

# Analyse et mise en œuvre de nouveaux algorithmes en méthodes spectrales

Driss Yakoubi

Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie  
sous la direction de **Christine Bernardi**  
et la co-direction de **Stéphane Del Pino**.

# Plan

- 1 Fluides turbulents
  - Modèle de fluides turbulents
  - Schéma itératif et Convergence
  - Unicité de la solution
  - Passage à la limite
- 2 Une méthode spectrale dans des domaines à géométries complexes
  - Méthodes spectrales tensorielles
  - Une méthode spectrale dans des domaines à géométries complexes
  - Estimations a priori
- 3 Simulations numériques
  - Implémentation dans `FreeFEM3D`
  - Domaines tensoriels
  - Domaines non tensoriels
  - Simulation du couplage océan/atmosphère
- 4 Conclusions et perspectives

## Modèle de turbulence : Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)

- Dans  $\Omega_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$

$$\text{Équation de Stokes} \quad -\nabla \cdot (\alpha_i(k_i)\nabla \mathbf{u}_i) + \text{grad } p_i = \mathbf{f}_i,$$

$$\text{Incompressibilité} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0,$$

$$\text{Équation d'ECT} \quad -\nabla \cdot (\gamma_i(k_i)\nabla k_i) = \alpha_i(k_i)|\nabla \mathbf{u}_i|^2.$$

- Sur la frontière  $\Gamma_i$ ,  $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ , et  $k_i = 0$ .
- Sur l'interface **air-mer**  $\Gamma$  :  $k_i = \lambda|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|^2$ , et  $\alpha_i(k_i)\partial_{\mathbf{n}_i}\mathbf{u}_i - p_i\mathbf{n}_i + \kappa_j(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| = \mathbf{0}$ .

## Données du problème

- $\Omega_i$  borné, convexe ou  $C^{1,1}$ , et  $\partial\Omega_i = \Gamma_i \cup \Gamma$
- Les coefficients de diffusion et viscosité turbulente  $\alpha_i, \gamma_i \geq \nu > 0 \in W^{1,\infty}$ .
- $\lambda, \kappa_j > 0$  : coefficient de friction.
- $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_i)^d$  : terme source.

- **Espace des vitesses** :  $\mathbf{X}_i = \{\mathbf{v}_i \in H^1(\Omega_i)^d; \mathbf{v}_i|_{\Gamma_i} = \mathbf{0}\},$
- **Espace des pressions** :  $L_0^2(\Omega_i) = \{q_i \in L^2(\Omega_i), \text{ telle que } \int_{\Omega_i} q_i = 0\},$
- **Espace des ECT** :  $Y_i = \{k_i \in W^{1,r'}(\Omega_i); k_i|_{\Gamma_i} = 0\},$  où

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad \text{et } r > d.$$

$\forall (\mathbf{v}_i, q_i, \varphi_i) \in \mathbf{X}_i \times L_0^2(\Omega_i) \times W_0^{1,r}(\Omega_i)$ , où  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ , et  $r > d$ .

$$\int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i) \nabla \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v}_i p_i + \kappa_i \int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \mathbf{v}_i = \int_{\Omega_i} \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i,$$

et  $\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{u}_i q_i = 0.$

$k_i|_{\Gamma_i} = 0$ , et  $k_i|_{\Gamma} = \lambda |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$ , et  $\int_{\Omega_i} \gamma_i(k_i) \nabla k_i \nabla \varphi_i = \int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2 \varphi_i.$

## Difficultés

- $|\nabla \mathbf{u}_i|^2 \in L^1(\Omega_i)^d$
- Couplage des 2 fluides par  $\int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \mathbf{v}_i$ ,  $k_i|_{\Gamma} = \lambda |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$ .
- Couplage des équations par  $|\nabla \mathbf{u}_i|^2$ ,  $\alpha_i$  et  $\gamma_i$ .

## Schéma Numérique

$k_i^n$  donnée,  $\implies \mathbf{u}_i^{n+1}$ , et  $p_i^{n+1}$ ,  $\forall v \in \mathbf{X}_i$ ,

$$\int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_i - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v}_i p_i^{n+1} + \kappa_i \int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \mathbf{v}_i = \int_{\Omega_i} \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i,$$

et 
$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} q_i = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega_i).$$

$\mathbf{u}_i^{n+1}$ ,  $p_i^{n+1}$  données,  $\implies k_i^{n+1}$ ?  $k_i^{n+1}|_{\Gamma_i} = 0$ ,  $k_i^{n+1}|_{\Gamma} = \lambda |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2$ ,

et 
$$\int_{\Omega_i} \gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1} \nabla \varphi_i = \int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 \varphi_i, \quad \forall \varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i).$$

## Difficultés

- couplage à l'interface par le terme  $\int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \mathbf{v}_i$ ,
- la fonction test  $\varphi$  est nulle sur tout  $\partial\Omega_i$ ,
- production de l'énergie cinétique turbulente :  $|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2$  sur  $\Gamma$ .

