

**Introduction à la  
méthode des éléments finis  
pour le cours MEF++**

André Fortin  
Professeur titulaire  
GIREF  
Département de mathématiques et de statistique  
Université Laval

17 mai 2002



# Avant-propos

Ce texte est une courte introduction aux principales étapes de l'implantation de la méthode des éléments finis. Il servira de base théorique pour le cours d'introduction à MEF++, version 2.0. Dans la mesure du possible, nous essaierons de garder des notations similaires à celles utilisées dans MEF++. Bien entendu, il ne sera pas possible d'entrer dans les détails et nous vous suggérons à ce sujet deux références

1. Fortin A., Garon A., *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, Notes de cours.
2. Dhatt, Touzot, *Introduction à la méthode des éléments finis*, Presses de l'Université Laval, 1981.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Éléments finis multidimensionnels</b>	<b>1</b>
1.1	Problème type	1
1.1.1	La géométrie	2
1.1.2	Le maillage	3
1.1.3	Les noeuds	3
1.1.4	Les degrés de liberté	3
1.2	Formulation variationnelle	4
1.2.1	Formulation variationnelle élémentaire	5
1.2.2	Notation matricielle	7
1.3	Transformation géométrique	7
1.4	Évaluation du système élémentaire	13
1.4.1	Intégration numérique	13
1.5	Assemblage des matrices élémentaires	14
1.6	Résolution du système linéaire global	14
1.7	Présentation des résultats	15
<b>A</b>	<b>Rappels mathématiques</b>	<b>17</b>
A.1	Théorème de la divergence	17
<b>B</b>	<b>L'interpolation de Lagrange</b>	<b>21</b>
B.1	Interpolation en dimension 1	22
B.2	Interpolation en dimension 2	24
B.2.1	Interpolation sur les triangles	25
B.2.2	Sur les quadrilatères	28
B.3	Interpolation en dimension 3	31
B.3.1	Sur les tétraèdres	31
<b>C</b>	<b>L'intégration numérique</b>	<b>33</b>
C.1	En dimension 1	33
C.2	En dimension 2 ou 3	36
C.2.1	Sur les quadrilatères	36
C.2.2	Sur les triangles	37
C.2.3	Sur les tétraèdres	37

# Chapitre 1

## Éléments finis multidimensionnels

### 1.1 Problème type

Dans ce court exposé, nous allons introduire un problème type, de nature *a priori* académique, mais qui possède de nombreuses applications. On fera le développement en dimension 3, les autres cas étant faciles à déduire. Nous considérerons l'équation aux dérivées partielles suivante :

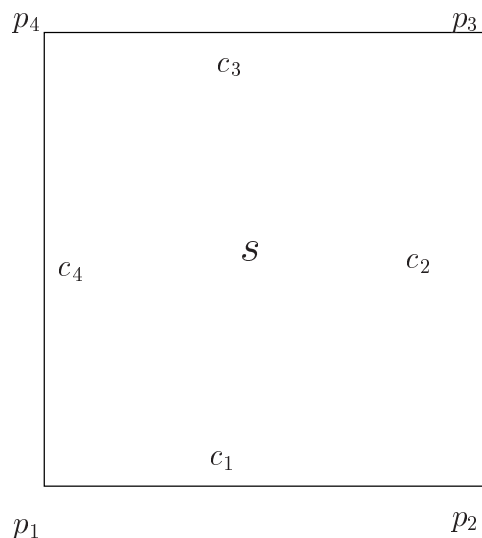
$$\begin{aligned} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u) &= r(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u) \cdot \mathbf{n} &= h(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où l'on a introduit les notations suivantes :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_{xx}(\mathbf{x}) & D_{xy}(\mathbf{x}) & D_{xz}(\mathbf{x}) \\ D_{xy}(\mathbf{x}) & D_{yy}(\mathbf{x}) & D_{yz}(\mathbf{x}) \\ D_{xz}(\mathbf{x}) & D_{yz}(\mathbf{x}) & D_{zz}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La variable scalaire inconnue  $u$  peut désigner une température, un potentiel électrique, etc. L'expression « $\cdot$ » dénote le produit scalaire de 2 vecteurs et l'opérateur « $\nabla$ » dénote la divergence d'un vecteur. Les fonctions  $p(\mathbf{x})$ ,  $r(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$ ,  $h(\mathbf{x})$  et la matrice symétrique (ou le tenseur symétrique)  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  sont supposées connues sur le domaine  $\Omega$  (ou sa frontière). Cette matrice contiendra les coefficients de diffusion suivant les différents axes de coordonnées. Dans plusieurs situations pratiques, la matrice  $\mathbf{D}$  sera de la forme  $k\mathbf{I}$  où  $k$  est une constante et  $\mathbf{I}$  la matrice identité. On aura alors  $(\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u) = k\nabla u$ .

Nous supposons de plus que les frontières  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  constituent une partition de la frontière  $\Gamma$  du domaine c.-à-d.  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  et  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$ . La première condition aux limites sur  $\Gamma_0$  est



**Figure 1.1** - Géométrie, lieux et entités géométriques

dite de Dirichlet tandis que la deuxième est dite de Neumann. Le traitement de ces deux sortes de conditions aux limites est fort différent, comme nous allons le constater.

La méthode des éléments finis nous permettra de construire une approximation de la variable inconnue  $u$ . Cette approximation sera construite à l'aide de polynômes qui seront définis sur des sous-domaines du domaine  $\Omega$ . Ces sous-domaines constitue le maillage. MEF++ permet l'utilisation simultanée de plusieurs types d'éléments.

### 1.1.1 La géométrie

On résout généralement un problème d'éléments finis à l'intérieur d'un domaine que nous avons noté  $\Omega$ . Ce domaine contient une frontière qui peut à son tour être décomposée en différentes régions. La *géométrie*, au sens de MEF++ est donc constituée de points, courbes et surfaces (que l'on nomme *lieux géométriques* qui définissent le domaine et ses frontières. On regroupe ensuite les lieux géométriques en entités géométriques, sur lesquelles on pourra définir les conditions aux limites ou assigner les propriétés physiques du problème (conductivité thermique, densité, viscosité, etc.)

Par exemple, si on souhaite résoudre un problème à l'intérieur d'un domaine de forme carrée, la géométrie est donc le carré, qui est constituée de 4 points (les sommets  $p_1$  à  $p_4$ ), de 4 courbes (les côtés  $c_1$  à  $c_4$ ) et d'une surface  $S$  qui est l'intérieur du carré. Ce sont les 9 lieux géométriques de cette géométrie. Si on veut imposer une condition aux limites sur la paroi supérieure du carré, on peut définir une entité géométrique constituée des 2 sommets  $p_3$  et  $p_4$ , et du côté  $c_3$ .

### 1.1.2 Le maillage

Le domaine  $\Omega$  est ensuite découpé en sous-domaines de forme géométrique simple que l'on nomme *éléments*. Décomposer un domaine de forme quelconque en éléments n'est pas une tâche facile, particulièrement en dimension 2 ou 3. Plusieurs techniques de génération de maillage existent avec des avantages et inconvénients de toutes sortes. Citons par exemple les travaux de Trépanier [?] avec le logiciel ADX et ceux de Coupez [?].

Avant de parler de maillage, il faut décider de la forme géométrique des éléments. En dimension 1, ce choix est facile mais déjà en dimension 2, des variantes existent. Il faut choisir une forme géométrique simple. MEF++ permet d'utiliser les triangles et les quadrilatères tandis qu'en dimension 3 les tétraèdres, les prismes à base triangulaire et les hexaèdres (briques) sont disponibles. En fait, la vaste majorité des maillages modernes produisent des triangles en dimension 2 et des tétraèdres en dimension 3. Il est en effet beaucoup plus difficile de décomposer un domaine en quadrilatères (en dimension 2) et en hexaèdres (en dimension 3).

### 1.1.3 Les noeuds

Sur chaque élément  $K$ , on définit  $n_G$  *noeuds géométriques*. Les noeuds géométriques correspondent souvent (mais pas toujours) aux sommets du triangle, du quadrilatère, du tétraèdre, etc. Le choix des noeuds géométriques déterminera la transformation à l'élément de référence.

On introduit également les  $n_C$  *noeuds de calcul* où on évaluera les valeurs des variables inconnues du problème. On supposera ici que les noeuds de calcul comprennent les noeuds géométriques, bien que ce ne soit pas toujours le cas.

### 1.1.4 Les degrés de liberté

On associe à chaque noeud de calcul un certain nombre de degrés de liberté (au total  $n_D$  sur chaque élément), dépendant du nombre de variables du problème. Dans le cas de l'équation 1.1, chaque noeud de calcul se verra attribué un degré de liberté, car il n'y a qu'une variable inconnue dans ce problème. La valeur de certains de ces degrés de liberté sera fixée par les conditions de Dirichlet. Pour les fins de cet exposé, on numérotera en dernier les degrés de liberté qui sont imposés par les conditions aux limites essentielles du problème donné. On a donc la partition :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{nddl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^I \\ U^C \end{bmatrix}$$

où  $nddl$  désigne le nombre total de degrés de liberté du maillage. Ce vecteur se décompose en 2 parties distinctes :  $U^C$  est la partie de  $U$  qui est connue (d'où l'indice  $C$ ) en vertu des conditions de Dirichlet imposées. Le reste est noté  $U^I$  ( $I$  pour inconnu) et sera éventuellement calculé. Nous reviendrons sur cette partition de  $U$  lors de l'imposition des conditions aux limites et lors de la résolution du système global.

