

Analyse et mise en œuvre de nouveaux algorithmes en méthodes spectrales.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 19 Décembre 2007

pour l'obtention du grade du

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie-Paris VI
(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

Driss YAKOUBI

Composition du jury

Rapporteurs : Claudio CANUTO
Alexandre ERN

Examineurs : Christine BERNARDI (Directrice)
Jean-Paul CHEHAB
Frédéric COQUEL
Stéphane DEL PINO (co-Directeur)
Benoît DESJARDINS
Frédéric HECHT
Frédéric NATAF

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Mes premiers remerciements sont pour ma directrice CHRISTINE BERNARDI. Je lui exprime ma gratitude pour la confiance dont elle m'a témoigné en me proposant ce sujet. Je la remercie également pour son encadrement et l'attention continuelle qu'elle m'a porté.

Je voudrais remercier STEPHANE DEL PINO, qui a accepté de co-diriger cette thèse. Ses conseils, son organisation et ses idées ingénieuses m'ont beaucoup appris. je le remercie également de m'avoir permis de développer dans `freefem3D`.

Mes pensées vont vers TOMAS CHACON REBOLLO. Notre collaboration m'a été extrêmement bénéfique. Son absence à ma soutenance m'attriste et je lui souhaite un prompt rétablissement.

Je voudrais remercier YVON MADAY pour l'intérêt qu'il porte à mes recherches.

Je remercie messieurs CLAUDIO CANUTO et ALEXANDRE ERN pour le temps qu'ils m'ont consacré à rapporter cette thèse. Je souhaite de plus leur témoigner toute ma gratitude.

JEAN-PAUL CHEHAB, FRÉDÉRIC COQUEL, BENOIT DESJARDINS, FRÉDÉRIC HECHT et FRÉDÉRIC NATAF me font l'honneur d'avoir accepté d'être membres du jury. Je les remercie pour cet intérêt.

Je tiens à remercier les occupants de bureau 3D23 ainsi que mes collègues du laboratoire J-L. LIONS : Benjamin, Mouna, Evelyne, Mathieu, Emmanuel, Terence et Nicole, Filipa, Etienne, Alexandra (c), Sonia, Bui, Raphael, Joelle, Johanna, Rachida, Nicolas, Pascuale, Fred, Adel, Laurent (b), Laurent Dumas et sa femma Djamila ...

Je voudrais remercier le personnel incontournable du Laboratoire JACQUES-LOUIS LIONS : Mesdames DANIELE BOULIC et LILIANE RUPRECHT. Une pensée particulière au très dynamique M DAVID pour sa gentillesse, sa serviabilité et l'effort fourni pour l'impression de ce document.

Je remercie mes amis, et pour ne pas le facher, je commence par Didier alias Jean-Luc (arrrrrettes grischhheh!). Ulrich (mais c'est pas possible la tassimo!). Jean-Baptiste (waw, si c'est comme ça, je viendrai chaque vendredi et samedi). Momie alias (Mohammed) et Mourad son complice (vous savez de quoi je parle!!). Stéphane (Delpinux), désolé pour la drissmania (GDF)!!, dans le bureau et aussi partout...mais je pense que ce n'est que le début. Merci aussi à tes parents, pour leur gentillesse et accueil. Maintenant, ils peuvent voir leur fils plus que ces derniers mois (quoique... le preconditionneur attend :-).

Philou, le cochon (hépipip, uiknbceloijkkjocec, hé P.....), maintenant, c'est quand tu veux (Saint-Germain)!

Je remercie toute ma famille : Sofiane (le terrible), Samy (le pirate), Ismail (le cazawi), Salomé (la douce), Sara (la belle), Abderrahmane (le génie haha), Meryeme (Laaroubia), Allal (le gentil), Abellilah (le kenitra :-), Rochdi (l'affectueux, grâce à toi, j'ai aimé les maths, mais ce n'est que partie remise) et Virginie (la sympathique). Je n'oublie pas biensur ton frère William, Bob alias Guillaume, merci pour ta gentillesse, tes conneries surtout (je n'oublierai jamais la période passée avec toi (et en plus comme chef) : polytuiles, flamée, ardoise,... : dis moi, dis moi dans l'oreille, je te laisse continuer mon amour ...).

Mon frère Youssef, je le remercie beaucoup pour ses encouragements, son amour et son calme. La prochaine sera la tienne, accroche-toi (Born To Run... du Boss). Alexandra,

merci pour tout, et surtout pour la correction orthographique apportée à ce manuscrit. Prends soin de mon frère, et bon courage pour la suite.

Merci à Denise et Jean-Paul, pour le cadeau qui m'ont offert \implies la douce Angélique. Merci aussi à Léo et sa copine Mélanie.

Angélique, merci pour ton amour, soutien, encouragements, et notre bébé (bon courage pour la suite... hahaha). "Il fallait que je finisse par un sourire j'

*À ma sœur Nezha,
À mes parents,
à mes frères et sœurs,
à Angélique.*

Table des matières

Introduction générale	1
Notations et quelques rappels	9
I Un algorithme pour un modèle de fluides couplés et turbulents	11
1 Cas d'un seul fluide turbulent, l'océan par exemple	15
1.1 Position du problème	15
1.2 Cas homogène : $k = 0$ à la surface de l'océan	16
1.2.1 Schéma itératif et principaux résultats	17
1.2.2 Passage à la limite.	27
1.3 Cas non homogène : $k = \lambda \mathbf{u} ^2$ à la surface de l'océan	32
1.3.1 Schéma itératif et principaux résultats	33
1.3.2 Majoration des quantités I_j , pour $1 \leq j \leq 7$	36
1.3.3 Conclusion :	45
2 Couplage de deux fluides turbulents : océan/atmosphère	47
2.1 Position du problème	47
2.2 Schéma itératif et principaux résultats	49
2.2.1 Schéma itératif	49
2.2.2 Principaux résultats	50
2.2.3 Passage à la limite	69
2.2.4 Unicité	76
2.2.5 Conclusion	80

II	Résolution des EDP par un code spectral	81
3	Une méthode spectrale dans des domaines à géométries complexes	83
3.1	Rappels sur la méthode spectrale	83
3.1.1	Rappels sur les polynômes de Legendre	83
3.1.2	Intégration numérique	84
3.1.3	Erreur d'approximation polynômiale	85
3.2	Méthode spectrale dans des domaines à géométries complexes	86
3.2.1	Description de la méthode	86
3.2.2	Conditions aux limites naturelles	87
3.3	Estimations d'erreurs <i>a priori</i>	88
3.3.1	Erreur d'approximation polynômiale	88
3.3.2	Estimations <i>a priori</i>	89
3.4	Problème aux limites de type DIRICHLET	93
3.4.1	Pénalisation	93
3.4.2	Problème abstrait	93
3.4.3	Estimations d'erreurs	94
3.4.4	Évaluation des intégrales numériques	100
4	Validation et implémentation	103
4.1	Domaines tensoriels	103
4.1.1	Équations de Laplace	103
4.1.2	Équation de Stokes	107
4.1.3	Système de l'élasticité linéarisée	113
4.2	Domaines non tensoriels	117
4.3	Implémentation	119
4.3.1	Détails de la mise en œuvre	120
4.3.2	Conclusion et futurs développements	126
5	Simulation numérique du couplage océan/atmosphère	131
A	Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup	141
A.1	Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup sur l'opérateur de divergence	142

A.2	Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup	142
A.2.1	Première étape : calcul de $b_{\Omega}(\mathbf{v}_{\Omega}, q_{\Omega})$	143
A.2.2	Deuxième étape : minoration de $\beta(\omega)$	145
A.2.3	Troisième étape : caractérisation de la constante c	145
A.3	Une remarque sur la condition inf-sup en utilisant la semi-norme	145
B	Une condition de type inf-sup	147
	Bibliographie	153

Introduction générale

Ce mémoire comporte deux parties et deux annexes.

