Université Pierre et Marie Curie LM 256
1er semestre 2007-2008 Mathématiques

Devoir

A rendre impérativement le xx/xx.

Exercice 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n \, dx$.
Trouver une relation entre I_n et $I_{n-1},\ n \geq 1$.
En déduire I_3.

Exercice 2.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \text{ si } x < 0 \\ 2e^{x^3+x} - 2 \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. Déterminer le développement limité d'ordre 2 à gauche en 0.
   Déterminer le développement limité d'ordre 2 à droite en 0.
   En déduire que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

Exercice 3.
On s'intéresse à la limite de $f(x,y) = \dfrac{x^2\,y}{x^2+y^2}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Étudier limite de $f(x,y)$ quand (x,y) parcourt :

1. une droite d'équation $y = \alpha x$ (α fixé),
2. la parabole d'équation $y = x^2$.
   Que peut-on conclure ?
3. Montrer que la fonction

$$g(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

   est continue en $(0,0)$.

4. Calculer les dérivées partielles de g d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
5. Montrer en utilisant la définition, que la fonction g admet des dérivées partielles au point $(0,0)$.

Exercice 4.

1. Montrer que l'équation $z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = cos(x - y + z)$ définit implicitement une fonction

$$(x, y) \longrightarrow z = \phi(x, y),$$

   de classe C^∞ dans un voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer la dérivée première et seconde de ϕ en $(0,0)$.