À chaque degré de liberté, on associe une fonction d'interpolation qui sera construite élément par élément. La méthode de Ritz-Galerkin nous mènera à la résolution d'un système linéaire global

de la forme :

$$AU = F \quad (1.2)$$

## 1.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle s'obtient à partir de l'équation aux dérivées partielles de départ en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , après avoir multiplié par une fonction test  $v(\mathbf{x})$  s'annulant sur  $\Gamma_0$  puisqu'on y impose la variable  $u$ , c'est-à-dire une condition de Dirichlet. On interprète la fonction  $v$  comme une variation (d'où la notation  $v$ ) de la variable  $u$ . Là où la variable  $u$  est fixée par une condition de Dirichlet,  $v$  s'annule. On obtient ainsi :

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u)v(\mathbf{x}) dV = \int_{\Omega} r(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV$$

On intègre ensuite le deuxième terme par parties à l'aide de la relation A.5 :

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dV = \int_{\Omega} r(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV + \int_{\Gamma} ((\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}) ds$$

On a ainsi introduit la variable secondaire  $S_n(\mathbf{x})$  définie par :

$$S_n(\mathbf{x}) = (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u) \cdot \mathbf{n}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal extérieur à la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ . L'imposition de la variable scalaire  $S_n(\mathbf{x})$  est la condition dite *naturelle* de ce problème ou condition de Neumann. Dans le cas où  $D = kI$ , on a :

$$S_n(\mathbf{x}) = (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u) \cdot \mathbf{n} = k\nabla u \cdot \mathbf{n} = k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$$

Si on regarde l'intégrale de bord de la formulation variationnelle, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} ((\mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n})v(\mathbf{x}) ds &= \int_{\Gamma_0} S_n(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) ds + \int_{\Gamma_1} S_n(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) ds \\ &= \int_{\Gamma_1} S_n(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) ds \\ &= \int_{\Gamma_1} h(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

en vertu de la deuxième condition aux limites dans le système 1.1 et puisque  $v(\mathbf{x}) = 0$  sur  $\Gamma_0$ . On constate que de deux choses l'une : soit on impose une condition de Dirichlet sur  $u$ , auquel cas la fonction test  $v$  s'annule, soit on impose une condition de Neumann et on doit connaître la condition de Neumann  $S_n(\mathbf{x})$ .

La formulation variationnelle s'écrit donc :

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dV = \int_{\Omega} r(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV + \int_{\Gamma_1} h(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) ds$$

Dans MEF++, on impose de travailler dans une formulation dite en *correction*. Cela consiste à poser

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \delta u(\mathbf{x})$$

où  $u_0(\mathbf{x})$  est une fonction vérifiant les conditions de Dirichlet supposée connue et que nous construirons éventuellement. On calculera donc en fait seulement la correction  $\delta u(\mathbf{x})$  qui possède des conditions de Dirichlet nulles. Cette façon de procéder facilite l'imposition des conditions de Dirichlet.

La formulation variationnelle devient donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p(\mathbf{x})\delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV + \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla \delta u) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dV \\ &= \int_{\Omega} r(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV - \int_{\Omega} p(\mathbf{x})u_0(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV - \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u_0) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dV \quad (1.3) \\ &+ \int_{\Gamma_1} h(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

Les intégrales précédentes sont calculées en sommant sur les éléments :

$$\begin{aligned} & \sum_K \left[ \int_K p(\mathbf{x})\delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV + \int_K (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla \delta u) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dV \right] \\ &= \sum_K \int_K r(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV - \sum_K \int_K p(\mathbf{x})u_0(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV - \sum_K \int_K -(\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u_0) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dV \\ &+ \sum_K \int_{\Gamma_1 \cap \partial K} h(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

### 1.2.1 Formulation variationnelle élémentaire

La formulation variationnelle élémentaire s'obtient de la même manière que précédemment mais en intégrant sur un élément  $K$  au lieu d'intégrer sur tout le domaine  $\Omega$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \int_K p(\mathbf{x})\delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV + \int_K (\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla \delta u) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dV \\ &= \int_K r(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV - \int_K p(\mathbf{x})u_0(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV - \int_K -(\mathbf{D}(\mathbf{x})\nabla u_0) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dV \quad (1.4) \\ &+ \int_{\partial K} S_n^K(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

où  $S_n^K = (\mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n}^K$  et  $\mathbf{n}^K$  est le vecteur normal extérieur à la frontière  $\partial K$  de l'élément  $K$ . On peut ensuite montrer que :

$$\sum_K \int_{\partial K} S_n^K(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) ds = \int_{\Gamma_1} h(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) ds$$

Dans MEF++, les conditions de Neumann font l'objet d'un assemblage spécial où l'on parcourt les faces des éléments situés sur la frontière  $\Gamma_1$  (les côtés en dimension 2). Nous ne nous en préoccupons que très peu pour le moment.

On applique la méthode de Ritz sur chaque élément  $K$  en posant :

$$\delta u(\mathbf{x})|_K \simeq \delta u^K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_D} \delta u_j^K N_j^K(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

où les  $N_j^K(\mathbf{x})$  sont les fonctions d'interpolation sur l'élément  $K$ . Remplaçant dans la formulation variationnelle élémentaire 1.4, on trouve :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_D} \delta u_j^K \int_K (p(\mathbf{x}) N_j^K(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dV + (\mathbf{D}(\mathbf{x}) \nabla N_j^K(\mathbf{x})) \cdot \nabla v) dV \\ &= \int_K r(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dV - \int_K p(\mathbf{x}) u_0(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dV - \int_K -(\mathbf{D}(\mathbf{x}) \nabla u_0) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dV \\ &+ \int_{\partial K} S_n^K(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

Pour obtenir le système élémentaire, on prend successivement  $v(\mathbf{x}) = N_i^K(\mathbf{x})$ , pour  $i$  allant de 1 jusqu'à  $n_D$ . On obtient ainsi le système élémentaire de dimension  $n_D$  :

$$A^K \delta U^K = F^K$$

où :

$$\begin{aligned} A_{ij}^K &= \int_K \left( p(\mathbf{x}) N_j^K(\mathbf{x}) N_i^K(\mathbf{x}) dV + \int_K (\mathbf{D}(\mathbf{x}) \nabla N_j^K(\mathbf{x})) \cdot \nabla N_i^K(\mathbf{x}) \right) dV \\ F_i^K &= \int_K r(\mathbf{x}) N_i^K(\mathbf{x}) dV - \int_K p(\mathbf{x}) u_0(\mathbf{x}) N_i^K(\mathbf{x}) dV - \int_K -(\mathbf{D}(\mathbf{x}) \nabla u_0) \cdot \nabla N_i^K(\mathbf{x}) dV + \int_{\partial K} S_n^K(\mathbf{x}) N_i^K(\mathbf{x}) ds \end{aligned}$$

Le premier terme de la matrice élémentaire est souvent appelé *matrice masse* tandis que le deuxième est appelé *matrice de rigidité*, faisant ainsi référence aux origines de la méthode des éléments finis en structures. Chacun des termes constituant la matrice  $A^K$  et le second membre  $F^K$  est appelé *terme de formulation* et peut faire l'objet d'une classe séparée. On peut toutefois les regrouper à l'intérieur d'une seule classe pour éviter une prolifération parfois inutile de classes. Autrement dit, une formulation variationnelle est constituée d'un ou plusieurs termes de formulation. Il est ensuite facile d'intégrer dans MEF++ des termes de formulation déjà existants et ceux qui sont spécifiques à votre problème et que vous avez développés. Il en résulte une grande économie de temps de programmation..

### 1.2.2 Notation matricielle

Il existe une autre manière d'exprimer le système élémentaire, sous forme matricielle. On définit les matrices  $\mathbf{N}^K$  de dimension 1 par  $n_D$  et  $\mathbf{B}^K$  de dimension 3 par  $n_D$  :

$$\mathbf{N}^K = [ N_1^K(\mathbf{x}) \quad N_2^K(\mathbf{x}) \quad \dots \quad N_{n_D}^K(\mathbf{x}) ] \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^K = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^K(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial N_2^K(\mathbf{x})}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_D}^K(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^K(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial N_2^K(\mathbf{x})}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n_D}^K(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^K(\mathbf{x})}{\partial z} & \frac{\partial N_2^K(\mathbf{x})}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{n_D}^K(\mathbf{x})}{\partial z} \end{bmatrix}$$

On constate facilement que la matrice élémentaire  $A^K$  peut s'écrire :

$$A^K = \int_K p(\mathbf{x})(\mathbf{N}^K)^t \mathbf{N}^K dV + \int_K (\mathbf{B}^K)^t \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{B}^K dV$$

## 1.3 Transformation géométrique

C'est ici que le choix de la forme géométrique de l'élément et le choix des noeuds géométriques prennent beaucoup d'importance. La transformation géométrique permet d'effectuer tous les calculs sur un seul élément, dit de *référence*. On le notera  $\hat{K}$  et on y effectuera tous les calculs nécessaires à l'obtention du système élémentaire. Ceci n'est possible qu'après un changement de variables. Plusieurs choix d'éléments de référence sont envisageables et certains sont illustrés aux figures 1.2 à 1.4. Notons que MEF++ permet l'emploi de maillages comportant différents types d'éléments. Plusieurs éléments de référence pourront donc être utilisés. Il reste à déterminer la transformation. Pour éviter une lourdeur excessive de la notation, nous choisissons de prendre comme vecteur position  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  au lieu de  $(x_1, x_2, x_3)$ . De même sur l'élément de référence, on prendra  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ .

