Nombres complexes

Exercice 1 : Mettre les expressions suivantes sous la forme $a+ib$, avec a et b réels :

$$\frac{3+5i}{8-6i},\quad \frac{5}{\sqrt{2}+i},\quad 1+i+i^2+i^3,\quad e^{i\frac{\pi}{2}},\quad \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+i},\quad (3+2i)e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Exercice 2 :Calculer le module et l'argument des nombres suivants

$$i,\quad 1+i,\quad 1+i\sqrt{3},\quad (5\sqrt{2}-5i\sqrt{2})^3,\quad (2e^{i\frac{\pi}{3}})^2.$$

Exercice 3 : Pour quelles valeurs de z les expressions suivantes sont elle réelles : (et que valent-elles alors ?)

$$\frac{z+i}{z-i},\quad \frac{z^2}{z+1},\quad i+\frac{1}{z},\quad 1+ze^{i\theta}.$$

Exercice 4 : Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$5+i,\ -i,\ 7+4i,\ 4ab+2(a^2-b^2)i \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Exercice 5 : Calculer sous forme cartésienne :

$$(1+i)^{100} \text{ et } \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Exercice 6 : Établir les égalités :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$

$$(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right).$$

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$2z^2+(1+i)z-5i=0,\ -iz^2-z+2-3i=0,\ 8z^2-\overline{z}+1=0.$$

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(3+7i)z^2-8(1+2i)z+4(1+i)=0.$$

En déduire *sans calcul* les solutions de

$$(3-7i)z^2-8(1-2i)z+4(1-i)=0.$$

Exercice 9 : Nombres complexes et trigonométrie.

1. À l'aide de la formule de Moivre

$$[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta),$$

calculer $\sin(3x)$ en fonction de puissances de $\sin x$ et $\cos(4x)$ en fonction de puissances de $\cos x$.
En déduire les valeurs de $\sin(\frac{\pi}{3})$ et de $\cos(\frac{\pi}{8})$.

2. À l'aide des formules d'Euler pour les cosinus et sinus, linéarisez les expressions suivantes : $\sin^5(x)$, $\cos^4(x)$, $\cos^2(x)$, $\sin^2(x)$.

   En déduire les valeurs de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^2(x)dx$.

Exercice 10 : Montrer que si z est un nombre complexe distinct de 1 et n un entier, alors

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

En déduire les formules suivantes ($\theta \neq 0[2\pi]$) :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right).$$

Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}},\ z^4 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Exercice 12 : Soit $z \neq 1$ une solution de $z^5 = 1$. Montrer que $\alpha = z + \frac{1}{z}$ est une solution de

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

En déduire l'écriture cartésienne des racines cinquièmes de l'unité.

Exercice 13 :

a) Soient z et z' deux nombres complexes de module 1, tels que $z + z' \neq 0$. Montrer que $\frac{1+zz'}{z+z'} \in \mathbb{R}$.

b) Soient z et α deux nombres complexes, tels que $\alpha \neq 1$. Montrer que $\frac{z-\alpha\bar{z}}{1-\alpha} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (|\alpha| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R})$.

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{1+z}{1-z}$ soit réel.

d) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{1+z}{1-z}$ soit imaginaire pur.

Structures algébriques

Exercice 1 : $\mathbb{N}$ étant l'ensemble des entiers naturels, on considère la loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$a * b = a^2 + b^2.$$

Cette loi est-elle : commutative, associative, munie d'un élément neutre ?

Exercice 2 : Soit

$$G = \{f_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b\},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrer que G muni de la loi $\circ$ de composition des fonctions est un groupe ; est-il commutatif ?

Exercice 3 : On définit sur l'ensemble A des couples d'entiers algébriques les lois $+$ et $*$ par :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) * (a', b') = (aa' + bb', ab' + ba')$$

l'égalité $(a, b) = (a', b')$ impliquant $a = a'$ et $b = b'$.

a) Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire.

b) Déterminer les éléments de A qui ont un inverse.