Dans la première partie, nous nous intéressons à la résolution d'un problème de couplage océan/atmosphère, dont le modèle a été proposé par LIONS-TEMAM-WANG [52]. À ces fins, nous proposons un algorithme itératif, permettant d'approcher ce modèle. La seconde partie est consacrée à l'analyse et à la mise en œuvre d'une nouvelle méthode spectrale dans des domaines à géométrie complexe.

Dans l'annexe A, nous donnons une caractérisation de la constante de condition inf-sup pour l'opérateur divergence. Enfin, en annexe B, nous montrerons une variante de la condition inf-sup.

Première partie : un premier modèle de couplage océan/atmosphère

Les problèmes d'océanographie étudiés dans cette thèse sont posés aux échelles climatiques, c'est-à-dire de très grandes échelles de temps et d'espace. Comme l'océan constitue une couche d'eau mince entourant la planète, les phénomènes considérés sont anisotropes. On distingue les grandes échelles horizontales et les petites échelles verticales, qui ont deux conséquences très importantes :

- on suppose que l'océan est constitué d'un fluide hydrostatique, et
- on paramètre les échanges turbulents verticaux dans l'océan par les seules viscosités turbulentes verticales.

On fait l'hypothèse du toit rigide qui suppose que la surface de l'océan est fixe. L'influence de l'atmosphère sur l'océan est prise en compte par les conditions aux limites en surface qui ne dépendent que de la vitesse du vent, que l'on suppose donnée.

Les équations considérées sont non linéaires. Parmi les non linéarités rencontrées, on en distingue deux principales :

- les termes de couplage issus des viscosités turbulentes, et
- le terme de production d'énergie de la turbulence, couplant la vitesse à l'énergie cinétique turbulente.

Notons qu'en général, les viscosités turbulentes ne sont pas des fonctions bornées. En revanche, dans cette thèse, on suppose qu'elles sont soit bornées, soit de la forme $\nu + c\sqrt{k} + \tau$ (voir [46], [60] et [20]). Pour l'analyse théorique, on se limite au cas où ces viscosités et leurs dérivées sont bornées.

Présentation du modèle

Pour modéliser le couplage océan/atmosphère, on utilise le système d'équations suivant, voir par exemple [7], [9], [10], [11],[47], [52], et [60].

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot (\alpha_i(k_i)\nabla \mathbf{u}_i) + \text{grad } p_i &= \mathbf{f}_i \text{ dans } \Omega_i, \\
\nabla \cdot \mathbf{u}_i &= 0 \text{ dans } \Omega_i, \\
-\nabla \cdot (\gamma_i(k_i)\nabla k_i) &= \alpha_i(k_i)|\nabla \mathbf{u}_i|^2 \text{ dans } \Omega_i, \\
\mathbf{u}_i &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_i, \\
k_i &= 0 \text{ sur } \Gamma_i, \\
\alpha_i(k_i)\partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i - p_i \mathbf{n}_i + \kappa_i |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma, \\
k_i &= \lambda |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \text{ sur } \Gamma.
\end{aligned} \tag{1}$$

Ce modèle de turbulence est issu des équations de Navier-Stokes [70], et appelé : modèle de Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS). Pour $1 \leq i \leq 2$, \mathbf{u}_i désigne la vitesse du fluide F_i , p_i est sa pression, et k_i est l'énergie cinétique turbulente (ect). α_i et γ_i sont respectivement les viscosités et coefficients de diffusions turbulents des fluides F_i . λ et κ_i sont deux constantes strictement positives. Le domaine Ω_1 représente l'océan, et Ω_2 l'atmosphère. Les deux première lignes sont le système de Stokes dans le domaine Ω_i . La troisième ligne

$$-\nabla \cdot (\gamma_i(k_i)\nabla k_i) = \alpha_i(k_i)|\nabla \mathbf{u}_i|^2,$$

est une équation scalaire, elle permet de calculer l'énergie cinétique turbulente k_i .

Notons que dans notre modèle, nous n'avons pas tenu compte de

- la force de **Coriolis**,
- le terme de convection $\mathbf{u}_i \cdot \nabla k_i$ dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente,
- le terme de dissipation turbulente $\varepsilon = c \frac{k_i \sqrt{k_i}}{\ell}$, (où ℓ est la longueur de mélange vertical) dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente,
- la variation de la densité dans la direction verticale, surtout pour l'atmosphère, mais aussi dans certaines zones comme les eaux tropicales.

Pour la prise en compte de tous ces termes, on pourra consulter [44].

L'originalité du modèle proposé dans cette thèse est le couplage de deux fluides turbulents (ce qui est à ma connaissance, rare dans la littérature), et aussi le traitement conjoint de toutes les non-linéarités dues aux effets de la turbulence (qui sont bien modélisés) :

- diffusion et viscosité turbulente : α_i et γ_i ,
- termes de production de l'énergie cinétique turbulente k_i ,
- conditions aux limites à l'interface.

La principale difficulté mathématique de ce système vient du fait que son second membre est seulement intégrable.

Pour approcher la solution de (1), nous proposons le schéma itératif suivant : connais-

sant $(\mathbf{u}_i^n, p_i^n, k_i^n)$, trouvons $(\mathbf{u}_i^{n+1}, p_i^{n+1}, k_i^{n+1})$, la solution de

$$\int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_i - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v}_i p_i^{n+1} + \kappa_i \int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \cdot \mathbf{v}_i = \int_{\Omega_i} \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i,$$

$$\forall q_i \in L^2(\Omega_i), \quad - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} q_i = 0,$$
(2)

et,

$$k_i^{n+1} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_i, k_i^{n+1} = \lambda |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2, \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$\text{et } \int_{\Omega_i} \gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1} \nabla \varphi_i = \int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 \varphi_i.$$
(3)

Ce schéma est inspiré de l'algorithme proposé par BERNARDI et AL dans [7] (méthode des éléments finis), et [11] (méthode spectrale).

Analyse du schéma itératif

Cette première partie est composée de deux chapitres. Nous commençons par l'étude d'un système d'équations modélisant l'écoulement d'un fluide turbulent. Ce modèle a été considéré au départ par MOHAMMADI-PIRONNEAU [60] d'une part, et par LEWANDOWSKI [47] d'autre part. Il s'écrit

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\alpha(k) \nabla \mathbf{u}) + \text{grad } p &= \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot (\gamma(k) \nabla k) &= \alpha(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0, \\ k &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \alpha(k) \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u} - p \mathbf{n} + \kappa \mathbf{u} |\mathbf{u}| &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma, \\ k &= \lambda |\mathbf{u}|^2 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$
(4)

Ce type de système est très souvent utilisé en ingénierie ou en géophysique, voir par exemple [25], [47] et [60].

Le schéma que nous proposons est : connaissant (\mathbf{u}^n, p^n, k^n) , trouvons $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}, k^{n+1})$ solution de

$$\int_{\Omega} \alpha(k^n) \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} p^{n+1} + \kappa \int_{\Gamma} |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

$$\forall q \in L^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} q = 0,$$
(5)

et,

$$k^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$k^{n+1} = \lambda |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$\text{et } \int_{\Omega} \gamma(k^n) \nabla k^{n+1} \nabla \varphi = \int_{\Omega} \alpha(k^n) |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 \varphi. \quad (6)$$

La convergence du schéma proposé est prouvée pour des solutions assez régulières, quand la viscosité turbulente ν est suffisamment grande. Ainsi, en supposant que les suites $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(k^n)_n$ appartiennent respectivement, à $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d$ ($\varepsilon > 0$) et à $W^{1,3}(\Omega)$, et y sont bornées, on montre que le schéma est contractant en un certain sens. Notons que dans la première section de ce premier chapitre, on montrera que dans le cas d'absence de tension de vent à la surface, c'est-à-dire $k|_{\Gamma} = 0$ sur $\partial\Omega$, il suffit que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ soit bornée dans $W^{1,3}(\Omega)^d$ (voir Théorème 1). En effet, en utilisant la transformation de Kirchoff, les troisième et dernière lignes du problème (4)

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\gamma(k) \nabla k) &= \alpha(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \quad \text{dans } \Omega, \\ k &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} -\Delta \ell &= \tilde{\alpha}(\ell) |\nabla \mathbf{u}|^2 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega), \\ \ell &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(k^n)_n$ est dans $W^{1,3}(\Omega)$, et

$$\|k^n\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq c \|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3}(\Omega)^d}^2.$$

Dans le cas non homogène, le terme de production de l'énergie cinétique turbulente

$$k = \lambda |\mathbf{u}|^2 \quad \text{sur } \Gamma,$$

pose problème. Pour le traiter, on introduit un relèvement harmonique R , et on choisit $k^n - R(k^n)$ comme fonction test dans (6). Ceci permet de montrer que la suite $(k^n)_n$ est contractante.