À chaque noeud géométrique  $\mathbf{x}_i^K = (x_i^K, y_i^K, z_i^K)$  de l'élément  $K$  doit correspondre un noeud géométrique  $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  sur l'élément de référence  $\hat{K}$ . La transformation  $T^K$  vérifie donc :

$$T^K(\boldsymbol{\xi}_i) = \mathbf{x}_i^K \quad \text{ou inversement} \quad (T^K)^{-1}(\mathbf{x}_i^K) = \boldsymbol{\xi}_i$$

Pour y arriver, il suffit de trouver une base de polynômes de dimension égale au nombre de noeuds géométriques. On construit ensuite  $n_G$  fonctions d'interpolation géométriques vérifiant :

$$L_i(\boldsymbol{\xi}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.6)$$

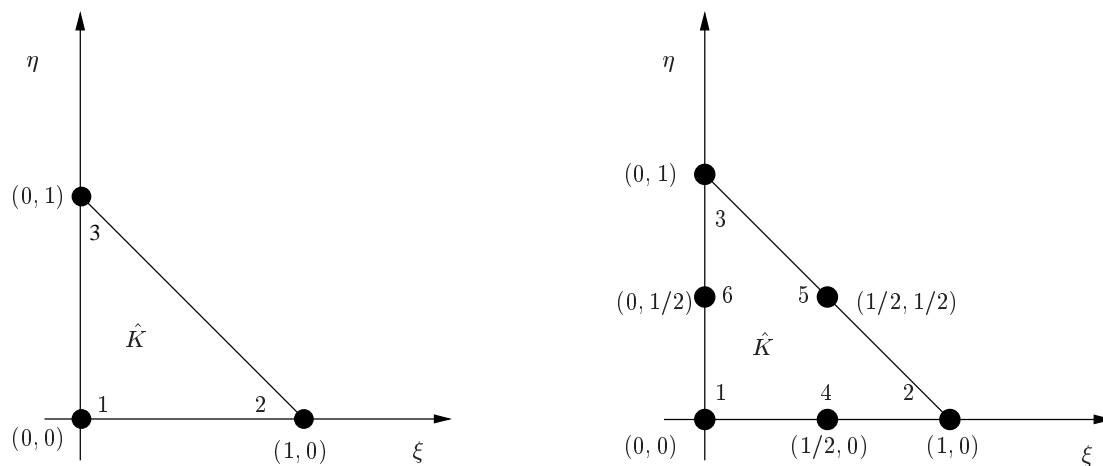


Figure 1.2 - Éléments  $\hat{K}$  triangulaires à 3 et 6 noeuds ( $n_G = 3$  et  $n_G = 6$ )

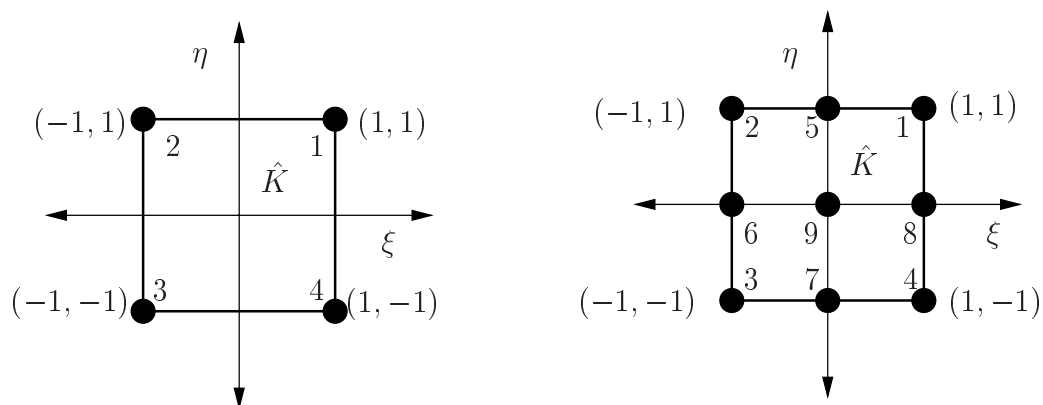
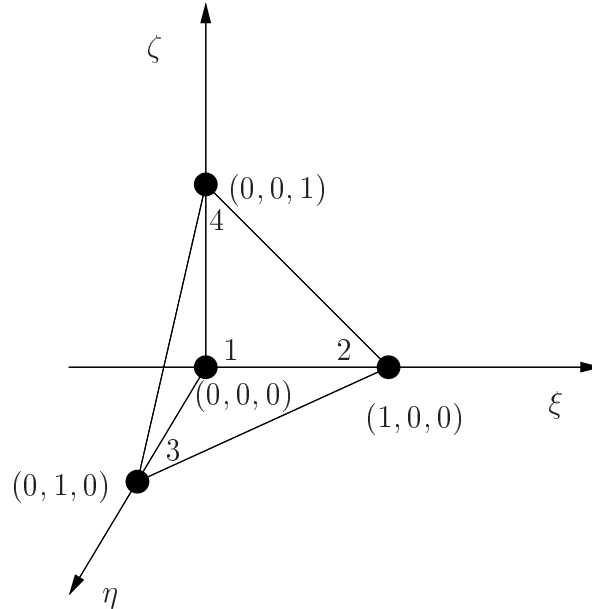


Figure 1.3 - Éléments  $\hat{K}$  quadrangulaires à 4 et 9 noeuds ( $n_G = 4$  et  $n_G = 9$ )



**Figure 1.4** - Élément de référence tétraédrique à 4 noeuds ( $n_G = 4$ )

C'est la base même de l'interpolation de Lagrange (voir l'annexe B) et les fonctions  $L_i(\boldsymbol{\xi})$  sont bien sûr les fonctions d'interpolation de Lagrange. Il est facile de vérifier que la transformation :

$$T^K : \quad \hat{K} \quad \rightarrow \quad K$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = (x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_G} \mathbf{x}_i^K L_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n_G} (x_i^K, y_i^K, z_i^K) L_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.7)$$

vérifie les propriétés désirées.

Il faudra ensuite transformer les dérivées des fonctions d'interpolation. C'est la technique classique de la dérivation en chaîne. Pour ce faire, il est utile d'introduire la *matrice jacobienne*  $\mathbf{J}^K$  associée et que l'on définit par :

$$\mathbf{J}^K = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne doit être inversible pour que la transformation  $T^K$  le soit aussi. Il suffit donc

que le déterminant  $J^K = \det(\mathbf{J}^K)$  de cette matrice soit non nul. On appelle ce déterminant le *jacobien* de la transformation.

Toute fonction d'interpolation  $N_i^K(x, y, z)$  est ainsi définie à partir de l'élément de référence par la relation :

$$N_i^K(x, y, z) = N_i^K(T^K(\xi, \eta, \zeta)) = \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)$$

Pour transformer les dérivées partielles, la dérivation en chaîne nous donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^K(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^K(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^K(x, y, z)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

et inversement :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^K(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^K(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^K(x, y, z)}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

En combinant les relations 1.8 et 1.9, on conclut que la matrice de l'équation 1.9 n'est autre que  $(\mathbf{J}^K)^{-t}$  c'est-à-dire la transposée de l'inverse de la matrice jacobienne. On a ainsi :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^K)^{-t} \quad (1.10)$$

On a donc :

$$\nabla N_i^K(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}^K)^{-t} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

ou sous forme matricielle :

$$\mathbf{B}^K = (\mathbf{J}^K)^{-t} \hat{\mathbf{B}}$$

où :

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_1(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_2(\xi)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \hat{N}_{n_D}(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{N}_1(\xi)}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_2(\xi)}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \hat{N}_{n_D}(\xi)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{N}_1(\xi)}{\partial \zeta} & \frac{\partial \hat{N}_2(\xi)}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial \hat{N}_{n_D}(\xi)}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

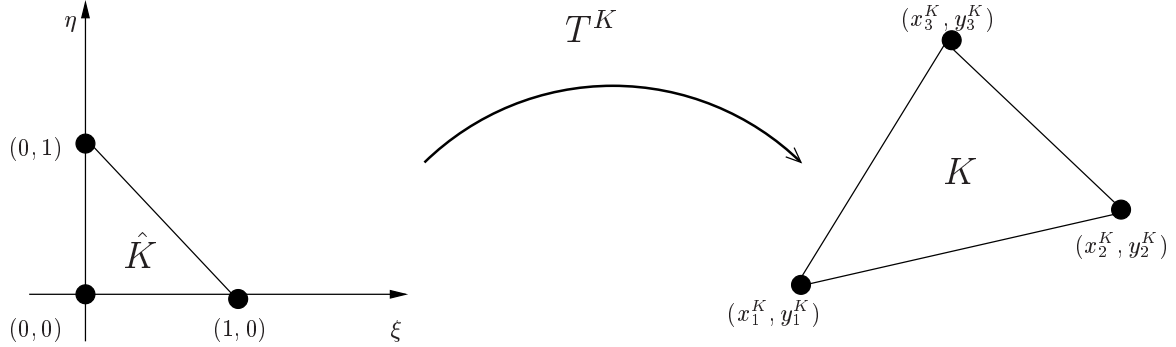
Le système élémentaire devient ensuite :

$$\begin{aligned} A_{ij}^K &= \int_K p(\mathbf{x}) N_j^K(\mathbf{x}) N_i^K(\mathbf{x}) dV + \int_K (\mathbf{D}(\mathbf{x}) \nabla N_j^K(\mathbf{x})) \cdot \nabla N_i^K(\mathbf{x}) dV \\ &= \int_{\hat{K}} p(T^K(\xi)) \hat{N}_j(\xi) \hat{N}_i(\xi) J^K d\hat{V} + \int_{\hat{K}} \mathbf{D}(T^K(\xi)) \nabla N_j^K(\mathbf{x}) \cdot \nabla N_i^K(\mathbf{x}) J^K d\hat{V} \\ F_i^K &= \int_{\hat{K}} r(T^K(\xi)) \hat{N}_i(\xi) J^K d\hat{V} - \int_{\hat{K}} p(T^K(\xi)) u_0(T^K(\xi)) \hat{N}_i(\xi) J^K d\hat{V} \\ &\quad - \int_{\hat{K}} (\mathbf{D}(T^K(\xi)) \nabla u_0) \cdot \nabla N_i^K(\mathbf{x}) J^K d\hat{V} + \int_{\partial K} S_n^K(\mathbf{x}) N_i^K(\mathbf{x}) ds \end{aligned} \quad (1.12)$$

### Remarque 1.1

Notons que l'évaluation des gradients  $\nabla N_i^K(\mathbf{x})$  est faite à l'aide de l'expression 1.11. Généralement, il n'y a nul besoin de construire explicitement les fonctions  $N_j^K(\mathbf{x})$  puisque nous ne travaillerons que sur l'élément de référence avec les fonction  $\hat{N}_i(\xi)$ . ♦

Remarquons enfin que l'intégrale sur la frontière des éléments n'a pas été transformée. On le fera plus tard si le besoin s'en fait sentir.