# Convergence des suites $(\mathbf{u}_i^n)_n$ et $(k_i^n)_n$

## Théorème

Si la suite  $(\mathbf{u}_i^n, k_i^n)_n$  est bornée dans  $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times W^{1,3}(\Omega_i)$  par  $M$ , alors il existe une constante  $C(\Omega_i, \alpha_i, \gamma_i, \kappa_i, M, \mathbf{f}_i)$ , telle que si  $K = \frac{C}{\nu} < 1$ , le schéma est contractant, dans le sens suivant

$$\sum_i^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_{0,\Omega_i} \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_{0,\Omega_i}, \quad \text{et}$$
$$\sum_i^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_{0,\Omega_i} \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_{0,\Omega_i}.$$

## Stokes

Fonction test  $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n$ , et on somme sur  $i = 1, 2 \implies$  découplage des “deux fluides” grâce à la relation

$$\int_{\Gamma} \left[ |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) - |\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n| (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n) \right] \left[ \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} - (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n) \right] \geq 0.$$

Et on obtient la relation 
$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0.$$

## Énergie cinétique turbulente (ECT)

- Introduction du relèvement harmonique

$$R_i : H_{00}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega_i), \quad \forall \eta \in H_{00}^{1/2}(\Gamma), R_i(\eta) \in H^1(\Omega_i), \\ -\Delta R_i(\eta) = 0 \text{ dans } \Omega_i, \quad R_i(\eta)|_{\Gamma} = 0, \quad \text{et } R_i(\eta)|_{\Gamma_i} = \eta.$$

- $\varphi_i = k_i^{n+1} - k_i^n - R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) =$  la fonction test choisie.
- La production d'ECT à l'interface  $\implies$  estimation de  $\| |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 \|_{H^{1/2}(\Gamma)}$  en fonction de  $\|k_i^n - k_i^{n-1}\|_0$ .

# Estimation de $\left\| \left| \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} \right|^2 - \left| \mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n \right|^2 \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}$

● On écrit 
$$\left\| \left| \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} \right|^2 - \left| \mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n \right|^2 \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} = \left\| \left[ (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n) \right] \left[ (\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n) \right] \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}$$

● En suite,

$$\begin{aligned} & \left\| \left[ (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n) \right] \left[ (\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n) \right] \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \\ & \leq C \left\| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n) \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \left\| (\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n) \right\|_{W^{1-\frac{1}{3+\epsilon}, 3+\epsilon}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

● Enfin, on applique la continuité des opérateurs de **trace**.

Il reste à prouver la convergence de la pression

# Convergence de $(p_i^n)_n$

## Théorème (pression)

Soit  $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_i)^d$ , on suppose qu'il existe une constante  $M > 0$ , telle que  $\|\mathbf{u}_i^n\|_{W^{1,3}(\Omega_i)^d} \leq M$ , alors il existe une constante  $C(\Omega_i, \alpha_i, \gamma_i, M)$ , telle que si

$K = \frac{C}{\nu} < 1$ , la suite  $(p_i^n)_n$  est de Cauchy dans  $L^2(\Omega_i)$ . De plus, on a

$$\sum_{i=1}^2 \|p_i^{m+1} - p_i^{n+1}\|_0^2 \leq C \left[ \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 + \left\| |\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}|(\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}) - |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}^2 \right].$$

La preuve est basée sur

- la condition **Inf-Sup** suivante  $\beta_i = \inf_{q_i \in L^2(\Omega_i)} \sup_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i} \frac{\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v}_i q_i}{\|q_i\|_{L^2} \|\mathbf{v}_i\|_{H^1}}$ ,
- la convergence de  $(\mathbf{u}_i^n, k_i^n)_n$ ,
- et la continuité de l'injection canonique  $\gamma : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow L^3(\Gamma)$ .

**Conclusion :** le schéma proposé est convergent.

## Unicité de la solution

### Théorème (Unicité)

Sous les conditions du Théorème de convergence, si il existe deux solutions du problème du couplage **océan-atmosphère**

$$\mathbf{U}, \bar{\mathbf{U}} \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times W^{1,3}(\Omega_i), \quad \varepsilon > 0,$$

où  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_i, p_i, k_i)$  et  $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{p}_i, \bar{k}_i)$ , alors  $\mathbf{U}_i = \bar{\mathbf{U}}_i$ .