Ensuite, on montre la convergence de $(\mathbf{u}^n)_n$ à partir de la relation

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq c \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Enfin, une condition de type inf-sup (montrée en Annexe B), montre que la suite $(p^n)_n$ est convergente.

Le second chapitre traite le modèle (1) du couplage océan/atmosphère. On montre que le schéma (2)-(3) converge vers la solution attendue. Pour ce faire, on choisit $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n$ comme fonction test dans (2). Ensuite, on fait la somme sur $i = 1, 2$. On supprime ainsi la dépendance au terme de couplage à l'interface, à savoir

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} (|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) - |\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^n| (\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^n)) (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n), \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq 2,$$

voir Lemme 2. C'est la raison principale qui nous a conduit à considérer cet algorithme, car le terme qui provient du couplage à l'interface dans le schéma proposé par BERNARDI et AL dans [11], fait apparaître aussi l'itérée \mathbf{u}_i^{n-1} , c'est à dire

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} (|\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^n| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) - |\mathbf{u}_i^{n-1} - \mathbf{u}_j^{n-1}| (\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^n)) (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n), \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq 2,$$

cette quantité est très difficile à traiter.

En considérant notre algorithme, nous obtenons une relation de type

$$\sum_{i=1}^2 \|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)} \leq c \sum_{i=1}^2 \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{H^1(\Omega_i)}.$$

L'étape suivante consiste à montrer que la suite $(k_i^n)_n$ est contractante. On introduit alors l'opérateur de relèvement harmonique R_i , défini comme suit, pour tout $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} R_i &: H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Omega_i) \\ \eta &\longrightarrow R_i \eta, \quad \text{et vérifie} \\ -\Delta R_i &= 0 \quad \text{dans } \Omega_i, \\ R_i &= \eta \quad \text{sur } \Gamma_i, \\ R_i &= 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $i = 1, 2$, on choisit $\varphi_i = k_i^{n+1} - k_i^n - R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)$ comme fonction test dans l'équation (3). En raison du terme de production de l'énergie cinétique turbulente à l'interface $k_i = \lambda |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$ sur Γ , il est nécessaire d'estimer la quantité

$$\left\| |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 \right\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \text{en fonction de} \quad \sum_{i=1}^2 \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{H^1(\Omega_i)}.$$

On utilise alors le Théorème 7, voir par exemple V.GIRAULT-P.-A.RAVIART [39], Corollaire 1.1 et aussi P.GRISVARD [41].

Enfin, on montre que la suite $(p_i^n)_n$ est de Cauchy, en utilisant une variante de la condition inf-sup (voir annexe B). De plus, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|p_i^{m+1} - p_i^{n+1}\| &\leq c \sum_{i=1}^2 \left[\|\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_i^{n+1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)} + \|k_i^{m+1} - k_i^{n+1}\|_{H^1(\Omega_i)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| |\mathbf{u}_i^{m+1}| |\mathbf{u}_i^{m+1}| - |\mathbf{u}_i^{n+1}| |\mathbf{u}_i^{n+1}| \right\|_{L^{3/2}(\Gamma)}^2 \right]. \end{aligned}$$

On montre aussi que la limite obtenue est une solution du problème de départ, voir Théorème 11. Pour finir ce chapitre, on vérifie que sous les hypothèses du Théorème 9, la solution est unique, voir Théorème 12.

Conclusion : On conclut que le schéma que nous proposons dans cette thèse

- converge exponentiellement pour des viscosités assez grandes, car $(k_i^n)_n$ est contractante,
- converge vers l'unique solution du problème de départ, pour des viscosités assez grandes,
- la convergence ne dépend pas de la méthode choisie : éléments finis ou spectrale par exemple,
- est tridimensionnel. Sachant qu'en 2D, on a besoin de moins d'hypothèses pour qu'il converge.

Dans la seconde partie, nous mettons en œuvre cet algorithme en deux méthodes numériques

- méthode des éléments finis, en utilisant le logiciel `freefem3d`, voir <http://www.freefem.org/ff3d>,
- une nouvelle méthode spectrale, basée sur une technique de domaines fictifs utilisée dans [30], que nous avons mise en œuvre, et ensuite implémentée dans le logiciel `freefem3d`.

Seconde partie : nouvelle méthode spectrale

On rappelle les principales propriétés de la méthode spectrale dans des domaines tensoriels : la base utilisée est la famille formée par les polynômes de Legendre. On propose une nouvelle approche de cette méthode dans des domaines en géométrie plus complexe (non tensorielle). Cette méthode s'appuie sur deux idées : un traitement des conditions aux limites de Dirichlet par pénalisation, et une approximation de la géométrie du domaine Ω par un pavage en parallélépipèdes.

- **Première idée : traitement des conditions aux limites.** On remplace la condition de Dirichlet $u = g$ sur le bord $\partial\Omega$, par les conditions de Robin. Cette méthode est due à NITSCHKE [63], (on pourra aussi consulter [45]). Dans le cas du Laplacien, on écrit

$$\frac{1}{\varepsilon} u + \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon} g \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

- Nous utilisons le Théorème 18 qui montre que le nouveau problème converge fortement vers le problème initial et
- nous effectuons une intégration numérique sur des maillages de la surface.
- **Seconde idée : approximation de la géométrie.** Cette idée consiste à approcher l'intégrale d'une fonction f sur Ω , par une somme finie des intégrales de f sur des pavés de Ω , c'est-à-dire

$$\text{on approche } \int_{\Omega} f(x) dx \quad \text{par} \quad \sum_j^M \int_{D_j} f(x) dx,$$

où les D_j sont des pavés de \mathbb{R}^d tels que $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} D_j$, approchée par $\Omega_M = \cup_{j=1}^M D_j$. Nous avons mis en œuvre dans cette thèse des techniques de type *octree*, voir figure 1.

On prouve que si les intégrales sont exactes, la méthode conserve les propriétés spectrales : on prouve en effet les estimations d'erreurs suivantes

$$\begin{aligned} \|u - u_{\delta}\|_{H^1(\Omega)} &\leq c(N^{1-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon} \|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^2(\partial\Omega)}), \text{ et} \\ \|u - u_{\delta}\|_{L^2(\Omega)} &\leq c(N^{-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \varepsilon \|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^2(\partial\Omega)}). \end{aligned}$$

Pour montrer ces inégalités, nous avons prouvé les résultats intermédiaires suivants

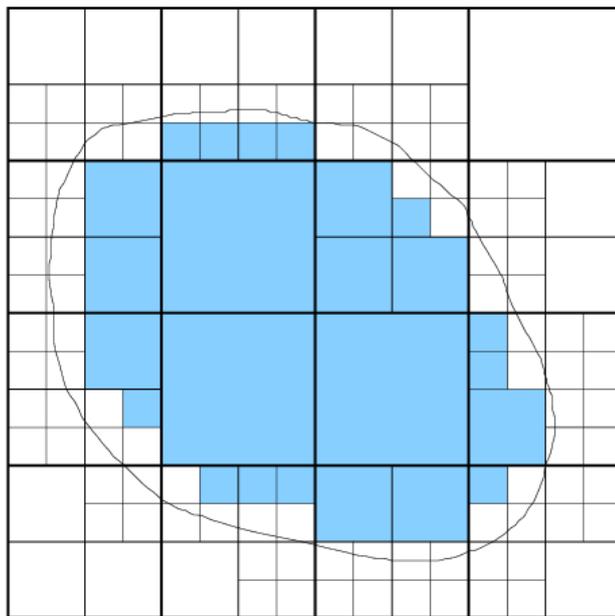


FIG. 1 – Exemple de partition d'un domaine Ω à l'aide d'un algorithme de type *octree*.