**Figure 1.5** - Transformation linéaire sur un triangle

Dans MEF++, le travail de transformation géométrique est effectué par la classe «champ géométrique» qui contient toute l'information nécessaire au passage à l'élément de référence. On peut obtenir la matrice jacobienne, le jacobien et faire la transformation complète des dérivées premières (et même des dérivées secondes si nécessaire).

### Exemple 1.1

Considérons en premier lieu des transformations linéaires en dimension 2. Tout d'abord sur le triangle à 3 noeuds géométriques ( $n_G = 3$ ) de la figure 1.5. L'élément de référence est indiqué à la figure 1.2. La transformation  $T^K$  s'écrit à l'aide des fonctions de Lagrange B.3 sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= T^K(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^3 L_i(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} x_i^K \\ y_i^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(\boldsymbol{\xi})x_1^K + L_2(\boldsymbol{\xi})x_2^K + L_3(\boldsymbol{\xi})x_3^K \\ L_1(\boldsymbol{\xi})y_1^K + L_2(\boldsymbol{\xi})y_2^K + L_3(\boldsymbol{\xi})y_3^K \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - \xi - \eta)x_1^K + \xi x_2^K + \eta x_3^K \\ (1 - \xi - \eta)y_1^K + \xi y_2^K + \eta y_3^K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que les fonctions  $L_i(\boldsymbol{\xi})$  vérifient la condition 1.6. La matrice jacobienne est alors :

$$\mathbf{J}^K = \begin{bmatrix} x_2^K - x_1^K & x_3^K - x_1^K \\ y_2^K - y_1^K & y_3^K - y_1^K \end{bmatrix}$$

Le jacobien  $J^K$  de cette transformation n'est nul que si les points  $\mathbf{x}_i^K$  sont colinéaires et donc si le triangle est dégénéré. Notons de plus que :

$$(\mathbf{J}^K)^{-t} = \frac{1}{J^K} \begin{bmatrix} y_3^K - y_1^K & y_1^K - y_2^K \\ x_1^K - x_3^K & x_2^K - x_1^K \end{bmatrix}$$

On montre de plus facilement que  $J^K = 2 \times \text{aire}(K)$  (en exercice). Notons ici que le jacobien est une constante sur l'élément  $K$  et ne dépend pas de  $\boldsymbol{\xi}$ . Ce ne sera pas toujours le cas. ■

## 1.4 Évaluation du système élémentaire

Pour évaluer les coefficients du système élémentaire 1.12, on recourt le plus souvent à l'intégration numérique, bien que l'intégration exacte puisse être utile dans les cas très simples (interpolation de bas degré et propriétés  $p(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  et  $r(\mathbf{x})$  constantes par exemple).

### 1.4.1 Intégration numérique

Après le passage à l'élément de référence, les différents coefficients du système élémentaire requièrent l'évaluation d'intégrales de la forme :

$$I = \int_{\hat{K}} g(\boldsymbol{\xi}) d\hat{V} \quad (1.13)$$

où la fonction  $g(\boldsymbol{\xi})$  fait intervenir les fonctions d'interpolation  $\hat{N}_i(\boldsymbol{\xi})$  et les propriétés physiques du problème. Dans la plupart des programmes d'éléments finis, on utilise les quadratures de Gauss qui consistent à approcher l'intégrale 1.13 par une expression de la forme :

$$\int_{\hat{K}} g(\boldsymbol{\xi}) d\hat{V} \simeq \sum_{i=1}^{m_G} w_i g(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (1.14)$$

qui soit la plus précise possible. Les  $w_i$  sont les poids d'intégration et les  $\xi_i$  sont les points d'intégration situés dans l'élément de référence. On présente un sommaire des techniques d'intégration numérique à l'annexe C.

Il n'y a pas de difficultés particulières mis-à-part le fait que le nombre de points d'intégration augmente lorsqu'on passe en dimension 2 ou 3. Ainsi, on trouvera à l'annexe C les points et les poids d'intégration de quelques unes des quadratures les plus utilisées en pratique. Ainsi sur les quadrilatères et les hexahédres, on peut utiliser les mêmes quadratures qu'en dimension 1 (voir la table C.1 par le biais des relations C.4 et C.5).

Sur les triangles ou les tétraèdres, on utilise les quadratures dites de Hammer données aux tables C.2 et C.3. Rappelons que le degré de précision de la quadrature est un critère important dans le choix de la quadrature appropriée au calcul des termes du système élémentaire.

La table C.1 résume quelques unes de ces quadratures en dimension 1. La dernière colonne de cette table fournit le degré des polynômes pour lesquels la quadrature de Gauss est exacte et qui vaut  $2m_G - 1$ . C'est ce que l'on appelle le *degré de précision* de la formule de quadrature. En pratique, on choisit le nombre de points de Gauss  $m_G$  en fonction des intégrales que l'on doit évaluer. Cela dépend donc du degré des fonctions  $\hat{N}_i(\boldsymbol{\xi})$  mais aussi des propriétés physiques.

Notons enfin que dans certaines situations, les quadratures de Gauss ne seront jamais exactes. Par exemple, si  $p(x) = 1/x$ , la fonction à intégrer n'est plus polynomiale et les quadratures de Gauss fournissent maintenant des approximations des coefficients du système élémentaire. Le choix du nombre de points de Gauss  $m_G$  est alors plus délicat. Enfin, il convient de souligner que le coût total de l'assemblage est proportionnel au nombre de points de Gauss utilisés et que le choix de la quadrature doit aussi tenir compte de cette contrainte.

## 1.5 Assemblage des matrices élémentaires

En pratique, la procédure d'assemblage requiert de suivre le chemin inverse de celui que nous venons de décrire et de partir du système élémentaire sur chaque élément  $K$  :

$$A^K \delta U^K = F^K$$

ou plus explicitement :

$$\begin{bmatrix} A_{11}^K & A_{12}^K & \cdots & A_{1n_D}^K \\ A_{21}^K & A_{22}^K & \cdots & A_{2n_D}^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_D 1}^K & A_{n_D 2}^K & \cdots & A_{n_D n_D}^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1^K \\ \delta u_2^K \\ \vdots \\ \delta u_{n_D}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^K \\ F_2^K \\ \vdots \\ F_{n_D}^K \end{bmatrix}$$

### Algorithme 1.1 :

L'algorithme pour l'assemblage est de la forme :

- Initialisation à 0 de la matrice  $A$  et du vecteur  $F$  ;
- Pour chaque élément  $K$  ;
  - Pour chaque degré de liberté  $k_1 = 1, 2, \dots, n_D$  ;
    - Numéro de la ligne :  $i = \text{adres}(K, k_1)$
    - $F_i \leftarrow F_i + F_{k_1}^K$
  - Pour chaque degré de liberté  $k_2 = 1, 2, \dots, n_D$  ;
    - Numéro de la colonne :  $j = \text{adres}(K, k_2)$
    - $A_{ij} \leftarrow A_{ij} + A_{k_1 k_2}^K$
  - Fin de la boucle sur les colonnes
- Fin de la boucle sur les lignes
- Fin de la boucle sur les éléments

▲

Bien sûr la taille des matrices élémentaires augmente avec la dimension d'espace et le degré des fonctions d'interpolation mais les principes généraux demeurent les mêmes. On utilise cet algorithme qui ne change nullement avec la dimension d'espace.

## 1.6 Résolution du système linéaire global

Une fois tous les systèmes élémentaires assemblés et en vertu de la convention utilisée, on obtient un système global de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta U^I \\ \delta U^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^C \\ F_2^I \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Le vecteur  $\delta U^C$  est connu et ne contient que des 0 en vertu des conditions essentielles et naturelles imposées. La partition de la matrice  $A$  suit directement celle du vecteur global des degrés de liberté  $U$ . Les matrices  $A_{11}$  et  $A_{22}$  sont toujours carrées et les matrices  $A_{12}$  et  $A_{21}$  sont rectangulaires.

MEF++ résoudra le système équivalent :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta U^I \\ \delta U^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^C \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Toutes les techniques classiques de résolution sont possibles. Dans MEF++, on a privilégié la librairie PETSc qui contient une panoplie complète de résolveurs et de préconditionneurs.

## 1.7 Présentation des résultats

Nous n'insisterons jamais assez sur l'importance d'un bon visualisateur, particulièrement en dimension 2 et 3. Si en dimension 1 on peut se débrouiller avec des instruments graphiques simples, ce n'est plus le cas en dimension supérieure. Pour les résultats qui suivent, nous utiliserons le logiciel VU développé par Benoît Ozell [?] et qui possède toutes les fonctionnalités requises en dimension 2 ou 3. PréGiref possède des outils de visualisation permettant de faire une première analyse des résultats. Pour une analyse plus fine, vous pouvez utiliser VU ou votre visualisateur préféré.



# Annexe A

## Rappels mathématiques

### A.1 Théorème de la divergence

Nous sommes en mesure de formuler le théorème de la divergence ou théorème de Gauss-Ostrogradski que nous ne démontrons pas (voir par exemple Swokowski, réf. [?]). Pour un rappel sur les intégrales multiples et les intégrales curvilignes ou surfaciques, on se référera à Philippin [?].