### Preuve

Mêmes techniques et étapes utilisées pour montrer la convergence  $\implies$

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0, \quad \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\|_0 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0.$$

Comme  $K < 1 \implies \mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i$ , et  $k_i = \bar{k}_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Enfin, la condition **Inf-sup**  $\implies p_i = \bar{p}_i$ .

$(\mathbf{u}_i, p_i, k_i)$  est une solution du modèle

## Théorème (Limite)

Sous les conditions du Théorème de convergence, la suite  $(\mathbf{u}_i^n, p_i^n, k_i^n)_n$  converge vers une solution  $(\mathbf{u}_i, p_i, k_i)$  du modèle du couplage **océan-atmosphère**.

## Idées de la preuve

- inégalités de **Cauchy-Schwarz, Hölder, Poincaré, Poincaré-Friedrichs...**,
- injections de **Sobolev**,
- la densité de l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W_0^{1,r}(\Omega)$ ,
- la continuité des opérateurs de trace :  $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ ,
- pour  $k_i|_\Gamma = \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$  : on écrit  $= \lambda|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)|, \dots$

- Approximation de la solution par des polynômes de haut degré
- Utilisation de base **tensorisée** de polynômes **orthogonaux**, (**Legendre**)
- On a choisi l'approche **Galerkin**, avec **intégration numérique** (quadrature de **Gauss-Lobatto** : )

trouver  $u_\delta \in H_\delta$ , **t.q**  $\forall v \in H_\delta, a(u_\delta, v_\delta) = \ell(v_\delta)$ ,

- $H_\delta = \mathbb{P}_{N_x} \otimes \mathbb{P}_{N_y} \otimes \mathbb{P}_{N_z}$ ,  $u_\delta = \sum_{i,j,k=0}^{N_x, N_y, N_z} u_{ijk} L_i(x) L_j(y) L_k(z)$ ,

- Les matrices obtenues ne sont pas **creuses**  $\implies$  résolution par des méthodes itératives (gc, big...) : calcul **direct** du produit **matrice** $\times$ **vecteur**
  - complexité algorithmique réduite à  $O(N^{d+1})$ ,
  - économie de stockage mémoire.

# Quelques méthodes spectrales dans des domaines complexes

- Décomposition de domaine en sous-domaines : Éléments spectraux : BERNARDI-MADAY,...
- Utilisation d'éléments courbes :
  - les transformations de GORDON-HALL,
  - utilisation en méthodes spectrales MADAY-RØNQUIST,
- CANUTO-HUSSAINI-QUARTERONI-ZANG.

# Description de la nouvelle méthode

## Espace discret

**Espace discret** :  $H_\delta = \mathbb{P}_{N_x} \otimes \mathbb{P}_{N_y} \otimes \mathbb{P}_{N_z} =$  Ensemble des polynômes de degré  $\leq N_{x,y,z}$  dans chaque direction .

## Notre méthode repose sur deux idées

- **traitement des CL de Dirichlet par pénalisation (méthode de Nitsche) :**

remplacer la condition au limite de **Dirichlet** sur  $\partial\Omega$ ,

$$u = g \quad \text{par} \quad \frac{1}{\varepsilon} u + \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon} g,$$

- **et approximation de la géométrie :**

$\Omega = \cup_{i=0}^{+\infty} D_i$ , où  $D_i$  sont des pavés, (par exemple : **octree**)

Donc, **approcher**  $\Omega$  par :  $\Omega_m = \cup_{i=0}^m D_i$ .

$\implies$

- **coût** dépend du niveau de l'*octree*  $m$ , et
- **Perte d'orthogonalité** de la base (pb de conditionnement).

## Volumiques

**Exemple :** le problème  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$

$\implies$  évaluer les  $\int_{D_i} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{D_i} f v$ ,  $0 \leq i \leq m$ , avec la formule de

**Gauss-Lobatto-Legendre,**

## Surfaciques

Création d'un maillage de triangles  $(T_i)_i$  de  $\partial\Omega$ ,

ensuite, évaluation des  $\int_{T_i} f$  grâce à une formule de quadrature .