- les erreurs d'approximation polynômiale (Théorème 13) dans des pavés de \mathbb{R}^d (voir [14], chapitre III, Théorème 1.2 pour $d = 1$, et chapitre III, Théorèmes 2.4 et 2.9 pour $d \geq 1$), restent valable dans un domaine Ω quelconque (voir Théorème 15). Pour ce faire, nous avons utilisé le Théorème 14 d'extension linéaire . Ce qui permet de faire apparaître le terme en $N^{\sigma-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)}$, $\sigma = 0, 1$,
- le terme en $\sqrt{\varepsilon}$ dans la première inégalité, provient du Théorème 19 dont la preuve est une conjonction des idées de BABUŠKA [5], et du Théorème 18 (voir par exemple [19], [50], et [57]),
- enfin, l'estimation d'erreur en norme L^2 , s'obtient en utilisant l'argument de dualité d'AUBIN-NITSCHÉ [62].

Ceci achève l'analyse théorique de cette nouvelle méthode. La suite de cette partie est consacrée à la vérification numérique du code spectral tridimensionnel que nous avons

écrit en `c++` [69].

En l'absence d'un outil de calcul tridimensionnel (et même bidimensionnel), permettant la résolution numérique des équations aux dérivées partielles elliptiques par les méthodes spectrales en générale, et particulièrement dans des domaines non tensoriels, nous avons commencé par développer un code spectral en une dimension d'espace. Profitant de l'aspect tensoriel des méthodes spectrales standard, telles qu'introduites par D. GOTTLIEB et S. ORSZAG [40] [65], (à savoir, dans des pavés), le code bidimensionnel et tridimensionnel est réalisé dans ce cas. Ensuite, nous avons généralisé ce code de calcul pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans des domaines à géométrie complexe. Les détails d'implémentation liés à l'architecture du code, tels que l'*octree* sont présentés dans la section 4.3 de ce chapitre.

Simulations numériques du modèle de couplage océan/atmosphère.

Dans ce dernier chapitre, nous présentons les résultats numériques du couplage océan/atmosphère, par la méthode spectrale, et nous les comparons à ceux que nous obtenons par la méthode des éléments finis. Les grandeurs physiques utilisées pour ces tests sont réalistes et elles sont données dans [7] et [8].

Annexe A : une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup sur l'opérateur de divergence

Le travail fourni dans cette annexe a fait l'objet d'un papier soumis aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [33], en collaboration avec S. DEL PINO et U. RAZAFISON. Nous nous sommes intéressés à la caractérisation de la constante de la condition inf-sup de type BABUŠKA-BREZZI pour l'opérateur de divergence, voir par exemple V. GIRAULT-P.-A. RAVIART [39], BABUŠKA [4], et F. BREZZI [18]. Nous avons donné un encadrement de cette constante en fonction des normes des relèvements harmoniques. La preuve est technique, et repose sur une construction particulière

- d'une fonction q à moyenne nulle dans un domaine Ω_1 , contenant strictement Ω , et
- d'un vecteur \mathbf{v} appartenant à $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Annexe B : une condition de type inf-sup

Dans cette annexe, on montre une condition de type inf-sup de l'opérateur divergence. En effet, on prouve cette condition pour des pressions qui ne sont pas à moyennes nulles dans un ouvert Ω , connexe, borné et à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^d , et des champs de vecteurs vitesses, qui ne sont pas nuls sur le bord $\partial\Omega$.

$$\inf_{q \in L^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}(x) q(x) dx \right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)}} = \beta^1(\Omega),$$

où $\beta^1(\Omega)$ est une constante strictement positive ne dépendant que de Ω .

Notations et quelques rappels

Nous précisons ici les notations qui seront utilisées dans cette thèse. Pour plus de détails sur les définitions et les propriétés des espaces de Sobolev on renvoie le lecteur à [1], [51], [17]. Les espaces de fonctions à valeurs vectorielles ainsi que les champs vectoriels seront notés en caractères gras. Par exemple

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3); \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad u_i \in H^1(\Omega)\}.$$

Géométrie

- d : dimension de l'espace.
- Ω : ouvert borné à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^d .
- \mathbf{n} : vecteur normal, unitaire extérieure à Ω .
- \mathbf{x} : point générique de Ω , et (x_1, \dots, x_d) ses coordonnées.

Espaces fonctionnels

Soient p et s deux réels tels que $1 \leq p \leq \infty$, et $s = m + \sigma$, avec m un entier positif et $0 < \sigma < 1$. Soit $p' \in \mathbb{R}$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On définit les espaces suivants :

- $\mathcal{D}(\Omega) = \{ \text{fonctions indéfiniment différentiables à support compacts dans } \Omega \}$,
- $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{ f|_{\Omega}, \quad \text{telle que } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \}$,
- $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ mesurable, telle que } \int_{\Omega} |f|^p d\mathbf{x} < +\infty \right\}, p < +\infty$,
- $L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ mesurable, telle que } \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess}|f(\mathbf{x})| < +\infty \right\}$,
- $L_0^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \text{ telle que } \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\}$,
- $W^{m,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \}$,
- $W_0^{m,p}(\Omega)$ est l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$,
- $W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ est l'espace des distributions f définies dans Ω , telles que,

$$f \in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|^p}{\|x - y\|^{d+\sigma p}} dx dy < +\infty, \quad \forall |\alpha| = m$$

- $W^{s,\infty}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f \in W^{m,\infty}(\Omega)$ telles que,

$$\max_{|\alpha|=m} \text{ess} \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{\|x - y\|^\sigma} < +\infty.$$

- $W^{-m,p'}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))'$ est le dual de l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$,
- $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$,
- $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{f \in L^2(\partial\Omega), \exists u \in H^1(\Omega), \text{ tel que } u|_{\partial\Omega} = f\}$,
- $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ = le dual de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.
- **Définition de l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$** : on désigne par Γ_e et Γ_n deux parties de $\partial\Omega$, de mesures positives dans $\partial\Omega$, telles que

$$\partial\Omega = \bar{\Gamma}_e \cup \bar{\Gamma}_n, \quad \text{et} \\ \Gamma_e \cap \Gamma_n = \emptyset.$$

On définit l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$ comme étant le sous-espace des fonctions de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$ dont le prolongement par 0 à $\partial\Omega$ appartient à $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Produits scalaires et normes

Dans toute la suite $1 \leq p < +\infty$.