#### Théorème 1.1

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $R^n$  de frontière  $\Gamma$  (voir la figure A.1). Soit de plus  $\mathbf{n}$  le vecteur normal unitaire à  $\Gamma$  pointant vers l'extérieur de  $\Omega$ . Si  $\mathbf{u}$  est un champ de vecteurs dont les dérivées partielles premières sont continues sur  $\Omega$ , alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, dv = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (\text{A.1})$$

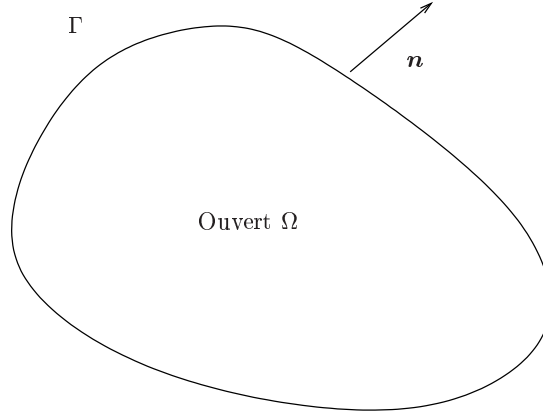
★

#### Remarque 1.1

Dans le théorème de la divergence, le terme de gauche est une intégrale double ou triple suivant que le problème est en 2 ou 3 dimensions. L'expression  $dv$  désigne donc un élément d'aire ou de volume, selon le cas. Le terme de droite est une intégrale curviligne si  $\Omega$  est un domaine bidimensionnel ou une intégrale surfacique en 3 dimensions (voir les exercices de fin de chapitre). De même,  $da$  désigne un élément de longueur ou d'aire, selon le cas. Le terme de droite de l'équation A.1 est le *flux* du champ  $\mathbf{u}$  à travers la surface  $\Gamma$ . ♦

Il existe de nombreuses formes sous lesquelles le théorème de la divergence est utile. Nous en explicitons quelques unes.

#### Corollaire 1.1

Figure A.1 - Ouvert  $\Omega$ 

Si le champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  a la forme particulière :

$$\mathbf{u} = (0, 0, \dots, f, 0, \dots, 0)$$

( $f$  apparaissant à la  $i^{\text{ième}}$  composante) où  $f(\mathbf{x})$  est une fonction dont les dérivées partielles premières sont continues, alors la divergence de  $\mathbf{u}$  s'écrit  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  et le théorème de la divergence s'énonce comme suit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dv = \int_{\Gamma} f n_i ds \quad (\text{A.2})$$

♠

### Démonstration :

La preuve vient immédiatement en se servant du théorème de la divergence.

### Corollaire 1.2

Soit  $h(\mathbf{x})$  une fonction dont les dérivées partielles premières sont continues et si  $\mathbf{u}$  satisfait les hypothèses du théorème de la divergence, alors :

$$\int_{\Omega} h \nabla \cdot \mathbf{u} dv + \int_{\Omega} \nabla h \cdot \mathbf{u} dv = \int_{\Gamma} h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{A.3})$$

En particulier, si le champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  a la forme particulière :

$$\mathbf{u} = (0, 0, \dots, f, 0, \dots, 0)$$

( $f$  apparaissant à la  $i^{\text{ième}}$  composante) où  $f(\mathbf{x})$  est une fonction dont les dérivées partielles premières sont continues, alors on a :

$$\int_{\Omega} h \frac{\partial f}{\partial x_i} dv + \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x_i} f dv = \int_{\Gamma} h f n_i ds \quad (\text{A.4})$$



**Démonstration :**

Il suffit de démontrer l'identité (voir les exercices de fin de chapitre) :

$$\nabla \cdot (h\mathbf{u}) = h\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla h \cdot \mathbf{u}$$

et d'appliquer directement le théorème de la divergence au champ  $\mathbf{u}_1 = (h\mathbf{u})$ .

La forme la plus répandue de ce théorème est sans doute la suivante.

**Corollaire 1.3**

Si le champ  $\mathbf{u}$  est le produit d'une fonction scalaire  $g$  avec le gradient d'une fonction scalaire  $f(\mathbf{x})$ , c.-à-d.  $\mathbf{u} = g\nabla f$ , alors on a :

$$\int_{\Omega} h\nabla \cdot (g\nabla f) dv + \int_{\Omega} g\nabla h \cdot \nabla f dv = \int_{\Gamma} hg\nabla f \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Gamma} h \left( g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \quad (\text{A.5})$$

En particulier, si  $g = 1$ , on a :

$$\int_{\Omega} h\nabla^2 f dv + \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla f dv = \int_{\Gamma} h \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} ds \quad (\text{A.6})$$



**Démonstration :**

La démonstration est immédiate en appliquant la relation A.3 et en utilisant la définition du laplacien.

On peut étendre certains des résultats précédents aux tenseurs d'ordre 2. En particulier, on le résultat suivant qui est très utile en élasticité linéaire et en mécanique des fluides.

**Corollaire 1.4**

Si  $\boldsymbol{\sigma}$  est un tenseur symétrique d'ordre 2 et si  $\mathbf{w}$  est un vecteur, alors on a :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{w} dv + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} dv = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} ds \quad (\text{A.7})$$





## Annexe B

# L'interpolation de Lagrange

Le but de ce chapitre est de rappeler les techniques classiques d'interpolation et en particulier la construction des fonctions d'interpolation de Lagrange. Dans le contexte de la méthode des éléments finis, nous nous limiterons à déterminer les fonctions d'interpolation seulement sur les éléments de référence. Nous procéderons de manière identique en dimension 1, 2 ou 3, même s'il existe des façons plus simples d'arriver au même résultat.

Deux espaces de polynômes jouent un rôle important en éléments finis. Dans un premier temps, nous noterons  $P_k$  l'espace des polynômes de degré  $k$ . On vérifie facilement que la dimension de l'espace  $P_k$  est :

$$\dim(P_k) = \frac{(n+k)!}{k!n!}$$

où  $n$  est la dimension d'espace ( $n = 1, 2$  ou  $3$ ). L'espace  $P_k$  est généralement utilisé sur les éléments triangulaires ou tétraédriques.

Nous travaillerons également avec l'espace  $Q_k$  des polynômes de degré  $k$  en chacune des variables d'espace. La dimension de cet espace est tout simplement :

$$\dim(Q_k) = (k+1)^n$$

En dimension 1, ces 2 espaces coïncident mais ils diffèrent en dimension 2 ou 3. L'espace  $Q_k$  est particulièrement adapté aux éléments quadrangulaires ou hexaédriques comme nous le verrons un peu plus loin dans ce chapitre. Bien sûr, il sera possible d'utiliser des variantes incomplètes des espaces  $P_k$  ou  $Q_k$  selon les besoins.

Quelque soit l'espace de polynômes utilisé, nous noterons  $N$  sa dimension. On se donne maintenant  $N$  points  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_N$  sur l'élément de référence. Les  $N$  fonctions de Lagrange  $L_i(\boldsymbol{\xi})$  sont des polynômes de  $P_k$  ou  $Q_k$  vérifiant :

$$\begin{cases} L_i(\boldsymbol{\xi}_i) = 1 & \forall i \\ L_i(\boldsymbol{\xi}_j) = 0 & \forall j \neq i \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Pour construire ces fonctions, il suffit de choisir une base généralement constituée de monômes de degré  $k$ . Nous noterons cette base de polynômes  $p_1(\boldsymbol{\xi}), p_2(\boldsymbol{\xi}), \dots, p_N(\boldsymbol{\xi})$ . Pour construire les

fonctions B.1, il suffit alors de poser :

$$L_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^N a_j p_j(\boldsymbol{\xi})$$

et d'imposer les contraintes de l'équation B.1 pour construire un système linéaire de dimension  $N$  sur  $N$  dont les inconnues sont les coefficients  $a_i$ . On obtient ainsi le système linéaire :

$$\begin{bmatrix} p_1(\boldsymbol{\xi}_1) & p_2(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & p_N(\boldsymbol{\xi}_1) \\ p_1(\boldsymbol{\xi}_2) & p_2(\boldsymbol{\xi}_2) & \cdots & p_N(\boldsymbol{\xi}_2) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ p_1(\boldsymbol{\xi}_i) & p_2(\boldsymbol{\xi}_i) & \cdots & p_N(\boldsymbol{\xi}_i) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_1(\boldsymbol{\xi}_N) & p_2(\boldsymbol{\xi}_N) & \cdots & p_N(\boldsymbol{\xi}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Le terme de droite est tout simplement le vecteur de base  $\mathbf{e}_i$  dont toutes les composantes sont nulles, sauf la  $i^e$ . La résolution est immédiate puisque la matrice est généralement inversible. Notons de plus que la matrice est la même pour toutes les fonctions de Lagrange. Seul le terme de droite change.

On répète ce processus pour chaque fonction de Lagrange. Une fois ce travail accompli, le polynôme :

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^N u_j L_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{B.3})$$

est l'unique polynôme de degré  $k$  dont la valeur en  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_i$  est  $u_i$ , ce qui constitue un polynôme d'interpolation.

## B.1 Interpolation en dimension 1

En dimension 1, l'élément de référence est l'intervalle  $] -1, 1[$ . La dimension de  $P_k$  est tout simplement  $N = k+1$  et on choisit une base naturelle de cet espace de polynômes soit  $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^k$ .