## Théorème (Projection)

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^d$ , t.q  $\partial\Omega$  est de  $C^{m-1,1}$ , et soit  $u \in H^m(\Omega)$ , alors il existe une constante  $c(\Omega, m) > 0$ , telle que

$$\|u - \Pi_N^\Omega u\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad \text{et} \quad (1)$$

$$\|u - \Pi_N^{1,\Omega} u\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}. \quad (2)$$

La preuve est basée sur

- Mettre  $\Omega$  dans un pavé **P**
- les estimations d'erreurs d'approximation polynômiale sur des domaines tensoriels, **Bernardi-Maday**
- le Théorème d'extension linéaire **Guilbarg-Trudinger**,

# Conditions aux limites naturelles

Considérons le problème variationnel suivant :  $\forall v \in H^1(\Omega)$ ,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_0 uv + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_{\partial\Omega} b_0 uv,$$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} fv + \int_{\partial\Omega} gv.$$

Et soit le problème approché :  $\forall q \in H_{\delta} = (\mathbb{P}_N)^3$ ,  $a(u_{\delta}, q) = \ell(q)$ .

## Théorème

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^d$ , tel que  $\partial\Omega$  est  $C^{0,1}$ . Si  $u \in H^m(\Omega)$ , il existe une constante  $c(\Omega, m, a) > 0$ , telle que

$$\|u - u^{\delta}\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

En outre si  $\Omega$  est convexe ou  $C^{1,1}$  alors

$$\|u - u^{\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

La preuve se base sur

- le Théorème de projection ( $\Omega$  quelconque),
- le Lemme de **Céa**
- l'argument de dualité d'**Aubin-Nitsche** (pour l'erreur  $L^2$ ).

# Conditions aux limites de **Dirichlet** : Pénalisation

## (Méthode de Nitsche)

$$u \in H_0^1(\Omega)$$

et  $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ , tels que,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \ell(v), \quad \text{et} \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad a(u_\varepsilon, w) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon w = \ell(w)$$

## Théorème (Nitsche, Babuška)

On a les estimations d'erreur suivantes

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}, \quad \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

$$\text{et} \quad \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

La preuve est basée sur

- la convergence forte  $u_\varepsilon \rightarrow u$ , dans  $H^1(\Omega)$  (**Aubin, Lions, Maury, etc....**),
- écrire  $\int_\Omega \nabla(u - u_\varepsilon) \cdot \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} (u - u_\varepsilon)v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v, \dots$
- l'argument de dualité d'**Aubin-Nitsche**, pour l'erreur  $L^2$ .

# Estimations *a priori*

$$(P) \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

et  $(P_\varepsilon) \quad u_\varepsilon^\delta \in H_\delta$ , tels que,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_\Omega f v, \quad \text{et} \quad \forall v^\delta \in H_\delta, \quad a(u_\varepsilon^\delta, v^\delta) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon^\delta v^\delta = \int_\Omega f v^\delta.$$

## Théorème

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^d$ , dont le bord  $\partial\Omega$  est de  $C^{0,1}$ , et soit  $f \in H^{m-2}(\Omega)$ . Si  $u \in H^m(\Omega)$ , il existe  $c(\Omega, m) > 0$ , telle que

$$\|u - u_\varepsilon^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left( N^{1-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$

en outre si  $\Omega$  est convexe ou  $C^{1,1}$  alors

$$\|u - u_\varepsilon^\delta\|_0 \leq c \left( N^{-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \right).$$

- $\|u - u_\varepsilon^\delta\|_{H^1, L^2} \leq \|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{H^1, L^2} + \|u_\varepsilon - u\|_{H^1, L^2}$ ,
- $u \in H^m \implies u_\varepsilon \in H^m$ , et  $\|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{H^1, L^2} \leq c N^{\sigma-m} \|u_\varepsilon\|_{H^m}$ ,  $\sigma \in \{0, 1\}$ ,
- $\|u_\varepsilon - u\|_{H^1, L^2} \leq c_1 \varepsilon^{1-\gamma} \|u_\varepsilon\|_{H^m}$ ,  $\gamma = 0, \frac{1}{2}$ .

## FreeFEM3D

- Code **C++** de la famille freefem
  - résolution par éléments finis de Pb 3D (scalaires, vectoriels, ...)
  - langage utilisateur proche des mathématiques permettant l'écriture facile d'algorithmes complexes
  - formulation faible ou forte dans le langage
- Géométrie
  - en non structuré : maillage fournit par l'utilisateur
  - par domaines fictifs (pénalisation pour Dirichlet) : utilisation de CSG

## Objectifs (cahier des charges)

- Intégrer la méthode spectrale à FreeFEM3D :
  - passage de **EF** à **Spectrale** transparent pour l'utilisateur,
  - permettre le mélange de **EF** et **Spectrale** pour un même calcul
- Résolution dans des domaines tensoriels et non-tensoriels
- $\mathbb{P}_n - \mathbb{P}_k$

## Stratégies

- Écriture d'une maquette **C++** 1D
  - acquisition d'expérience en vue du 3D,
  - premiers tests « non tensoriels »
- Diviser pour régner
  - implémentation d'opérateurs de base
  - mise en place de tests unitaires

## Conception C++

- Factorisation du code **tensoriel/non tensoriel**,
- Interopérabilité **EF** et **Spectrale** :
  - interpolation « automatique » : `SpectralFunction` hérite de `ScalarFunction`

Résolution de  $-\Delta u = 1$  avec  $u = 0$  sur le bord.