- $\forall u \in L^p(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{et} \quad \|u\|_{\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess}|u(\mathbf{x})|,$
- $\forall u, v \in L^2(\Omega), \quad \|u\|_0 = \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad (u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x},$
- $\forall u, v \in H^m(\Omega), \quad (u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u)(\mathbf{x})(\partial^\alpha v)(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$
- $\forall u \in W^{m,p}(\Omega), \quad \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ et}$
 $\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess} \max_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha u(\mathbf{x})|,$
- $\forall u \in W^{s,p}(\Omega), \quad \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|^p}{\|x-y\|^{d+\sigma p}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}},$
- $\forall u \in W^{m,p}(\Omega), \quad |u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ (semi-norme de } u \text{ dans } W^{m,p}(\Omega)),$
- $\forall f \in W^{-m,p'}(\Omega), \quad \|f\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega), v \neq 0} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_{W^{m,p}(\Omega)}},$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $W^{-m,p'}(\Omega)$ et $W_0^{m,p}(\Omega)$,
- **définition de $\|f\|_{W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}$ pour tout $1 < p < +\infty$** : soit Γ une partie ouverte de $\partial\Omega$, de classe $C^{m-1,1}$. L'image de $W^{m,p}(\Omega)$ par l'opérateur trace γ sur Γ est notée $W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$. Et sa norme est

$$\|f\|_{W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} = \inf \{ \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}; \quad v \in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \gamma(v) = f \}.$$

Dans le cas particulier où $m = 1$ et $p = 2$, on a

$$\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf \{ \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad v \in H^1(\Omega), \text{ et } \gamma(v) = f \}.$$

Première partie

Un algorithme pour un modèle de fluides couplés et turbulents

Un modèle de couplage Océan/Atmosphère

On s'intéresse dans cette partie de la thèse au système d'équations suivant

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot (\alpha_i(k_i)\nabla \mathbf{u}_i) + \mathbf{grad} p_i &= \mathbf{f}_i && \text{dans } \Omega_i, \\
\nabla \cdot \mathbf{u}_i &= 0 && \text{dans } \Omega_i, \\
-\nabla \cdot (\gamma_i(k_i)\nabla k_i) &= \alpha_i(k_i)|\nabla \mathbf{u}_i|^2 && \text{dans } \Omega_i, \\
\mathbf{u}_i &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_i, \\
k_i &= 0 && \text{sur } \Gamma_i, \\
\alpha_i(k_i)\partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i - p_i \mathbf{n}_i + \kappa(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2, \\
k_i &= \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 && \text{sur } \Gamma,
\end{aligned} \tag{1}$$

où le triplet (\mathbf{u}_i, p_i, k_i) est défini dans le domaine Ω_i , $1 \leq i \leq 2$, et

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2, \\
\Gamma_1 &= \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, \quad \text{et} \\
\Gamma_2 &= \partial\Omega_2 \setminus \Gamma.
\end{aligned}$$

Le système (1) est un modèle très simplifié représentant le couplage de deux fluides turbulents F_i , ($i = 1, 2$), par exemple le couplage océan/atmosphère, qui a été proposé par LIONS-TEMAM-WANG, on réfère aux [52], [53], [54] et [55], ou dans le cas des fluides stratifiés (voir LEWANDOWSKI [47]). Ces deux fluides F_i sont couplés par la condition à l'interface Γ , à savoir la sixième équation du système (1)

$$\alpha_i(k_i)\partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i - p_i \mathbf{n}_i + \kappa(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2.$$

Cette interface air-mer est supposée satisfaire l'hypothèse du toit rigide : la hauteur des vagues est supposée négligeable par rapport à la largeur de l'océan, et les équations sont intégrées le long des vagues. Cette hypothèse est standard en géophysique et en océanographie. Nous allons maintenant, donner un sens aux équations qui forment le système (1)

- Les deux premières lignes de (1) sont les équations de Stokes dans Ω_i ,
- la troisième ligne est une équation scalaire qui permet de calculer l'énergie cinétique turbulente k_i

D'après J-L. LIONS [50], on peut écrire une formulation faible mixte des deux premières lignes, (voir aussi [52] dans le cas de couplage océan/atmosphère en l'absence de turbulence). La troisième ligne et les conditions aux limites correspondantes sont très complexes. En effet, la difficulté principale vient du fait que le terme de droite $\alpha_i(k_i)|\nabla \mathbf{u}_i|^2$ appartient seulement à $L^1(\Omega_i)$. Dans le cas d'un seul fluide turbulent avec des frontières homogènes, des études sont faites dans [15], [37], [47] et [48]. Dans ces références, l'équation pour l'énergie cinétique turbulente est prise dans le sens renormalisée de P-L. LIONS et F.MURAT, (voir [61]), ou dans le sens équivalent d'entropie de BENILAN et AL, (voir [6]), et des estimations a priori de type BOCCARDO-GALLOUËT [16] sont employées. Cependant, en raison des conditions aux limites à l'interface Γ , cette renormalisation ne semble pas une manière facile d'étude de l'équation de l'énergie cinétique turbulente dans le problème actuel, et

on ne peut pas espérer employer directement les résultats de BOCCARDO-GALLOUËT [16]. Pour cette raison, C. BERNARDI et AL, (voir [10]) ont effectué la transformation de Kirchhoff de l'inconnu afin de remplacer l'opérateur $(\nabla \cdot \gamma_i(k_i)\nabla)$ par l'opérateur de Laplace Δ . Ainsi ils obtiennent la nouvelle équation correspondante dans le sens de la transposition, (voir STAMPACCHIA [68] et LIONS-MAGENES [51]). Ceci permet de prouver l'existence d'une solution du système (1), (voir Corrolaire 5.3, [10]). De plus, s'il existe une solution $\mathbf{U}_i = (\mathbf{u}_i, p_i, k_i)$, telle que la vitesse \mathbf{u}_i appartienne à $W^{1,p}(\Omega_i)^d$, où p est un réel vérifiant $p > 2d$, pour ν assez grand, alors $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ est l'unique solution de (1) dans un sens faible, (voir Théorème 6.3, [10]).

Cette partie de la thèse est composée de deux chapitres. On commencera dans un premier temps par le cas d'un seul fluide turbulent. Nous utilisons un modèle simple, considéré au début par MOHAMMADI-PIRONNEAU [60], et aussi par LEWANDOWSKI [47].

Chapitre 1

Cas d'un seul fluide turbulent, l'océan par exemple

1.1 Position du problème

Nous considérons un système d'équations modélisant l'écoulement stationnaire d'un fluide turbulent sur un domaine borné de \mathbb{R}^d , où $d = 2, 3$. Les équations sont couplées par des termes non linéaires qui sont soit le coefficient de diffusion soit le second membre. Nous proposons un schéma numérique itératif. La convergence de la méthode est prouvée pour des viscosités assez grandes, et en supposant que la vitesse et l'énergie sont assez régulières. L'unicité de la solution est aussi prouvée sous cette condition. Le modèle que nous utilisons a été considéré en particulier par B. MOHAMMADI, O. PIRONNEAU dans [60] et par R. LEWANDOWSKI dans [47]. On se place dans un ouvert Ω , convexe ou de classe $C^{1,1}$, borné de \mathbb{R}^d , ($d = 2$ ou 3). On partitionne sa frontière $\partial\Omega$ en deux, qu'on note : Γ_0 et Γ , où

- Γ_0 est la frontière de non-glissement, elle est composée de deux parties, une partie qui représente le fond de l'océan, et l'autre qui désigne les parois latérales.
- Γ est la frontière de glissement avec friction, elle désigne la surface de l'océan.