### Polynômes de degré 1

On choisit naturellement comme points d'interpolation les coordonnées  $\xi_1 = -1$  et  $\xi_2 = 1$  de l'élément de référence. La base de monômes est constituée des polynômes 1 et  $\xi$ . Le système B.2 devient pour la fonction  $L_1(\xi)$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tandis que pour la fonction  $L_2(\xi)$ , le système est :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polynômes de Lagrange $P_1$ (1D)		
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$
1	$\frac{1 - \xi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1 + \xi}{2}$	$\frac{1}{2}$

**TAB. B.1** - Polynômes de Lagrange  $P_1$  sur l'intervalle de référence

On obtient ainsi les solutions :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Ces deux fonctions sont illustrées à la figure ?? s'expriment à l'aide de la relation B.3 sous la forme :

$$L_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \text{ et } L_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}$$

Pour compléter le développement, la table B.1 donne l'expression des fonctions de Lagrange de même que les dérivées qui sont utiles pour l'évaluation des systèmes élémentaires comme celui de la relation ??.

### Polynômes de degré 2

On choisit naturellement comme points d'interpolation les coordonnées  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 1$  et  $\xi_3 = 0$  de l'élément de référence (nous avons numéroté les extrémités ou noeuds géométriques de l'élément en premier). La base de monômes est constituée des polynômes 1,  $\xi$  et  $\xi^2$ . Nous ne ferons explicitement le calcul que pour la première fonction de Lagrange. Le système B.2 s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & +1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dont la solution est :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

et en vertu de l'équation B.3, on a donc la fonction :

$$L_1(\xi) = 0 - \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

Polynômes de Lagrange $P_2$ (1D)		
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$
1	$\frac{\xi(\xi - 1)}{2}$	$\xi - 1/2$
2	$\frac{\xi(\xi + 1)}{2}$	$\xi + 1/2$
3	$1 - \xi^2$	$-2\xi$

**TAB. B.2** - Polynômes de Lagrange  $P_2$  sur l'intervalle de référence

De même, on obtient les autres fonctions de Lagrange listées à la table B.2.

### Remarque 2.2

On peut procéder plus simplement et construire les polynômes de Lagrange directement. Pour obtenir par exemple  $L_1(\xi)$  on se sert directement de l'équation B.1. En effet, cette fonction doit s'annuler en  $\xi = 0$  et en  $\xi = 1$ . Il suffit donc d'introduire des facteurs  $\xi$  et  $(\xi - 1)$ . De plus, elle doit prendre la valeur 1 en  $\xi = -1$ . Or la fonction  $\xi(\xi - 1)$  vaut 2 à cette endroit. Il suffit donc de diviser par 2 et on obtient :

$$L_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

On construit les autres fonctions de lagrange par un raisonnement similaire. Cette façon de procéder est tout-à-fait générale et fonctionne pour les polynômes de degré quelconque. ♦

## B.2 Interpolation en dimension 2

Contrairement au cas unidimensionnel, nous avons ici le choix de la forme géométrique des éléments. Le plus souvent, on utilise des triangles ou des quadrilatères. Les espaces de polynômes correspondants sont légèrement différents.

### B.2.1 Interpolation sur les triangles

Voyons en premier lieu le cas des triangles. L'espace de polynômes le plus fréquemment utilisé est l'espace  $P_k$  dont on construit une base à l'aide de la table suivante :

$$\begin{array}{l} P_0 : \\ P_1 : \\ P_2 : \\ P_3 : \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & \xi & & \eta \\ & & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 \\ \xi^3 & & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 \end{array} \right.$$

et ainsi de suite.

Pour déterminer uniquement un polynôme de degré  $k$ , on doit choisir  $N$  points d'interpolation distincts. Le choix des points d'interpolation est dicté par les propriétés de la fonction que l'on souhaite interpoler.

#### Polynômes de degré 1

Commençons par l'exemple le plus simple. Construisons les fonctions d'interpolation linéaires ( $P_1$ ) sur l'élément de référence. Du triangle précédent, la base de monômes est  $1, \xi, \eta$  de sorte que tout polynôme de  $P_1$  peut s'écrire :

$$p_1(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta$$

La dimension de cet espace étant 3, quoi de plus naturel que de choisir les 3 sommets du triangle  $\xi_1 = (0, 0)$ ,  $\xi_2 = (1, 0)$  et  $\xi_3 = (0, 1)$  (voir la figure 1.2). On va construire, suivant la démarche utilisée en dimension 1, des fonctions d'interpolation  $L_i(\xi, \eta)$  de sorte que :

$$L_j(\xi_i) = L_j(\xi_i, \eta_i) = \delta_i^j$$

Pour la première fonction d'interpolation, le système B.2 devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui donne immédiatement :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$L_1(\xi_i, \eta_i) = 1 - \xi - \eta$$

de manière similaire, on trouve les fonctions  $L_2(\xi, \eta)$  et  $L_3(\xi, \eta)$ . Le tableau B.3 résume la situation. Puisqu'elles sont également utiles pour l'évaluation des systèmes élémentaires, nous avons également indiqué les dérivées partielles des polynômes de Lagrange.

#### Remarque 2.3

On pourrait également choisir comme points d'interpolation les 3 milieux de côtés. On obtient les fonctions de Lagrange dites  $P_1$  non conformes. La particularité de cette construction est que

Polynômes de Lagrange $P_1$ (2D)			
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	$\xi$	1	0
3	$\eta$	0	1

**TAB. B.3** - Polynômes de Lagrange  $P_1$  sur le triangle de référence

l'approximation par éléments finis qui en résulte n'est pas continue aux interfaces des éléments et n'appartient donc pas à l'espace  $H^1(\Omega)$ . ♦

### Polynômes de degré 2

Une base de l'espace  $P_2$  est constituée des polynômes  $1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta$  et  $\eta^2$  ce qui constitue un espace de dimension 6 (voir la figure 1.2). Dans ce cas, on trouve le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_i$$

En résolvant ces 6 systèmes linéaires, on trouve les fonctions de la table B.4. Pour simplifier les expressions, on a posé :

$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$

Polynômes de Lagrange $P_2$ (2D)			
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$-\lambda(1 - 2\lambda)$	$1 - 4\lambda$	$1 - 4\lambda$
2	$-\xi(1 - 2\xi)$	$-1 + 4\xi$	0
3	$-\eta(1 - 2\eta)$	0	$-1 + 4\eta$
4	$4\xi\lambda$	$4(\lambda - \xi)$	$-4\xi$
5	$4\xi\eta$	$4\eta$	$4\xi$
6	$4\eta\lambda$	$-4\eta$	$4(\lambda - \eta)$

TAB. B.4 - Polynômes de Lagrange  $P_2$  sur le triangle de référence**Remarque 2.4**

On peut procéder différemment et éviter complètement la résolution d'un système linéaire. L'idée est de se servir de polynômes de degré 1 et d'annuler la fonction  $L_i(\xi, \eta)$  aux endroits appropriés. Pour illustrer ce processus, regardons le 3<sup>e</sup> noeud (de coordonnée  $(0, 1)$ ) de cet élément. La fonction  $L_3(\xi, \eta)$  doit s'annuler aux autres noeuds. On peut dans un premier temps introduire le facteur  $\eta$  (qui s'annule aux noeuds 1, 2 et 4) et le facteur  $\eta - 1/2$  qui à son tour s'annule aux noeuds 5 et 6. La fonction résultante  $\eta(\eta - 1/2)$  s'annule à tous les noeuds sauf le troisième. Par contre, à ce noeud, elle vaut  $1/2$  ce qui bien sûr est différent de 1. Il suffit alors de diviser par cette valeur et on obtient :

$$L_3(\xi, \eta) = \frac{\eta(\eta - 1/2)}{1/2} = -\eta(1 - 2\eta)$$

qui est ce que l'on avait trouvé. Ce raisonnement peut s'appliquer en toutes dimensions et on y recourra fréquemment. ♦

**Remarque 2.5**

On peut aussi construire des fonctions d'interpolation dites hiérarchiques. Cela consiste à utiliser des fonctions linéaires pour les 3 sommets de l'élément et des fonctions quadratiques sur les milieux de côtés. On obtient ainsi la table :

$L_1(\xi, \eta)$	$=$	$1 - \xi - \eta = \lambda$
$L_2(\xi, \eta)$	$=$	$\xi$
$L_3(\xi, \eta)$	$=$	$\eta$
$L_4(\xi, \eta)$	$=$	$4\xi\lambda$
$L_5(\xi, \eta)$	$=$	$4\xi\eta$
$L_6(\xi, \eta)$	$=$	$4\eta\lambda$

Ceci constitue bien également un base de  $P_2$  mais ces fonctions ne vérifient pas la condition B.1. Si on pose ensuite :

$$u(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 u_j L_j(\xi, \eta)$$

l'interprétation des inconnues  $u_j$  n'est plus la valeur de  $u(x)$  au noeud correspondant. En effet :

$$u(\xi_1) = u(0, 0) = u_1$$

et c'est également le cas pour les 2 autres sommets. Par contre :

$$u(\xi_4) = u(1/2, 0) = u_4 + \frac{(u_1 + u_2)}{2}$$

de sorte que le degré de liberté associé au quatrième noeud s'interprète par la relation :

$$u_4 = u(\xi_4) - \frac{(u_1 + u_2)}{2} = u(\xi_4) - \frac{(u(\xi_1) + u(\xi_2))}{2}$$

et l'interprétation des inconnues (éventuellement des degrés de liberté) est plus délicate. Il faudra être prudent lors de l'imposition des conditions aux limites essentielles si on utilise de telles bases.

◆

## B.2.2 Sur les quadrilatères

Nous utiliserons l'espace  $Q_k$  sur l'élément de référence  $[-1, 1]^2$ . Il est facile de construire une base pour cet espace puisqu'il suffit de faire le produit cartésien des ensembles  $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^k$  et  $1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^k$ .

### Polynôme de degré 1 ( $Q_1$ )

Le cas le plus simple est bien sûr  $Q_1$  dont la dimension est 4. Une base possible est  $1, \xi, \eta, \xi\eta$ . Il nous faut donc 4 points d'interpolation et les 4 coins semblent un choix idéal (voir la figure 1.3). On obtient les 4 fonctions de Lagrange toujours de la même façon et nous nous limiterons à les lister.