On approche la condition limite par :  $\frac{1}{\epsilon}u + \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$ .

## Éléments finis

```
vector a=(0,0,0); vector b=(1,1,1);
vector n=(10,10,10);
mesh m=tetrahedrize(structured(n,a,b));
```

```
femfunction u(m)=0;
solve(u) in m
{
  test(v)
    int[0,1,2,3,4,5](1E3*u*v)
    + int(grad(u)*grad(v))
    = int(v);
}
```

```
save(vtk,"u",u,m);
```

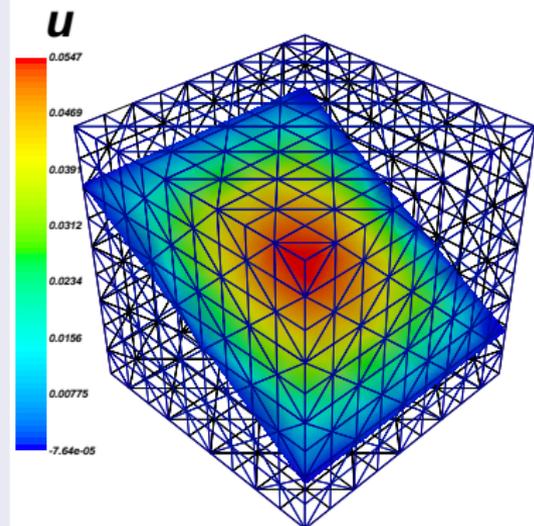
## Spectrale

```
vector a=(0,0,0); vector b=(1,1,1);
vector n=(10,10,10);
mesh m=spectral(n,a,b);
```

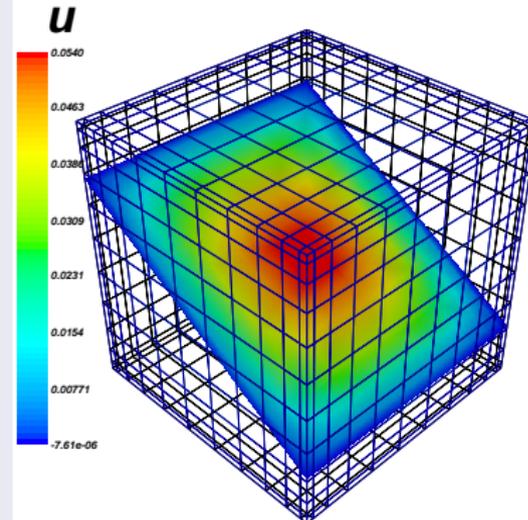
```
sfunction u(m)=0;
solve(u) in m
{
  test(v)
    int[0,1,2,3,4,5](1E3*u*v)
    + int(grad(u)*grad(v))
    = int(v);
}
```

```
save(vtk,"u",u,m);
```

## Éléments finis



## Spectrale

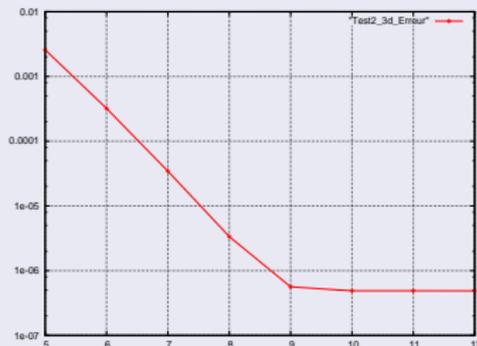


Convergence vers la solution analytique d'un problème vectoriel de la forme :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f}, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