Les deux frontières sont de mesures strictement positives. On suppose que $\partial\Gamma_0$ et $\partial\Gamma$ sont des sous-variétés lipschitziennes de $\partial\Omega$. Le modèle s'écrit

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\alpha(k)\nabla \mathbf{u}) + \text{grad } p &= \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot (\gamma(k)\nabla k) &= \alpha(k)|\nabla \mathbf{u}|^2 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0, \\ k &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \alpha(k)\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} - p\mathbf{n} + \kappa\mathbf{u}|\mathbf{u}| &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma, \\ k &= \lambda|\mathbf{u}|^2 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pour plus de détails, on réfère aux articles [9] et [10] (par exemple), où l'existence de la solution, ainsi que l'unicité sont prouvées. Dans toute la suite de ce travail, le point générique sera noté $\mathbf{x} = (x, z)$ dans \mathbb{R}^2 , et $\mathbf{x} = (x, y, z)$ dans \mathbb{R}^3 . Et le champ de vecteurs \mathbf{u}

désigne la vitesse du fluide turbulent dans Ω , p est sa pression et k est l'énergie cinétique turbulente. On note que la turbulence est négligée sur le fond et les parois latérales Γ_0 , et on impose à l'énergie cinétique turbulente k , une valeur prescrite positive. Pour des raisons techniques, on la prendra nulle. Cela ne change en rien la structure mathématique du problème. En surface, on fait l'hypothèse que l'énergie cinétique turbulente dépend uniquement de la tension du vent. Le coefficient λ est sans dimension. Il est calculé à partir de données expérimentales, et il génère la condition de tourbillon à la frontière. La friction est modélisée par le coefficient κ . Il est constant, strictement positif et sans dimension. La fonction \mathbf{f} représente une force extérieure donnée et appartient à $L^2(\Omega)^d$. On désigne par $\alpha(k)$ la viscosité et par $\gamma(k)$ le coefficient de diffusion. Dans cette thèse, nous ne traiterons que le cas où les viscosités, ainsi que leur dérivées sont supposées bornées. Ainsi, nous supposons qu'elles vérifient l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \alpha(\cdot) \in W^{1,\infty}(\Omega), \gamma(\cdot) \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ et} \\ \forall \ell \in \mathbb{R}, \alpha(\ell) \geq \nu \text{ et } \gamma(k) \geq \nu, \end{cases} \quad (1.2)$$

où ν est une constante strictement positive qui représente une viscosité turbulente. Enfin r et r' sont deux réels strictement positifs, tels que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad \text{avec } r > d.$$

Dans toute la suite de ce chapitre, nous désignons par \mathbf{X} , le sous-espace de $\mathbf{H}^1(\Omega)$, défini par

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^d; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Le but de ce chapitre est de proposer un schéma numérique bien posé, convergent. Ensuite, on prouve que la limite n'est autre que la solution du problème initial, à savoir le modèle (1.1). Commençons alors par le cas homogène.

1.2 Cas homogène : $k = 0$ à la surface de l'océan

Dans cette partie, nous nous intéresserons au cas où l'énergie cinétique turbulente n'intervient pas sur l'interface Γ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de tension de vent à la surface. Le problème s'écrit alors

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\alpha(k)\nabla \mathbf{u}) + \text{grad } p &= \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot (\gamma(k)\nabla k) &= \alpha(k)|\nabla \mathbf{u}|^2 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0, \\ \alpha(k)\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} - p\mathbf{n} + \kappa\mathbf{u}|\mathbf{u}| &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma, \\ k &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le système (1.3) admet la formulation variationnelle suivante

$$\text{Trouver } (\mathbf{u}, p, k) \in \mathbf{X} \times L^2(\Omega) \times W_0^{1,r'}(\Omega) \text{ tel que}$$

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, & a(k; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + \kappa(|\mathbf{u}| \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega}, \\ \forall q \in L^2(\Omega), & b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

et

$$\forall \varphi \in W_0^{1,r}(\Omega), \quad C(k; k, \varphi) = \int_{\Omega} \alpha(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi \, d\mathbf{x}, \quad (1.5)$$

où les formes $a(\cdot; \cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ et $c(\cdot; \cdot, \cdot)$ sont définies par

$$\begin{cases} a(k; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\alpha(k) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \alpha(k) \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ b(\mathbf{v}, q) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, q \, d\mathbf{x}, \\ C(\ell; k, \varphi) = (\gamma(\ell) \nabla k, \nabla \varphi) = \int_{\Omega} \gamma(\ell) \nabla k \nabla \varphi \, d\mathbf{x}, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\tau) \mathbf{v}(\tau) \, d\tau. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le choix de $r > d$, dans la formulation (1.5) est nécessaire, puisque la quantité $\alpha(k) |\nabla \mathbf{u}|^2$ est seulement intégrable dans Ω . Comme l'espace $W^{1,r}(\Omega)$ s'injecte dans $L^{\infty}(\Omega)$, le terme $\int_{\Omega} \alpha(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi$ a un sens.

La preuve de l'existence d'une solution du problème (1.4)-(1.5) est basée sur le Théorème du point fixe. On réfère à [47] (voir chapitre 5).

1.2.1 Schéma itératif et principaux résultats

Dans cette partie, nous proposons un schéma itératif non linéaire. Nous montrerons la convergence quand la vitesse est assez régulière, et en ne considérant que des viscosités turbulentes assez grandes. Enfin, et sous les mêmes conditions, nous prouverons que la solution de notre problème est unique. Ceci impliquera que le schéma proposé, converge bien vers la solution désirée.

Schéma itératif

On fixe k_0 , et on associe au problème (1.4)-(1.5) le schéma :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}, k^{n+1}) \in \mathbf{X} \times L^2(\Omega) \times W_0^{1,r'}(\Omega), \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, & (\alpha(k^n) \nabla \mathbf{u}^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{n+1}) + \kappa(|\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \\ \forall q \in L^2(\Omega), & b(\mathbf{u}^{n+1}, q) = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

et

$$\forall \varphi \in W_0^{1,r}(\Omega) \quad c(k^n; k^{n+1}, \varphi) = (\alpha(k^n) |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2, \varphi). \quad (1.8)$$

Dans [7] et [11], C. BERNARDI et AL ont considéré un schéma semblable à celui proposé ci-dessus, la différence se trouve dans l'équation (1.7), notamment le terme à l'interface Γ

$$(|\mathbf{u}^n| \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_{\Gamma}.$$

Principaux résultats

Dans toute la suite, on considère seulement le cas tridimensionnel, où l'injection de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)^d$ est continue, voir par exemple [1] et [17] (chapitres VIII et IX). Il existe alors une constante c_0 , ne dépendant que du domaine Ω telle que

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \|\mathbf{v}\|_{L^6(\Omega)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (1.9)$$

De même, on notera par c_p la constante de Poincaré-Friedrichs,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq c_p \|\nabla \mathbf{v}\|_0. \quad (1.10)$$

On va montrer tout d'abord que les suites $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(k^n)_n$ convergent et sont "contractante", sous des hypothèses que l'on précise dans le Théorème suivant.

Théorème 1 (Convergence). *Soit $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$. On suppose qu'il existe une constante M , strictement positive telle que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ vérifie*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3}(\Omega)^d} \leq M.$$

Alors, il existe une constante c ne dépendant que du domaine Ω , de α , de γ et de M , telle que, si $\nu > c$, les suites $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(k^n)_n$ convergent. En plus elles sont contractantes dans le sens suivant

$$\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \leq K \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0, \text{ et}$$

$$\|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \leq K \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0,$$

où $K = \frac{c}{\nu} < 1$.

Démonstration. La preuve de ce Théorème se fait en plusieurs étapes. Pour commencer nous allons montrer un résultat liant les normes de $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(k^n)_n$.

Première étape

Lemme 1. *Soit $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ et soit $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p, k)$ une solution du problème (1.3). Si $\mathbf{u} \in W^{1,3}(\Omega)^d$, alors il existe une constante c qui ne dépend que du domaine Ω , de α et de γ telle que $k \in W^{1,3}(\Omega)$ et*

$$\|k\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq c \|\mathbf{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)^d}^2.$$

Preuve du Lemme. Commençons par transformer le système (1.7)-(1.8). Pour cela, nous utilisons la transformation de Kirchoff : soit G définie par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad G(s) = \int_0^s \gamma(\tau) d\tau.$$

D'après l'hypothèse (1.2), G est de classe C^1 et croissante. Elle est donc bijective sur \mathbb{R} , soit G^{-1} son inverse.

