Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 :

1. Donner des exemples de systèmes "libres et générateurs", "libres et non générateurs", "non libres et générateurs", "non libres et non générateurs" de $\mathbb{R}^3$
2. Donner trois vecteurs $\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$, $\{\vec{u},\ \vec{w}\}$, $\{\vec{v},\ \vec{w}\}$ soient libres et $\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\}$ liée... Interpréter géométriquement.
3. Soient $\vec{u}=(a,b)$ et $\vec{v}=(c,d)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$ soit libre
4. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants :
$$\vec{u}=(1,2,-1)\quad \vec{v}=(1,0,1)\quad \vec{w}=(-1,-2,-3)\ ?$$
5. Même question pour les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:
$$\vec{u}=(0,1,-1,2)\quad \vec{v}=(3,0,1,1)\quad \vec{w}=(-1,-1,0,0).$$
6. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs :
$$\vec{u}=(1,2,-5)\quad \vec{v}=(2,1,0)\quad \vec{w}=(-1,1,2)\quad \vec{x}=(1,3,0).$$
Montrer que $\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w},\ \vec{x}\}$ forme une famille géneratrice de $\mathbb{R}^3$.
7. On considère à présent les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:
$$\vec{u}=(1,-2,3,4)\quad \vec{v}=(0,5,-1,8)\quad \vec{w}=(-1,3,2,-1)\quad \vec{x}=(2,-1,0,3).$$
La famille $\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w},\ \vec{x}\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? Est-elle libre ?
8. On considère les vecteurs $\vec{u}=(0,3,1)$, $\vec{v}=(-1,h,1/3)$, $\vec{w}=(k,1,h/3)$. Déterminer pour quelles valeurs de $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est libre et pour quelles valeurs elle est liée.

Exercice 2 :

On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$$\vec{u}=(1;-1;1;-1),\ \vec{v}=(1;1;-1;-1)\text{ et }\vec{w}=(1;-1;-1;1).$$

1. La famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Soit la famille $F=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{t}\}$, où $\vec{t}=(-1;-1;-1;3)$. F est-elle une famille libre ? Est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble F des triplets (x,y,z)
tels que $x+2y-z=0$.

1. F est-il stable par combinaisons linéaires ?
2. Soient $\vec{u}=(2;-1;0)$ et $\vec{v}=(0;1;2)$. Montrer que la famille $\{\vec{u};\vec{v}\}$ est libre et qu'elle génère F.

3. Soit $\vec{s} = (1;1;3)$. Exprimer $\vec{s}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. Soit G l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x + 2y - z = 1$. G est-il stable par combinaisons linéaires ?

Exercice 4 :

Soit $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Déterminer parmi les familles suivantes celles qui sont libres et celles qui sont liées.

$$\{\vec{a}, \vec{b}\}, \qquad \{\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\}, \qquad \{\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} - 6\vec{b}\}, \qquad \{\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}\},$$
$$\{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, -\vec{a} + \vec{c}\}, \qquad \{\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c}\},$$
$$\{10\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{a} + 5\vec{b} - \vec{c}, 3\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}\}.$$

Exercice 5 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose, pour $m \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (m + 2; m - 1; 1)$, $\vec{v} = (4; m - 1; 1)$, $\vec{w} = (2; m - 1; 0)$.

1. A quelle condition $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est-elle libre ?
   liée ?
2. Même question pour $\{\vec{v}, \vec{w}\}$.
3. Même question pour $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Exercice 6 :

On considère les deux sous-parties de $\mathbb{R}^4$ suivantes :

– F est l'ensemble des vecteurs (a, b, c, d) qui satisfont $a = b$ et $c = d$,
– Gest l'ensemble des vecteurs (a, b, c, d) qui satisfont $a + b - c = 0$.

1. Montrer que F et G sont stables par combinaisons linéaires.
2. Déterminer pour F une famille libre et génératrice. Même question pour G.

