Écoulement de l'air dans les voies aériennes

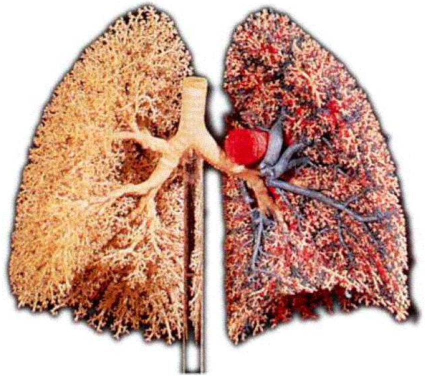
Driss Yakoubi

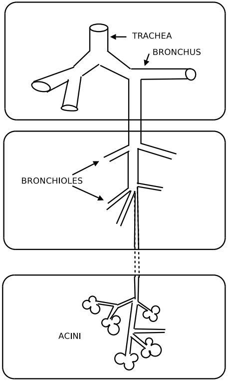
Groupe de travail Modélisation numérique et Images.
MAP5, Université Paris–Descartes.
10 Avril 2009.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Plan

Le poumon humain





La respiration

La respiration

- Respiration $\Longrightarrow$ dilatation de l'arbre bronchique pour acceuillir l'air ;
- circulation de l'air jusqu'aux alvéoles situées aux extrémités de l'arbre ;
- diffusion de l'O_2 contenu dans cet apport d'air "neuf" dans le sang ;
- contraction du poumon pour rejeter l'air appauvri en O_2 et enrichi en CO_2 ;
- et ainsi de suite.

Le ressort

Quelques paramètres

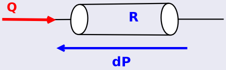
- m masse déplacée $\rightsquigarrow$ masse du poumon ;
- x déplacement du piston $\rightsquigarrow$ amplitude du Mvt des côtes ;
- k raideur du ressort $\rightsquigarrow$ ensemble des forces de rappel ;
- S surface du piston $\rightsquigarrow$ sur laquelle s'exerce la pression parenchymale ;
- f terme de forçage extérieur $\rightsquigarrow$ effort musculaire fourni pour déformer la cage thoracique ; (inspiration et expiration.)
- μ mesure les forces de résistance à la déformation au sein des tissus ;
- $\mu\dot{x}$ représente la puissance dissipée dans les tissus.

Mise en équation

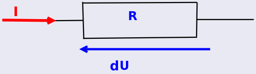
$$m\ddot{x} = f - kx - \mu\dot{x} + SP$$

Analogie à un circuit électrique simple

On suppose que la loi de Poiseuille est satisfaite

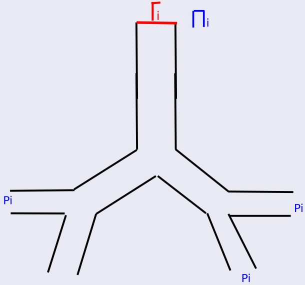


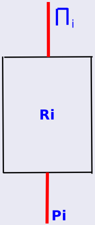
(a) Poiseuille



(b) circuit électrique

Arbre–Résistance





Mise en équation

- Le sous–arbre est remplacé par un domaine cylindrique,
- où la loi de Poiseuille est satisfaite :

$$\Pi_i - P_i = R_i \int_{\Gamma_i} u \cdot n, \quad R_i \geq 0.$$

Dans ce qui suit on considère $P_i \equiv P_a, \forall i$.