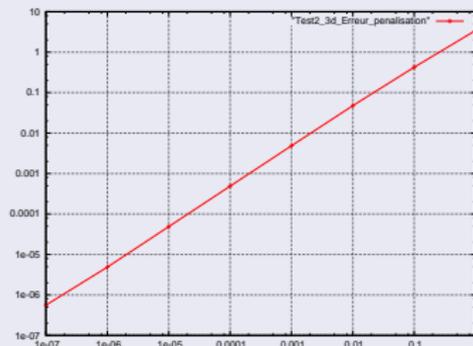
$N \in \{5, \dots, 12\}$

$\varepsilon = 10^{-7}$



$N = 15$

$\varepsilon \in [10^{-7}, 1]$



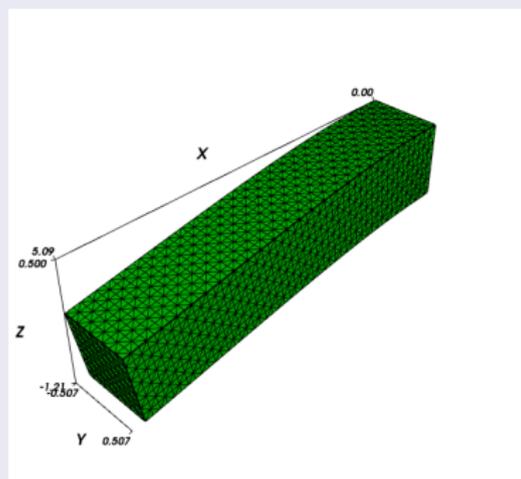
# Élasticité linéaire

## Résolution en déplacement

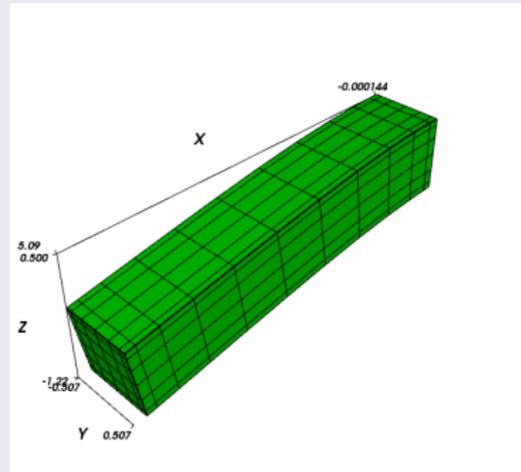
$$\int_{\Omega} \mu \sum_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{u}_j \partial_{x_i} \mathbf{v}_j + \int_{\Omega} \mu \sum_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{u}_j \partial_{x_j} \mathbf{v}_i + \int_{\Omega} \lambda \sum_{ij} \partial_{x_i} \mathbf{u}_i \partial_{x_j} \mathbf{v}_j = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

$$\Omega = ]0, 5[ \times ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \mu = 500, \lambda = 1000 \text{ et } \mathbf{f} = (0, 0, -1)$$

### Éléments finis $50 \times 10 \times 10$



### Spectrale $10 \times 5 \times 5$



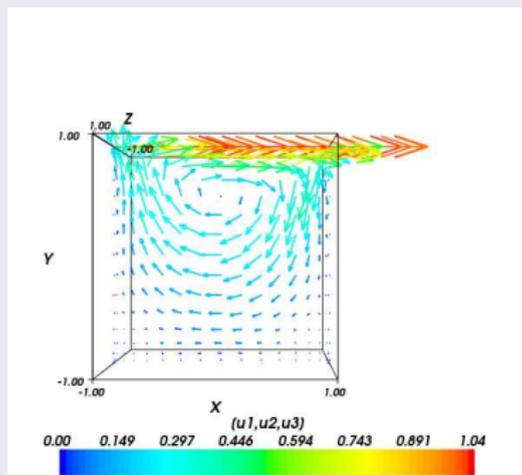
# Stokes

$$-\Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega$$

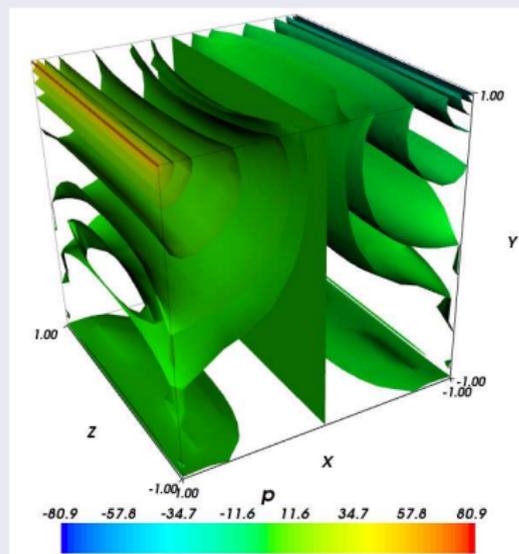
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

Paramètres de discrétisation et pénalisation :  $N = 15$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

