^ons de chacunes des composante:

$$\varepsilon = \varepsilon_R + \varepsilon_V \quad (6)$$

Partant de (6):

$$E\varepsilon = E\varepsilon_R + E\varepsilon_V \overset{(3)}{=} \sigma_R + E\varepsilon_V \overset{(5)}{=} \sigma + E\varepsilon_V$$

On peut deriver:

$$E\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + E\dot{\varepsilon}_V \overset{\substack{(4)\\ \text{Newton!}}}{=} \dot{\sigma} + \frac{E\sigma}{\eta}$$

E est constant ici

Donc pour la cellule Maxwell on a

$$\boxed{E\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma}$$

On va prendre $\sigma(0)=0$ (materiau au repos initialement).

On peut montrer que

$$\sigma(t) = E\int_0^t e^{(s-t)\frac{E}{\eta}}\,\dot{\varepsilon}(s)\,ds \quad (7)$$

<u>Demo</u> ($\sigma(0)=0$ trivial)

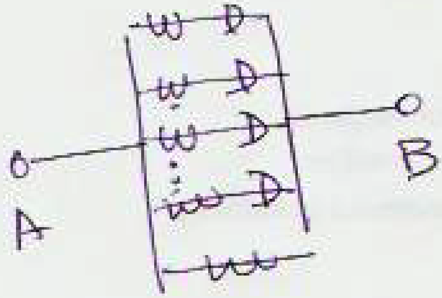
$$\dot{\sigma}(t) = \frac{d}{dt}\left(E\,e^{-\frac{tE}{\eta}}\int_0^t e^{s\frac{E}{\eta}}\,\dot{\varepsilon}(s)\,ds\right)$$

$$= -\frac{E}{\eta}\sigma(t) + E\,e^{-\frac{tE}{\eta}}\left(e^{t\frac{E}{\eta}}\dot{\varepsilon}(t)\right)$$

$$= -\frac{E}{\eta}\sigma(t) + E\,\dot{\varepsilon}(t) \qquad \blacksquare$$

Revenons à notre solide Maxwell généralisé uniaxiale:

pour chaque cellule de Maxwell on a (7)



$$\sigma_i(t) = \int_0^t E_i e^{(s-t)\frac{E_i}{\eta_i}} \dot{\varepsilon}_i(s)\, ds \qquad i = 1, \dots, N$$

où E_i, η_i sont les coefficients du ressort et de l'amortisseur

Et pour le ressort: $\sigma_0(t) = E_0 \varepsilon_0(t)$

Par (1) on a que

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \dots = \varepsilon_N = \varepsilon \qquad \forall t$$

Alors
$$\begin{cases} \sigma_i(t) = \int_0^t E_i e^{(s-t)\frac{E_i}{\eta_i}} \dot{\varepsilon}(s)\, ds & i = 1, \dots, N \\ \sigma_0(t) = E_0 \varepsilon(t) \end{cases}$$

et par (2)

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t E_i e^{(s-t)\frac{E_i}{\eta_i}} \dot{\varepsilon}(s)\, ds$$

Pour "étendre" a 3D il faut voir le tout comme une *superposition* d'effort.

Pour chaque deformations dans la direction 1-D "kl" on produira une contrainte 1-D dans la direction "ij" :

$$\sigma_{ij\cancel{kl}}(t) = E^0_{ijkl}\varepsilon_{kl}(t) + \sum_{\mu=1}^{N}\int_0^t E^\mu_{ijkl}\, e^{(s-t)\frac{E^\mu_{ijkl}}{\eta^\mu_{ijkl}}}\,\dot{\varepsilon}_{kl}(t)\,ds$$

μ = # cellule Maxwell

et On n'a pas fait de somme sur les indices répétés.

On applique ensuite la superposition (on fait la somme sur k et l !)

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{kl}\sigma_{ijkl}(t) = E^0_{ijkl}\varepsilon_{kl}(t) + \sum_{\mu=1}^{N}\int_0^t E^\mu_{ijkl}\, e^{(s-t)\frac{E^\mu_{ijkl}}{\eta_{ijkl}}}\,\dot{\varepsilon}_{kl}(s)\,ds$$

c'est la loi de comportement pour un materiau suivant un modèle de Maxwell généralisé 3D orthotrope (pas d'hypothese sur E^μ_{ijkl} et η^μ_{ijkl})

Pour le vieillissant voir ~~le texte paton~~ ~~article~~ article/PPT