Systèmes linéaires

Exercice 1 :

1. Mettre sous forme échelonnée, puis sous forme échelonnée réduite la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 7 & 14 \end{array}\right).$$

2. Application, résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x & +y & & = 0, \\ 6x & +2y & +z & = 2, \\ 9x & +3y & +7z & = 14. \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Résoudre les systèmes linéaires suivants, en précisant dans chaque cas, la matrice augmentée et la réduite de Gauss :

1. $\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +8x_2 & -2x_3 & = -4, \\ 3x_1 & +15x_2 & +7x_3 & = 30, \\ x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = 8. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{llll} 2x & +y & +z & = 7, \\ x & +2y & +z & = 8, \\ x & +y & +2z & = 9. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{llll} 2x & +y & +z & = 1, \\ & -y & +2z & = -1, \\ & & 5z & = 5. \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{llll} x & -2y & +z & = 0, \\ & & -2z & = 5, \\ & & z & = 3. \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{llll} x & -2y & +z & = 0, \\ & & -z & = -6, \\ & & z & = 3. \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 3, \\ 2x & +y & +3z & = 1, \\ x & -y & +3z & = 5. \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +z & +t & = 4, \\ x & +y & +6z & +4t & = 3, \\ 2x & +2y & +3z & & = 5. \end{array}\right.$

8. $\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +z & +t & = 4, \\ x & +y & +6z & +4t & = 3, \\ 2x & +2y & +3z & & = 5, \\ x & +y & & +3t & = 7. \end{array}\right.$

9. $\left\{\begin{array}{llllll} 2x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +2x_4 & -6x_5 & = 3, \\ & x_2 & -2x_3 & +x_4 & & = 1, \\ & & & x_4 & -3x_5 & = 2. \end{array}\right.$

10. $\left\{\begin{array}{llll} 2x & -3y & +z & = 2, \\ -5x & +3y & +2z & = 1, \\ -4x & +2y & +2z & = -3. \end{array}\right.$

11. $\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +3z & = 0, \\ x & +4y & +6z & = 0, \\ x & +8y & +9z & = 0. \end{array}\right.$

12. $\left\{\begin{array}{lllll} x & +2y & -5z & +4t & = 0, \\ 2x & -3y & +2z & -3t & = 0, \\ 4x & -6y & +z & -6t & = 0. \end{array}\right.$

13. $\left\{\begin{array}{lllll} 2x & +y & -2z & & = 10, \\ 3x & +2y & & +2t & = 1, \\ 5x & +4y & & +3t & = 4. \end{array}\right.$

Exercice 3 : Résoudre les systèmes linéaires suivants pour des variables x,y et z complexes :

1. $\left\{\begin{array}{llll} x & +iy & +2z & =0, \\ ix & & +3z & =0. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{llll} x & +y & -z & =1+2i, \\ ix & & -3z & =3-i, \\ x & +iy & +z & =2-i. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{llll} -2x & +y & & =-4+i, \\ x & & +iz & =2-i, \\ x & -y & -iz & =2. \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =1, \\ 2x & +iy & -z & =i, \\ -ix & +(1+i)y & +2iz & =1. \end{array}\right.$

Exercice 4 : Résoudre (en variables réelles) les systèmes linéaires suivants en discutant selon les paramètres a et b :

1. $\left\{\begin{array}{lllll} ax & & -z & +t & =a, \\ x & -y & & +at & =a, \\ -x & +y & +az & & =-a, \\ & ay & +z & -t & =a. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =1, \\ x & +2y & +3z & =4, \\ 3x & +4y & +5z & =a. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =3, \\ 3x & +6y & -9z & =1, \\ 2x & +4y & -6z & =a. \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +(1-a)z & =a+2, \\ (1+a)x & -y & +2z & =0, \\ 2x & -ay & +3z & =a+2. \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{llll} x & +ay & +z & =1, \\ ax & +y & +(a-1)z & =a, \\ x & +y & +z & =a+1. \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{llll} x & +ay & +bz & =0, \\ ax & +y & +bz & =0, \\ bx & +ay & +z & =0. \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{llll} ax & +y & +z & =1, \\ x & +ay & +z & =a, \\ x & +y & +(2-a)z & =b-1. \end{array}\right.$

Exercice 5 : Soit f une fonction polynomiale de degré 3 sur $\mathbb{R}$, que l'on écrit sous la forme suivante : pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Déterminer les paramètres réels a, b, c et d (s'il en existe) pour que f satisfasse : $f(1) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -5$, $f(2) = 15$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants (qui ne sont pas linéaires !) :

1. $\left\{\begin{array}{lll} 2x^2 & +3y & =8, \\ x^2 & -4y & =-7. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{4}{x-3} & +\dfrac{1}{y+1} & =5, \\ \dfrac{2}{x-3} & -\dfrac{3}{y+1} & =-8. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{lll} x^2 & -y^2 & =-5, \\ 3x^2 & +2y^2 & =5. \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{lll} 3x & +\dfrac{4}{y} & =12, \\ 5x & -\dfrac{2}{y} & =20. \end{array}\right.$