La partie supérieure ou proximale

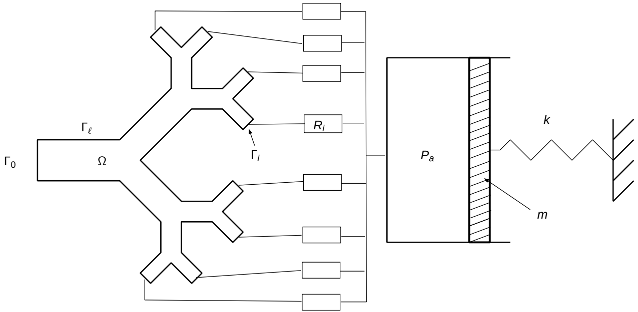
Navier–Stokes incompréssible

On suppose que les équations de Navier–Stokes sont vérifiées :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho(u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p & = & 0, & \text{in } \Omega, \\ \nabla\cdot u & = & 0, & \text{in } \Omega, \\ u & = & 0, & \text{on } \Gamma_\ell, \\ \nu\nabla u\cdot n - pn & = & -P_0 n, & \text{on } \Gamma_0, \\ \nu\nabla u\cdot n - pn & = & -\Pi_i n, & \text{on } \Gamma_i, \qquad i = 1,\ldots,I. \end{array}\right.$$

Les pressions Π_i sont données par les parties inférieures.

Un modèle en trois parties



- Partie supérieure ou priximale : 1–7 Navier–Stokes incompressible ;
- partie distale : 8–16 où la loi de Poiseuille est satisfaite ;
- les alvéoles : 17–23 où la diffusion de l'oxygène a lieu, enfermée dans un tissu élastique : le parenchyme modélisé par un simple ressort.

Le système couplé

L'incompréssibilité $\Longrightarrow S\dot{x} = -\int_{\Gamma_0} u \cdot n.$

NSI avec des **CL non standard**

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla \bar{p} & = & 0, & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla \cdot u & = & 0, & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ u & = & 0, & \text{on } (0, T) \times \Gamma_\ell, \\ \nu \nabla u \cdot n - \bar{p} n & = & -P_0 n - P_{spring} n, & \text{on } (0, T) \times \Gamma_0, \\ \nu \nabla u \cdot n - \bar{p} n & = & -\Pi_i n, & \text{on } \Gamma_i, \end{array} \right.$$

Terme de couplage

$$P_{spring} = \frac{f_{ext}}{S} n + \frac{m}{S^2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Gamma_0} u \cdot n \right) + \frac{k}{S^2} \left(\int_0^t \int_{\Gamma_0} u \cdot n - S x_0 \right), \text{ et}$$

$$\Pi_i = R_i \left(\int_{\Gamma_i} u \cdot n \right).$$

Difficultés numériques

Récapitulatif

- Notre modèle permet la simulation des eq.NS dans un arbre restreint :

  voies aériennes supérieures ;
- prise en compte par **CL non standard** de l'écoulement

  dans les voies inférieures ;
- ces CL font intervenir les débits sur chaque sortie du domaine.

Passage de NSI + Poiseuille + Ressort à 1 système NSI.

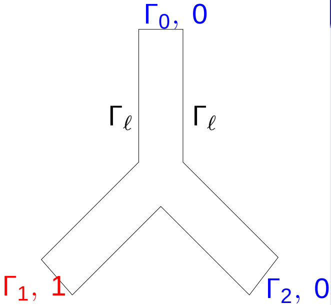
Difficultés numériques

Forme bilinéaire couple les degrés de liberté des sorties de l'arbre :

- Perte de l'aspect **creux** de la matrice EF ;
- logiciels de calculs **non adaptés** ;
- à moins d'aller changer le code source !

Proposer une nouvelle méthode numérique...

Méthode de décomposition (1/3)



PRE-CALCULS

Calcule des solutions u_i des équations de Stokes avec les conditions aux bords suivantes :

$$
\begin{cases}
\frac{\rho}{dt}u_i - \nu\Delta u_i + \nabla p_i & = & 0, & \text{in } \Omega, \\
\nabla \cdot u_i & = & 0, & \text{in } \Omega, \\
u_i & = & 0, & \text{on } \Gamma_\ell, \\
(\nu\nabla u_i - p_i)n & = & -n, & \text{on } \Gamma_i, \\
(\nu\nabla u_i - p_i)n & = & 0, & \text{on } \Gamma_j,\ j \neq i.
\end{cases}
$$

Les u_i sont calculées une fois pour toutes.