## la vitesse



## la pression



# Laplace

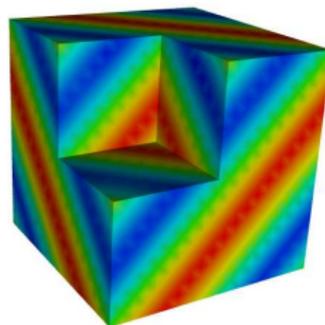
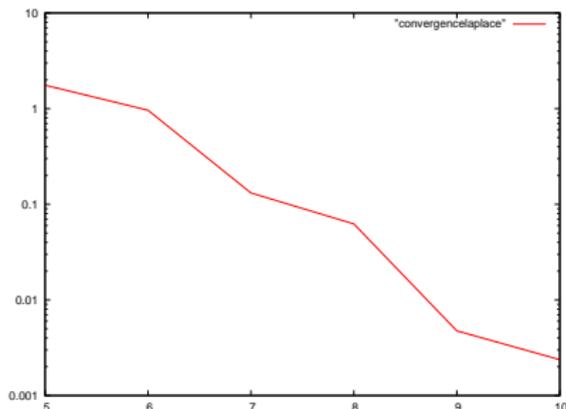
On considère le problème aux limites suivant

$$-\Delta u = 3\pi^2 \sin(\pi(x + y + z)) \quad \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \quad \text{et}$$

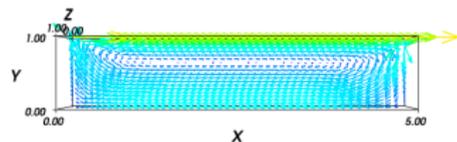
$$u = \sin(\pi(x + y + z)) \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

$$\Omega_1 = ]-1, 0[ \times ]-1, 1[ \times ]-1, 1[, \quad \Omega_2 = ]0, 1[ \times ]-1, 0[ \times ]-1, 1[,$$

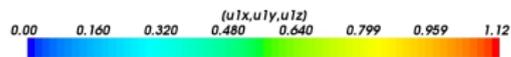
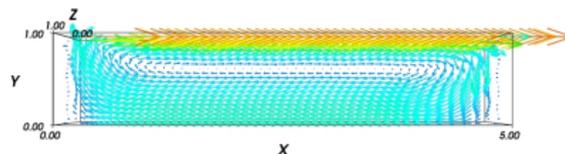
$$\text{et } \Omega_3 = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \times ]-1, 0[.$$



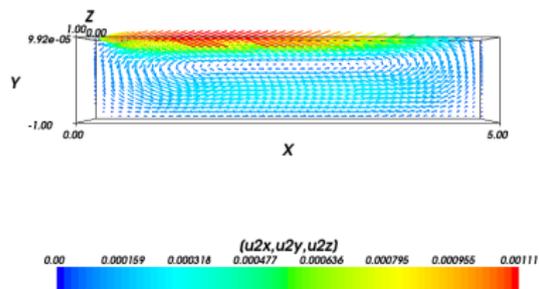
## Éléments finis



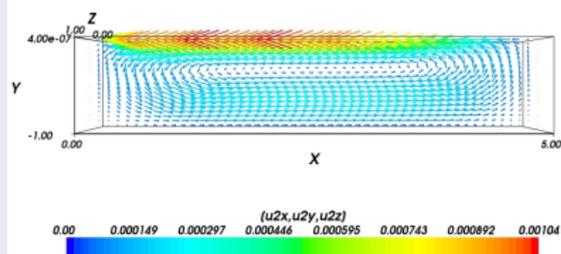
## Spectrale



## Éléments finis



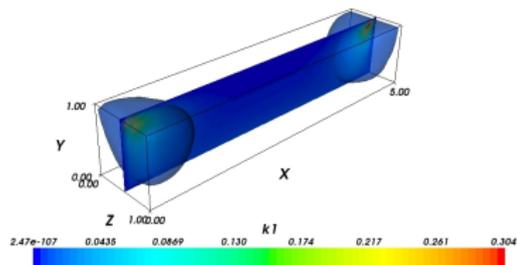
## Spectrale



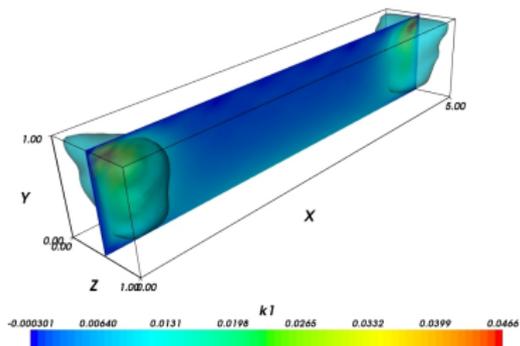
# Énergie cinétique turbulente atmosphérique : valeur de l'isosurface est $10^{-2}$