Ainsi, la fonction $\bar{\alpha} = \alpha \circ G^{-1}$ vérifie

$$\bar{\alpha} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \ell \in \mathbb{R}, \bar{\alpha}(\ell) \geq \nu.$$

Introduisons une nouvelle inconnue ℓ définie par $\ell = G(k)$.

Comme $\nabla \ell = \gamma(k)\nabla k$, le système (1.3) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\bar{\alpha}(\ell)\nabla \mathbf{u}) + \text{grad } p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta \ell = \bar{\alpha}(\ell)|\nabla \mathbf{u}|^2 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0, \\ \bar{\alpha}(\ell)\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} - p\mathbf{n} + \kappa\mathbf{u}|\mathbf{u}| = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma, \\ \ell = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Pour tout $\mathbf{u} \in W^{1,3}(\Omega)^d$, la formulation variationnelle associée à l'équation de l'énergie cinétique turbulente s'écrit

$$\forall \varphi \in W_0^{1,\frac{3}{2}}(\Omega), \quad - \int_{\Omega} \ell \Delta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \bar{\alpha}(\ell)|\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi \, dx, \quad (1.12)$$

donc

$$- \int_{\Omega} \ell \Delta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \bar{\alpha}(\ell)|\nabla \mathbf{u}|^2 \varphi \, dx \leq \|\bar{\alpha}\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d}^2 \|\varphi\|_{L^3(\Omega)}.$$

Comme l'injection de $W_0^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)$ est continue, il existe une constante c' positive qui ne dépend que de Ω , telle que

$$- \int_{\Omega} \ell \Delta \varphi \, dx \leq c' \|\alpha\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d}^2 \|\varphi\|_{W_0^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)}.$$

La formulation (1.12) implique

$$\forall \varphi \in W_0^{1,\frac{3}{2}}(\Omega), \quad - \int_{\Omega} \ell \Delta \varphi \, dx \leq c \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d}^2 \|\varphi\|_{W_0^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)}.$$

Comme $(W_0^{1,3}(\Omega))' = W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)$, alors

$$\|\ell\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq c \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d}^2.$$

Finalement, puisque $|k| \leq \nu^{-1}|\ell|$ et $|\nabla k| \leq \nu^{-1}|\nabla \ell|$, alors

$$\|k\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq \frac{c}{\nu} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d}^2,$$

d'où le Lemme 1. □

Remarque 1. Sous les hypothèses du Théorème 1, la suite $(k^n)_n$ est aussi uniformément bornée dans $W^{1,3}(\Omega)$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|k^n\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq c \|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3}(\Omega)}^2 \leq cM^2,$$

où c est une constante strictement positive ne dépendant que de Ω , de α et de γ .

La prochaine étape consiste à estimer $\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0$ en fonction de $\|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0$.

Deuxième étape : Estimation de $\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0$.

En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1}$ dans (1.7), on obtient

$$\int_{\Omega} \alpha(k^n) |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + \kappa \int_{\Gamma} |\mathbf{u}^{n+1}|^3 d\tau = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u}^{n+1} d\mathbf{x}.$$

La quantité $\kappa \int_{\Gamma} |\mathbf{u}^{n+1}|^3 d\tau$ étant positive, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs et l'hypothèse (1.2), on trouve

$$\|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_0 \leq \frac{C_p}{\nu} \|\mathbf{f}\|_0. \quad (1.13)$$

Choisissons maintenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n$, et injectons-le dans (1.7) aux étapes n et $n + 1$. La différence des deux équations ainsi obtenues est

$$\begin{aligned} & (\alpha(k^n) \nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n), \nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)) \\ & + ((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) \nabla \mathbf{u}^n, \nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)) \\ & + \kappa (|\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} - |\mathbf{u}^n| \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Lemme 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\kappa \left(|\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} - |\mathbf{u}^n| \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \right)_{\Gamma} \geq 0.$$

Démonstration. Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs quelconques de \mathbb{R}^d , où d peut être n'importe quel entier naturel non nul dans cette démonstration.

On pose $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d)$ et $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_d)$, on choisit le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^d , et on note par $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ la norme euclidienne. On a

$$\begin{aligned} (|\mathbf{a}| \mathbf{a} - |\mathbf{b}| \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) &= \left(\left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{a}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{a} - \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{b}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b} \right) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}), \\ &= \sum_{i=1}^{i=d} \left[\left(\sum_{j=1}^{j=d} |\mathbf{a}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\mathbf{a}_i|^2 + \left(\sum_{j=1}^{j=d} |\mathbf{b}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\mathbf{b}_i|^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\left(\sum_{j=1}^{j=d} |\mathbf{a}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{j=d} |\mathbf{b}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \mathbf{a}_j \mathbf{b}_j \right], \\ &= \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{a}_i|^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{b}_i|^2 \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad - \left(\left(\sum_{j=1}^{j=d} |\mathbf{a}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{j=d} |\mathbf{b}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \sum_{i=1}^{i=d} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \sum_{i=1}^{i=d} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \leq \|\mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^d} \cdot \|\mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^d} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{a}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{b}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

alors on peut écrire

$$\begin{aligned} (|\mathbf{a}|\mathbf{a} - |\mathbf{b}|\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) &\geq \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{a}_i|^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{b}_i|^2 \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad - \left(\left(\sum_{j=1}^{j=d} |\mathbf{a}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{j=d} |\mathbf{b}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{a}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{b}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que le terme de droite est positif. Pour cela posons

$$x = \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{a}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \lambda = \left(\sum_{i=1}^{i=d} |\mathbf{b}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et considérons maintenant la fonction f_λ , définie sur \mathbb{R}^+ par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ fixé, } \quad f_\lambda(x) = x^3 + \lambda^3 - \lambda x(x + \lambda).$$

La fonction f_λ est croissante sur $[\lambda, +\infty[$ et décroissante sur $[0, \lambda]$, elle atteint son minimum en λ . Donc pour tout $x \geq 0$

$$f_\lambda(x) \geq f_\lambda(\lambda) = 0.$$

On conclut alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\kappa \left(|\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} - |\mathbf{u}^n| \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \right)_\Gamma \geq 0.$$

Ceci termine la preuve du Lemme 2. □

La formule (1.14) et le Lemme 2 impliquent que

$$\left| \left(\alpha(k^n) \nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n), \nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \right) \right| \leq \left| \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) \nabla \mathbf{u}^n, \nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \right) \right|.$$

D'après l'hypothèse (1.2), et comme $k^n \in H^1(\Omega)$, alors $\alpha(k^n) \in H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0^2 &\leq \left| \left(\alpha(k^n) \nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n), \nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \right) \right|, \\ &\leq \left(|\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})| |\nabla \mathbf{u}^n|, |\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)| \right), \\ &\leq \|\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^3(\Omega)^{d^2}} \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0. \end{aligned}$$

Or $\|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3}(\Omega)^d} \leq M$, et en appliquant le Théorème des accroissements finis à la fonction α , on a

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0^2 &\leq M \|\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0, \\ &\leq M \|\alpha'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0. \end{aligned}$$

En utilisant l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et la relation (1.9), on obtient

$$\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \leq \frac{c_0 M \|\alpha'\|_\infty}{\nu} \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme $k^n - k^{n-1} \in H_0^1(\Omega)$, d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante, que l'on note encore c_p telle que

$$\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \leq \frac{c_0 c_p M \|\alpha'\|_\infty}{\nu} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0. \quad (1.15)$$

Troisième étape : Estimation de $\|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0$.