Méthode de décomposition (2/3)

TERME CORRECTIF

Le terme correctif $\tilde{u}^{n+1}$ prend en considération le terme de convection

$$\left\{\begin{array}{rcll}\frac{\rho}{\Delta t}\tilde{u}^{n+1} - \nu\Delta\tilde{u}^{n+1} + \nabla\tilde{p}^{n+1} & = & \frac{\rho}{\Delta t}u^n \circ X^n, & \text{in } \Omega, \\ \nabla\cdot\tilde{u}^{n+1} & = & 0, & \text{in } \Omega, \\ \tilde{u}^{n+1} & = & 0, & \text{on } \Gamma_\ell, \\ (\nu\nabla\tilde{u}^{n+1} - \tilde{p}^{n+1})n & = & 0, & \text{on } \Gamma_i,\ i = 0,\dots,I.\end{array}\right.$$

Remarque

Le terme convectif peut être traité soit

- de manière explicite ;
- en utilisant les caractéristiques.

Méthode de décomposition (3/3)

RECONSTRUCTION : étape $n+1$

Grâce à la linéarité du système obtenu, la solution est calculée comme suit :

$$u^{n+1} = \tilde{u}^{n+1} + \sum_{i=0}^{I} \alpha_i^{n+1} u_i.$$

Existence des α_i^{n+1}

Les α_i sont solutions de $(I - RQ) \cdot \alpha = B,$ où :

- $\big(-Q\big)_{i,j} = -\int_{\Gamma_i} u_j \cdot n$ **s.d.p** ;
- $R = \mathrm{diag}[\mathrm{R}_0, \ldots, \mathrm{R}_\mathrm{N}]$;

$$(I - RQ) = \sqrt{R}(I - \sqrt{R}Q\sqrt{R})\sqrt{R}^{-1}.$$

Méthodes de résolution

Résolution

- **Pré–Calculs (Stokes) :** méthode mixte en utilisant l'élément $P1b/P1$.
- **Correction (Navier–Stokes) :** soit par
  1. la méthode mixte ;
  2. l'algorithme de projection de Chorin–Temam : $P2/P1$.

Autour de la projection

Les +

- Résolution de **2 problèmes elliptiques** ;
- plus rapides.

Les -

- Pas de temps petit ;
- La solution est soit
  - à divergence nulle ;
  - elle satisfait les CL.

Méthode de projection non–incrémentale (1/2)

Au lieu de résoudre le problème de Navier-Stokes pour le terme correctif $\tilde{u}^{n+1}$ une méthode de projection peut être utilisée.

Étape de prédiction

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\rho}{\Delta t}\left(u_p^{n+1} - \bar{u}^n \circ X^n\right) - \nu\Delta u_p^{n+1} & = & 0, & \text{in } \Omega, \\ u_p^{n+1} & = & 0, & \text{on } \Gamma_\ell, \\ \nu\nabla u_p^{n+1}\cdot n & = & 0, & \text{on } \Gamma_i,\ i = 0,\dots,I. \end{array}\right.$$

Étape de correction

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta p_p^{n+1} & = & -\frac{\Delta t}{\rho}\nabla\cdot u_p^{n+1}, & \text{in } \Omega, \\ \nabla p_p^{n+1}\cdot n & = & 0, & \text{on } \Gamma_\ell, \\ p_p^{n+1} & = & 0, & \text{on } \Gamma_i,\ i = 0,\dots,I. \end{array}\right.$$

Méthode de projection non–incrémentale (2/2)

Étape de reconstruction

- Les α_i sont calculés de façon à ce que

$$u^{n+1} = u_p^{n+1} + \sum_I \alpha_i u_i$$

satisfait les conditions aux bords.