1/2

## Éléments finis



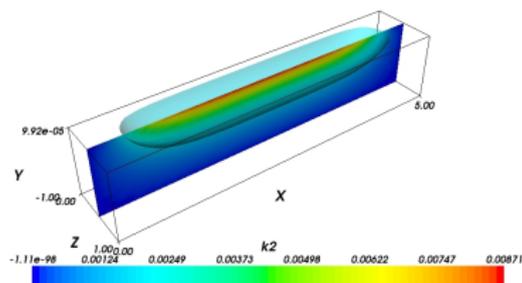
## Spectrale



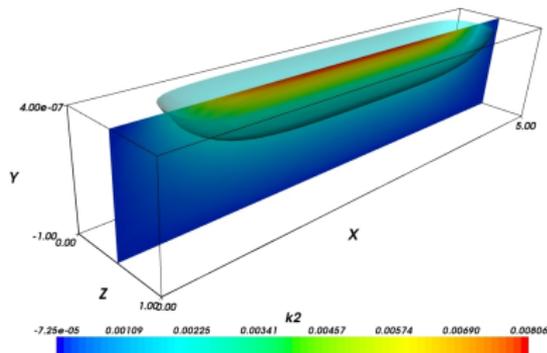
# Énergie cinétique turbulente océanique : valeur de l'isosurface est $2.10^{-3}$

2/2

## Éléments finis

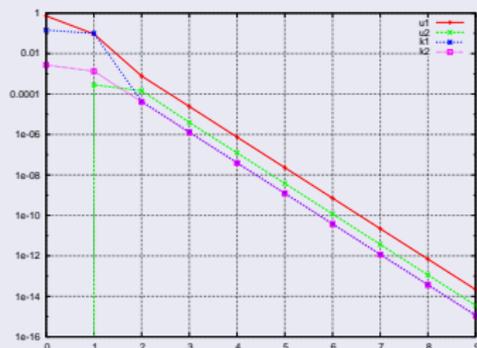


## Spectrale

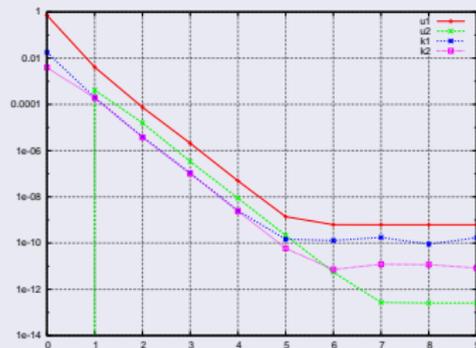


# Courbes de convergence

## Éléments finis



## Spectrale



## Conclusion

- Schéma tridimensionnel, et aussi bidimensionnel
- **Convergence exponentielle** du schéma vers la solution désirée
- Indépendant de la méthode utilisée (**EF, Spectrale**)
- Hypothèses supplémentaires de régularité en **3D**, mais pas en **2D**
- Algorithme semblable pour un modèle d'un seul fluide turbulent

## Perspectives

- Étude de la convergence du schéma dans le cas des viscosités non bornées, de la forme  $\nu + \sqrt{\tau + k}$ ,
- Cas d'une solution localement unique  $\implies$  Théorème de **Brezzi-Rappaz-Raviart**
- Ajout du terme de transport :  $\mathbf{u} \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\gamma(k) \nabla k) = \alpha(k) |\nabla \mathbf{u}|^2$
- Réduire les hypothèses de régularité en dimension 3 ?

## Conclusion

- Code 3D **Tensoriel/ Non Tensoriel** (Legendre) **intégré** à FreeFEM3D
- Respect du cahier des charges :
  - Problèmes scalaires ou vectoriels,  $\mathbb{P}_n - \mathbb{P}_k$ , elliptiques, non symétriques, non linéaires
  - Prise en main facile, couplage avec **EF** possible,...
- Nouvelle méthode Spectrale dans des domaines à géométrie complexes
  - Analyse numérique de la méthode
  - Problème de coût
    - Pavage de  $\Omega$
    - Perte d'orthogonalité  $\implies$  mauvais conditionnement

## Perspectives

- **Analyse** : prise en compte des erreurs de quadrature
- Mise en place de préconditionneurs pour rendre la méthode compétitive
- **Lagrange**, **Eléments spectraux**,...