Polynômes de Lagrange $Q_1$ (2D)			
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 - \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 - \xi)$
2	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 + \xi)$
3	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)$
4	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)$

TAB. B.5 - Polynômes de Lagrange  $Q_1$  sur le carré de référence**Remarque 2.6**

Tout comme pour le cas triangulaire, on pourrait penser choisir comme points d'interpolation les 4 milieux de côtés soit les points  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(-1, 0)$ . Ce qui semble naturel ne fonctionne pas toujours. En effet, en se servant encore ici de la base  $1, \xi, \eta$  et  $\xi\eta$ , la matrice du système B.2 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et est singulière. La solution n'est donc pas unique et on peut facilement le constater puisque les fonctions  $0$  et  $\xi\eta$  sont toutes deux des fonctions de  $Q_1$  qui prennent les mêmes valeurs ( $0$ ) aux milieux des côtés. On ne peut donc pas choisir ces points d'interpolation pour construire des approximations non conformes, contrairement à ce que nous avons fait sur les triangles.  $\blacklozenge$

**Polynôme de degré 2 ( $Q_2$ )**

La dimension de l'espace  $Q_2$  est 9 et il semble naturel de choisir les points illustrés sur la figure 1.3. On construit ainsi les polynômes de Lagrange de la table B.6.

Polynômes de Lagrange $Q_2$ (2D)			
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 - \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 - 2\xi)(1 - \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 - 2\eta)$
2	$\frac{-1}{4}(1 + \xi)\xi(1 - \eta)\eta$	$\frac{-1}{4}(1 + 2\xi)(1 - \eta)\eta$	$\frac{-1}{4}(1 + \xi)\xi(1 - 2\eta)$
3	$\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 + \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 + 2\xi)(1 + \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 + 2\eta)$
4	$\frac{-1}{4}(1 - \xi)\xi(1 + \eta)\eta$	$\frac{-1}{4}(1 - 2\xi)(1 + \eta)\eta$	$\frac{-1}{4}(1 - \xi)\xi(1 + 2\eta)$
5	$\frac{-1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)\eta$	$\xi\eta(1 - \eta)$	$\frac{-1}{2}(1 - \xi^2)(1 - 2\eta)$
6	$\frac{1}{2}(1 + \xi)\xi(1 - \eta^2)$	$\frac{1}{2}(1 + 2\xi)(1 - \eta^2)$	$(1 + \xi)\xi\eta$
7	$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)\eta(1 + \eta)$	$-\xi\eta(1 + \eta)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + 2\eta)$
8	$\frac{-1}{2}\xi(1 - \xi)(1 - \eta^2)$	$\frac{-1}{2}(1 - 2\xi)(1 - \eta^2)$	$\xi(1 - \xi)\eta$
9	$\xi(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$	$-2\xi(1 - \eta^2)$	$-2(1 - \xi^2)\eta$

**TAB. B.6** - Polynômes de Lagrange  $Q_2$  sur le carré de référence

Polynômes de Lagrange $P_1$ (3D)				
$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial L_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial L_i}{\partial \zeta}$
1	$1 - \xi - \eta - \zeta$	-1	-1	-1
2	$\xi$	1	0	0
3	$\eta$	0	1	0
4	$\zeta$	0	0	1

TAB. B.7 - Polynômes de Lagrange  $P_1$  sur le tétraèdre de référence

### B.3 Interpolation en dimension 3

#### B.3.1 Sur les tétraèdres

En dimension 3, on utilise les monômes suivants pour établir la base de l'approximation :

$$\begin{array}{l}
 P_0 : \\
 P_1 : \\
 P_2 : \\
 P_3 :
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 1 \\
 \xi, \eta, \zeta, \\
 \xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \\
 \xi^3, \eta^3, \zeta^3, \xi^2\eta, \xi^2\zeta, \eta^2\zeta, \eta^2\xi, \zeta^2\xi, \zeta^2\eta, \xi\eta\zeta,
 \end{array} \right.$$

De manière similaire à celle présentée dans le cas bidimensionnel (voir la figure 1.4), on montre aisément que pour les fonctions de Lagrange de degré 1, on a le tableau B.7.



# Annexe C

## L'intégration numérique

L'intégration numérique est une composante essentielle de toute méthode d'éléments finis. S'il est toujours préférable d'utiliser l'intégration exacte lorsque cela est possible, on doit toutefois recourir fréquemment à l'intégration numérique si on souhaite développer des méthodes d'éléments finis relativement générales.

Tout comme pour l'interpolation de Lagrange, nous ferons le développement des différentes formules d'intégration numérique sur les éléments de référence puisque c'est là que sont effectuées toutes les intégrales en éléments finis.

### C.1 En dimension 1

Nous choisissons l'intervalle d'intégration  $[-1, 1]$  qui est l'élément de référence pour les problèmes en dimension 1. Nous avons vu au chapitre ?? comment passer d'un élément quelconque à cet élément de référence à l'aide du changement de variable ??.

On cherche à évaluer une expression de la forme :

$$I = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad (\text{C.1})$$

En éléments finis, la fonction  $g(\xi)$  fait intervenir les fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}_i(\xi)$  et leurs dérivées ainsi que les propriétés physiques du problème. Par exemple, on doit évaluer :

$$\int_{-1}^1 p \left( \frac{(x_1^K + x_2^K) + h^K \xi}{2} \right) \hat{\psi}_j(\xi) \hat{\psi}_i(\xi) \frac{h^K}{2} d\xi$$

qui est bien de la forme C.1. Dans la plupart des programmes d'éléments finis, on utilise les quadratures de Gauss qui consistent à approcher l'intégrale C.1 par une expression de la forme :

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \simeq \sum_{i=1}^{m_G} w_i g(\xi_i) \quad (\text{C.2})$$

qui soit la plus précise possible.

**Définition 3.1**

L'expression C.2 est appelée *quadrature de Gauss à  $m_G$  points*. Les  $\xi_i$  sont appelés *points d'intégration*, tandis que les coefficients  $w_i$  sont les *poids d'intégration*.

On choisit les points et les poids d'intégration de façon à ce que la quadrature C.2 soit exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible. De toute évidence, les points d'intégration  $\xi_i$  doivent tous être distincts les uns des autres et les poids d'intégration doivent être non nuls.

**Théorème 3.2**

La quadrature de Gauss à  $m_G$  points C.2 est exacte pour les polynômes de degré  $(2m_G - 1)$  et le terme d'erreur de cette approximation est donné par :

$$\frac{2^{2m_G+1}(m_G!)^4}{(2m_G+1)((2m_G)!)^3} g^{(2m_G)}(\mu) \quad \text{où } \mu \in [-1, 1] \quad \diamond \quad (\text{C.3})$$

★

La table C.1 résume les premières quadratures de Gauss en dimension 1 (voir Fortin, réf. [?]). La dernière colonne de cette table fournit le degré des polynômes pour lesquels la quadrature de Gauss est exacte et qui vaut  $2m_G - 1$ . C'est ce que l'on appelle le *degré de précision* de la formule de quadrature. En pratique, on choisit le nombre de points de Gauss  $m_G$  en fonction des intégrales que l'on doit évaluer.

**Exemple 3.1**

On veut évaluer :

$$I = \int_{-1}^{+1} \xi^2 + \xi \, dt$$

Il s'agit ici d'un problème très simple mais qui illustre bien ce qui peut se produire. La fonction à intégrer est polynômiale et une quadrature de Gauss adéquate permettra d'évaluer l'intégrale exactement. Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 2, la quadrature de Gauss à 2 points ( $m_G = 2$ ) suffira puisqu'elle est exacte pour des polynômes de degré jusqu'à 3 ( $2m_G - 1$ ). On a en effet :

$$\begin{aligned} I &= w_1(\xi_1^2 + \xi_1) + w_2(\xi_2^2 + \xi_2) \\ &= 1((-0,5773502629189625)^2 + (-0,5773502629189625)) \\ &\quad + 1((+0,5773502629189625)^2 + (+0,5773502629189625)) \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

soit la valeur exacte de l'intégrale. ■

Quadrature de Gauss (1D)			
$m_G$	Points d'intégration $\xi_i$	Poids d'intégration $w_i$	Degré de précision
1	0	2	1
2	-0,577 350 262 918 9625 +0,577 350 262 918 9625	1 1	3
3	-0,774 596 669 241 483 0,0 +0,774 596 669 241 483	0,555 555 555 555 556 0,888 888 888 888 889 0,555 555 555 555 556	5
4	-0,861 136 311 594 052 -0,339 981 043 584 856 +0,339 981 043 584 856 +0,861 136 311 594 052	0,347 854 845 137 454 0,652 145 154 862 545 0,652 145 154 862 545 0,347 854 845 137 454	7
5	-0,906 179 845 938 664 -0,538 469 310 105 683 0,0 +0,538 469 310 105 683 +0,906 179 845 938 664	0,236 926 885 056 189 0,478 628 670 499 365 0,568 888 889 888 889 0,478 628 670 499 365 0,236 926 885 056 189	9

TAB. C.1 - Intégration numérique sur l'intervalle de référence

**Exemple 3.2**

On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi(\xi+1)}{4}\right) d\xi$$

La quadrature de Gauss à 2 points donne l'approximation :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &\simeq \frac{\pi}{4} \left( \sin\left(\frac{\pi(\xi_1+1)}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi(\xi_2+1)}{4}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} (\sin(0,331 948 322) + \sin(1,238 848 005)) \\ &= 0,998 472 614 \end{aligned}$$