- On pose :

$$\bar{u}^{n+1} = u_p^{n+1} - \frac{\rho}{\Delta t} \nabla p_p^{n+1} + \sum_I \alpha_i u_i,$$

qui est à divergence nulle.

Remarque

Et l'incrémentale...

Résistance des bronches et paramètre θ

Données physiologiques

- $m = 0.300\,Kg$;
- $S = 0.011\,m^2$;
- $k_0 = 36.3\,N \cdot m^{-1}$;
- $\mu = 4.02\,Pa \cdot s \cdot m$;
- $R_0 = 0.133\,MPa \cdot s \cdot m^{-3}$.

Paramètre θ et muscle lisse

- limite l'extension des bronches ;
- répartition de $\delta V(\text{cage thoracique}) = Sx$ entre les bronches et les alvéoles suivant θ :
$$\delta V = \underbrace{(V_A^0 + (1-\theta)Sx)}_{\text{Alvéoles}} + \underbrace{(V_B^0 + \theta Sx)}_{\text{Bronches}}$$
- $\Longrightarrow$ θ modélise la rigidité des bronches

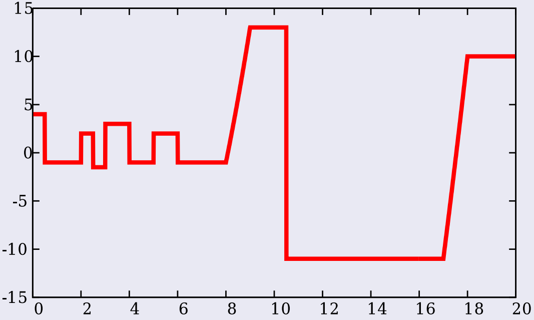
La résistance

Hyp : la dilatation des bronches ne modifie pas leurs formes :

- la résistance des bronches $\propto$ Volume^{-1} ;
- $L/D = Cte \quad \Longrightarrow$

$$R(x) = \frac{R_0}{1 + \frac{\theta Sx}{V_B^0}}.$$

Force Ext exercée lors d'une manœuvre respiratoire

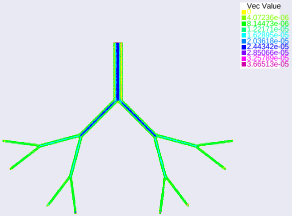


Dépendance de la raideur au déplacement

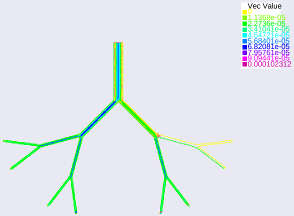
$$k(x) = k_0 + \begin{cases} (f_{min}/x_{min} - k_0)x/x_{min}, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ (f_{max}/x_{max} - k_0)x/x_{max}, & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Vitesses en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ et pression en Pa

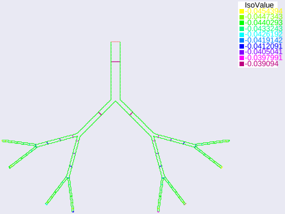
Vitesse non pathologique



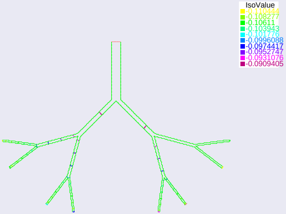
Vitesse pathologique



Pression non pathologique



Pression pathologique



Portrait de phase et variation du paramètre *k*

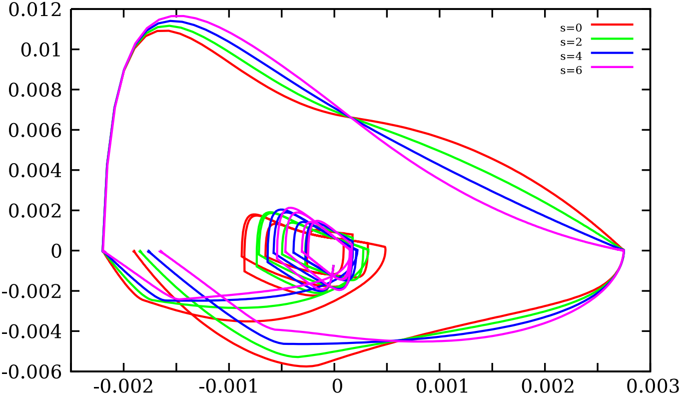


FIG.: Portrait de phase : Flux (en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$)–Volume (en m^3).