Exercice 7 :

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = (2; 0; -3)$ et $\vec{v} = (-6; 1; 9)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre.
2. Trouver un vecteur $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{F} \cup \{\vec{w}\}$ soit une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit F l'espace engendré par la famille $\mathcal{F}$. Peut-on trouver, pour un m réel, un vecteur $\vec{x} = (-1; -1; m)$ dans F ?
4. Reprendre l'exercice avec $\vec{u} = (2; -4; 7)$ et $\vec{v} = (-1; 2; 3)$.

Exercice 8 :

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits de A par les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Quels sont les vecteurs qui, multipliés par A, donnent le vecteur nul ?
3. Quels sont les vecteurs que l'on peut écrire sous la forme $A\vec{x}$ avec $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$?

Exercice 9 :

Déterminer, pour chacune des matrices suivantes, l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $M\vec{x} = \vec{0}$ et l'ensemble des vecteurs $\vec{y}$ pour lesquels il existe $\vec{x}$ tel que $\vec{y} = M\vec{x}$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & -1 & -8 \end{pmatrix} \quad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 :

Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0\}, \qquad F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ xy = 0\}$$
$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x + y\}, \qquad F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = x^2\}$$
$$F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x, y \text{ et } z \text{ sont irrationnels.}\}, \qquad F_6 = \{(x,y,z) \ / \ x^2 + y^2 \leq 3,\ z = 0\}$$
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x+y+1)^2 - (x-y)^2 - 4xy - 1 = 0\}, \qquad F_8\{(x,y,z) \ / x + y + z = 0,\ 2x + z = 0\}$$

Exercice 11 :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

1. On suppose qu'il existe un élément a de F qui n'est pas dans G et un élément b de G qui n'est pas dans F. Trouver un élément de $\mathbb{R}^4$ qui n'appartient pas à $F \cup G$.
2. Montrer que pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, il faut et il suffit que soit $F \subset G$, soit $G \subset F$.

Exercice 12 :

On considère F et G les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis de la manière suivante :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\} \ \text{ et } \ G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer précisement $F \cap G$.
2. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 13 :

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $M\vec{x} = \vec{0}$. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{y}$ pour lesquels il existe $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{y} = M\vec{x}$.
2. Soient F et G comme dans l'exercice précédent. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{y}$ pour lesquels il existe $\vec{x}$ de F tel que $\vec{y} = M\vec{x}$. Même question pour G.

Exercice 14 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 2, 0, 0)$, $\vec{w} = (1, 2, 3, 0)$ et $\vec{x} = (1, 2, 3, 4)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} := \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $(1, -1, 1, -1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Reprendre l'exercice avec $\vec{u} = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 0, 0, 1)$ et $\vec{x} = (0, 0, 1, 1)$.

Exercice 15 :

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, distinct de E. Soit A le complémentaire de F dans E.

1. Montrer que$A$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $x \in F$ et $a \in A$, alors $x + a \in A$.
3. En déduire que Vect(A), le sous-espace engendré par A, est égal \'{a} E.

Exercice 16 :

1. On considère les deux sous espace de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\} \text{ et } F = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

2. Montrer que . $\mathbb{R}^3 = E \bigoplus F$
3. Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de l'espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$. Ce supplémentaire est-il unique ?

Exercice 17 :

Montrer les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, en donner une partie génératrice simple

$\{(a - b, 2a, a + 2b, -b) \ ; a, b \in \mathbb{R}\}$ $\qquad$ $\{(x, y, z, t) \ ; x - y = z - t\}$

$\{(x, y, z, t) \ ; \ y = x - t; z = x + t\}$ $\qquad$ $\{(x, y, z, t) \ ; 2x + y + z + t = x + 2y + z + t = x + y + 2z + t = 0\}$

Exercice 18 :

On définit deux parties F et G de $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x, y, z) \ ; x + y + z = 0\}$ $\qquad$ $G = \{(x, y, z) \ ; x = y = z\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et calculer $F \cap G$
2. Démontrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G