Si on tient compte du fait que l'on a évalué la fonction  $\sin x$  en seulement deux points, ce résultat

est d'une précision remarquable. Par ailleurs, la formule à trois points donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &\simeq \frac{\pi}{4} \left( w_1 \sin \left( \frac{\pi(\xi_1 + 1)}{4} \right) + w_2 \sin \left( \frac{\pi(\xi_2 + 1)}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. + w_3 \sin \left( \frac{\pi(\xi_3 + 1)}{4} \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{4} ((0,555\ 555\ 556) \sin(0,177\ 031\ 362) \\
&\quad + (0,888\ 888\ 889) \sin(0,785\ 398\ 164) \\
&\quad + (0,555\ 555\ 556) \sin(1,774\ 596\ 669)) \\
&= 1,000\ 008\ 1821
\end{aligned}$$

■

## C.2 En dimension 2 ou 3

### C.2.1 Sur les quadrilatères

C'est le cas le plus simple puisque l'on peut utiliser directement les techniques d'intégration numériques développées en dimension 1. Puisque dans ce cas nous avons choisi le carré  $[-1, 1]^2$  comme élément de référence, il suffit de constater que :

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta \simeq \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^{m_G} w_i g(\xi_i, \eta) \right) d\eta = \sum_{i=1}^{m_G} w_i \int_{-1}^1 g(\xi_i, \eta) d\eta \simeq \sum_{i=1}^{m_G} \sum_{j=1}^{m_G} w_i w_j g(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{C.4})$$

En quelque sorte, l'intégration numérique en dimension 2 sur le carré  $[-1, 1]^2$  consiste donc à utiliser les formules obtenues en dimension 1 pour chacune des variables. Il en est de même en dimension 3 sur le cube de référence  $[-1, 1]^3$  et on obtient de manière similaire :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \simeq \sum_{i=1}^{m_G} \sum_{j=1}^{m_G} \sum_{k=1}^{m_G} w_i w_j w_k g(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (\text{C.5})$$

#### Remarque 3.7

Il n'y a donc dans ce cas nul besoin de développer des méthodes d'intégration numérique particulière. Si la fonction à intégrer est un polynôme appartenant à l'espace  $Q_k$ , c'est-à-dire un polynôme de degré  $k$  en chacune des variables d'espace, il suffit de choisir une quadrature de Gauss en dimension 1 qui soit exacte pour les polynômes de degré  $k$  et utiliser les formules C.4 ou C.5. ♦

### C.2.2 Sur les triangles

Les formules d'intégration numériques sont plus difficiles à obtenir sur les triangles. On ne peut plus utiliser directement les formules en dimension 1. Le tableau C.2 fournit quelques unes des quadratures dites de Hammer.

On passe d'un triangle quelconque au triangle de référence à l'aide de la transformation 1.7. On utilise ensuite la relation :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} g(\xi, \eta) d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_i w_i g(\xi_i, \eta_i)$$

où les  $w_i$ ,  $\xi_i$  et  $\eta_i$  sont donnés dans la table C.2.

### C.2.3 Sur les tétraèdres

Sur les tétraèdres, il faut généralement utiliser encore plus de points d'intégration. La table C.3 donne quelques unes des formules de Hammer en dimension 3.

Quadrature de Hammer (2D)				
	Coordonnées des points d'intégration		Poids d'intégration	Degré de précision
$m_G$	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$	
1	+0,333 333 333 333 3333	+0,333 333 333 333 3333	+0,500 000 000 000 0000	1
3	+0,666 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667	+0,166 666 666 666 6667 +0,666 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667	+0,166 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667 +0,166 666 666 666 6667	2
4	+0,333 333 333 333 3333 +0,200 000 000 000 0000 +0,200 000 000 000 0000 +0,600 000 000 000 0000	+0,333 333 333 333 3333 +0,200 000 000 000 0000 +0,600 000 000 000 0000 +0,200 000 000 000 0000	-0,281 250 000 000 0000 +0,260 416 666 666 6667 +0,260 416 666 666 6667 +0,260 416 666 666 6667	3
6	+0,108 103 018 168 070 +0,445 948 490 915 965 +0,445 948 490 915 965 +0,816 847 572 980 459 +0,091 576 213 509 771 +0,091 576 213 509 771	+0,445 948 490 915 965 +0,108 103 018 168 070 +0,445 948 490 915 965 +0,091 576 213 509 771 +0,816 847 572 980 459 +0,091 576 213 509 771	+0,111 690 794 839 0055 +0,111 690 794 839 0055 +0,111 690 794 839 0055 +0,054 975 871 827 6610 +0,054 975 871 827 6610 +0,054 975 871 827 6610	4
12	+0,873 821 971 016 996 +0,063 089 014 491 502 +0,063 089 014 491 502 +0,501 426 509 658 179 +0,249 286 745 170 910 +0,249 286 745 170 910 +0,636 502 499 121 399 +0,636 502 499 121 399 +0,310 352 451 033 785 +0,310 352 451 033 785 +0,053 145 049 844 816 +0,053 145 049 844 816 +0,053 145 049 844 816	+0,063 089 014 491 502 +0,873 821 971 016 996 +0,063 089 014 491 502 +0,249 286 745 170 910 +0,501 426 509 658 179 +0,249 286 745 170 910 +0,310 352 451 033 785 +0,053 145 049 844 816 +0,636 502 499 121 399 +0,053 145 049 844 816 +0,310 352 451 033 785 +0,636 502 499 121 399	+0,025 422 453 185 1035 +0,025 422 453 185 1035 +0,025 422 453 185 1035 +0,058 393 137 863 1895 +0,058 393 137 863 1895 +0,058 393 137 863 1895 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870 +0,041 425 537 809 1870	6
16	+0,333 333 333 333 333 +0,081 414 823 414 454 +0,459 292 588 292 723 +0,459 292 588 292 723 +0,658 861 384 496 480 +0,170 569 307 751 760 +0,170 569 307 751 760 +0,898 905 543 365 938 +0,050 547 228 317 031 +0,050 547 228 317 031 +0,008 394 777 409 958 +0,008 394 777 409 958 +0,263 112 829 634 638 +0,263 112 829 634 638 +0,728 492 392 955 404 +0,728 492 392 955 404 +0,008 394 777 409 958 +0,263 112 829 634 638	+0,333 333 333 333 333 +0,459 292 588 292 723 +0,081 414 823 414 454 +0,459 292 588 292 723 +0,170 569 307 751 760 +0,658 861 384 496 480 +0,170 569 307 751 760 +0,050 547 228 317 031 +0,898 905 543 365 938 +0,050 547 228 317 031 +0,050 547 228 317 031 +0,263 112 829 634 638 +0,728 492 392 955 404 +0,008 394 777 409 958 +0,728 492 392 955 404 +0,008 394 777 409 958 +0,263 112 829 634 638	+0,072 157 803 838 8935 +0,047 545 817 133 6425 +0,047 545 817 133 6425 +0,047 545 817 133 6425 +0,051 608 685 267 3590 +0,051 608 685 267 3590 +0,051 608 685 267 3590 +0,016 229 248 811 5990 +0,016 229 248 811 5990 +0,016 229 248 811 5990 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175 +0,013 615 157 087 2175	8

TAB. C.2 - Intégration numérique sur le triangle de référence

Quadrature de Hammer (3D)			
Coordonnées des points d'intégration			Points d'intégration
$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$	$w_i$
Formule à 1 point, degré de précision = 1			
+0,250 000 000 000 000	+0,250 000 000 000 000	+0,250 000 000 000 000	+0,166 666 666 666 667
Formule à 4 points, degré de précision = 2			
+0,138 196 601 125 0105	+0,138 196 601 125 0105	+0,138 196 601 125 0105	+0,041 666 666 666 667
+0,138 196 601 125 0105	+0,138 196 601 125 0105	+0,585 410 196 624 9685	+0,041 666 666 666 667
+0,138 196 601 125 0105	+0,585 410 196 624 9685	+0,138 196 601 125 0105	+0,041 666 666 666 667
+0,585 410 196 624 9685	+0,138 196 601 125 0105	+0,138 196 601 125 0105	+0,041 666 666 666 667
Formule à 16 points, degré de précision = 4			
+0,771 642 902 067 2371	+0,076 119 032 644 254 30	+0,076 119 032 644 254 30	+0,008 395 632 350 020 469
+0,076 119 032 644 254 30	+0,771 642 902 067 2371	+0,076 119 032 644 254 30	+0,008 395 632 350 020 469
+0,076 119 032 644 254 30	+0,076 119 032 644 254 30	+0,771 642 902 067 2371	+0,008 395 632 350 020 469
+0,076 119 032 644 254 30	+0,076 119 032 644 254 30	+0,076 119 032 644 254 30	+0,008 395 632 350 020 469
+0,119 700 527 797 8019	+0,071 831 645 267 669 25	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,119 700 527 797 8019	+0,404 233 913 467 2644	+0,071 831 645 267 669 25	+0,011 090 344 772 215 398
+0,119 700 527 797 8019	+0,404 233 913 467 2644	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,071 831 645 267 669 25	+0,119 700 527 797 8019	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,071 831 645 267 669 25	+0,404 233 913 467 2644	+0,119 700 527 797 8019	+0,011 090 344 772 215 398
+0,071 831 645 267 669 25	+0,404 233 913 467 2644	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,119 700 527 797 8019	+0,071 831 645 267 669 25	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,119 700 527 797 8019	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,071 831 645 267 669 25	+0,119 700 527 797 8019	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,071 831 645 267 669 25	+0,404 233 913 467 2644	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,404 233 913 467 2644	+0,119 700 527 797 8019	+0,011 090 344 772 215 398
+0,404 233 913 467 2644	+0,404 233 913 467 2644	+0,071 831 645 267 669 25	+0,011 090 344 772 215 398

TAB. C.3 - Intégration numérique sur le tétraèdre de référence