Portrait de phase et variation du paramètre θ

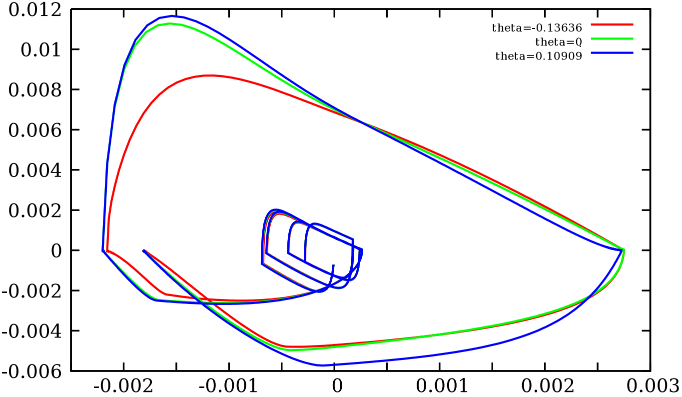


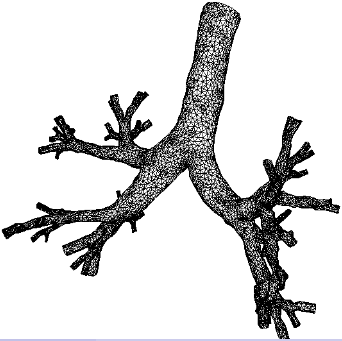
FIG.: Portrait de phase : Flux (en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$)–Volume (en m^3).

Premiers résultats 3*D* sur une géomètrie réelle

FreeFem++–3D

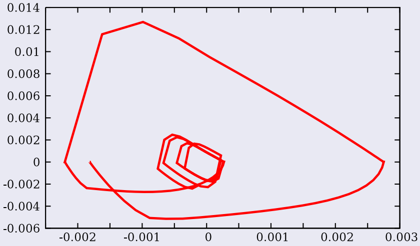
La réalisation des simulations numériques sur cette géomètrie demande la conversion du code 2D en un code 3D, **mais :** le solveur FreeFem++–3D n'est pas encore stable, **ceci demande plusieurs adaptations très importantes comme :**

- programmation de l'algorithme d'Uzawa ;
- programmation du préconditionneur Cahouet–Chabart.

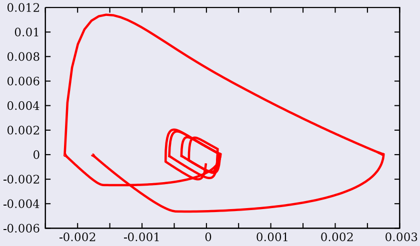


Comparaison de portrait de phase 2D–3D

Portrait de phase *3D*



Portrait de phase *2D*



Conclusions et perspectives

Conclusions

- Modèle à faible paramètres à caler ;
- méthode de décompostion de la solution ;
- utilisation des solveurs classiques ;
- plusieurs approches : Mixte, Chorin–Temam, Uzawa ;
- résultats numériques satisfaisants : Portrait de phase clinique.

Perspectives

- Exploitation des résultats d'un point de vue physiologique ; données cliniques.
- Calculs 3D
- CEMRACS'09 :
  - Couplage flux d'air et diffusion/absorption de l'O_2 dans le sang ;
  - Couplage avec les aèrosols ;
- comparaison avec d'autres résultats : rapidité, coût, etc...
- et l'analyse numérique de la méthode : stabilité, convergence...