Pour montrer que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ est convergente, il suffit de prouver que la suite $(k^n)_n$ est contractante. Nous allons donc chercher des conditions suffisantes pour que la suite $(k^n)_n$ soit contractante. Pour cela prenons $\varphi = k^{n+1} - k^n$ comme fonction test et injectons la dans l'équation d'énergie cinétique turbulente (1.8), aux étapes n et $n + 1$, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} \text{à l'étape } n-1, \quad &\left(\gamma(k^{n-1}) \nabla k^n, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) = \left(\alpha(k^{n-1}) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, k^{n+1} - k^n \right), \\ \text{et à l'étape } n, \quad &\left(\gamma(k^n) \nabla k^{n+1}, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) = \left(\alpha(k^n) |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2, k^{n+1} - k^n \right). \end{aligned}$$

La différence des deux équations, donne

$$\begin{aligned} &\left(\gamma(k^n) \nabla k^{n+1} - \gamma(k^{n-1}) \nabla k^n, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \\ &= \left(\alpha(k^n) |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - \alpha(k^{n-1}) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, k^{n+1} - k^n \right). \end{aligned}$$

Faisant apparaître le terme $((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n$ dans le membre de gauche et le terme $(\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2$ dans celui de droite, on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\gamma(k^n) \nabla(k^{n+1} - k^n), \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) + \left((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \\ &= \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, k^{n+1} - k^n \right) + \left(\alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2), k^{n+1} - k^n \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

D'après (1.2), on peut écrire

$$\nu \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0^2 \leq \left(\gamma(k^n) \nabla(k^{n+1} - k^n), \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \leq I_1 + I_2 + I_3, \quad (1.17)$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \left(\alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2), k^{n+1} - k^n \right) \right|, \\ I_2 &= \left| \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, k^{n+1} - k^n \right) \right|, \\ I_3 &= \left| \left((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \right|. \end{aligned}$$

L'idée est de faire apparaître le produit $\|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0$ dans chaque estimation de ces trois intégrales, comme le montre le Lemme suivant

Lemme 3. *Sous les hypothèses du Théorème 1, il existe trois constantes positives c_1 , c_2 et c_3 , qui ne dépendent que du domaine Ω , de α , de γ et de M telles que, pour $j = 1, 2, 3$, on ait*

$$I_j \leq \frac{c_j}{\nu} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0.$$

Preuve du Lemme. Majoration de I_1 .

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \left(\alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2), k^{n+1} - k^n \right) \right|, \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \int_\Omega |\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)| (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}| + |\nabla \mathbf{u}^n|) |k^{n+1} - k^n| d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$I_1 \leq \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{W^{1,3}(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3}(\Omega)^d} \right) \|k^{n+1} - k^n\|_{L^6(\Omega)}.$$

Les relations (1.9) et (1.10), impliquent

$$\begin{aligned} \|k^{n+1} - k^n\|_{L^6(\Omega)} &\leq c_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{H^1(\Omega)}, \\ &\leq c_0 c_p \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0, \end{aligned}$$

et d'après (1.15) on a

$$I_1 \leq \frac{2c_0^2 c_p^2 M^2 \|\alpha'\|_\infty \|\alpha\|_\infty}{\nu} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0.$$

Soit $c_1 = 2c_0^2 c_p^2 M^2 \|\alpha'\|_\infty \|\alpha\|_\infty$, on a

$$I_1 \leq \frac{c_1}{\nu} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0. \quad (1.18)$$

Majoration de I_2 .

Afin de majorer I_2 , on applique le Théorème des accroissements finis à la fonction α , l'inégalité de Hölder, et l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$. On obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, k^{n+1} - k^n \right) \right|, \\ &\leq \left(|\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})| |\nabla \mathbf{u}^n|^2, |k^{n+1} - k^n| \right), \\ &\leq \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^3(\Omega)^{d^2}}^2 \|\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})\|_{L^6(\Omega)} \|k^{n+1} - k^n\|_{L^6(\Omega)}, \quad (\text{Inégalité de Hölder}). \end{aligned}$$

Or

$$\|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^3(\Omega)^{d^2}}^2 \leq M^2, \quad (\text{par hypothèse}).$$

En utilisant les relations (1.9) et (1.10), on a

$$\|k^{n+1} - k^n\|_{L^6(\Omega)} \leq c_0 c_p \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0.$$

Le Théorème des accroissements finis appliqué une autre fois à la fonction $\alpha(\cdot)$, et les relations (1.9) et (1.10), entraînent

$$\begin{aligned} \|\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})\|_{L^6(\Omega)} &\leq \|\alpha'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{L^6(\Omega)}, \\ &\leq \|\alpha'\|_\infty c_0 c_p \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0. \end{aligned}$$

En conclusion

$$I_2 \leq M^2 \|\alpha'\|_\infty c_0^2 c_p^2 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0.$$

On pose $c_2 = \|\alpha'\|_\infty M^2 c_0^2 c_p^2 \nu$, donc

$$I_2 \leq \frac{c_2}{\nu} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0. \quad (1.19)$$

Majoration de I_3 .

Pour terminer la démonstration du Lemme 3, il ne nous reste qu'à majorer I_3 . Pour cela nous allons utiliser l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$, la Remarque 1, le Théorème des accroissements finis appliqué à la fonction γ , et les relations (1.9) et (1.10). Ce qui implique

$$\begin{aligned} I_3 &= \left| \left((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \right|, \\ &\leq \|\gamma'\|_\infty \left(|k^n - k^{n-1}| |\nabla k^n|, |\nabla(k^{n+1} - k^n)| \right), \\ &\leq \|\gamma'\|_\infty c_0 c_p \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|k^n\|_{W^{1,3}(\Omega)} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0. \end{aligned}$$

D'après la Remarque 1, on a

$$\|k^n\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq cM^2.$$

Donc

$$I_3 \leq \|\gamma'\|_\infty c_0 c_p c M^2 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0.$$

Soit $c_3 = \|\gamma'\|_\infty c_0 c_p c M^2 \nu$, la majoration de I_3 s'écrit

$$I_3 \leq \frac{c_3}{\nu} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0. \quad (1.20)$$

Ceci termine la preuve du lemme 3. \square

D'après la relation (1.17) et les estimations (1.18)-(1.19)-(1.20), on conclut qu'il existe une constante c , qui ne dépend que du domaine Ω , de α , de γ et de M telle que

$$\|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \leq \frac{c}{\nu^2} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0. \quad (1.21)$$

Quatrième étape : convergence des suites $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(k^n)_n$.

D'après les hypothèses du Théorème 1, et la relation (1.21), la suite $(k^n)_n$ est contractante dans l'espace $H^1(\Omega)$, donc elle y converge fortement vers une limite, notée k . Nous avons montré que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ vérifie la relation suivante, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \leq K \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0.$$

Grâce à cette majoration, nous allons montrer que $(\mathbf{u}^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Soient n et m deux entiers naturels, avec $m \geq n$, donc

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^n)\|_0 &\leq \sum_{j=n+1}^m \|\nabla(\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1})\|_0, \\ &\leq K \sum_{j=n}^{m-1} \|\nabla(k^j - k^{j-1})\|_0, \\ &\leq K \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0. \end{aligned}$$

Comme $0 < K < 1$, alors,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (m \geq n), \quad \|\nabla(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^n)\|_0 \leq \frac{K}{1 - K} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0. \quad (1.22)$$

De plus, puisque la suite $(k^n)_n$ converge dans $H^1(\Omega)$ fort, alors la quantité $\|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$. On en déduit alors que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ est de Cauchy, elle converge donc fortement dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Notons \mathbf{u} sa limite. Ceci achève la démonstration du Théorème 1. \square

Pour conclure que le schéma (1.7)- (1.8) converge, il faut montrer que la suite $(p^n)_n$ est convergente. Pour cela nous utilisons une variante de la condition inf-sup standard, de type BABUŠKA et BREZZI, voir [39] Lemme 4.1, chapitre 1. Nous utilisons le résultat de la condition inf-sup suivant, que nous montrerons dans l'annexe B.

Théorème 2 (inf-sup). *Soit Ω un ouvert connexe, borné et à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^d , alors il existe une constante $\beta^1(\Omega) > 0$, telle que*

$$\forall q \in L^2(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \geq \beta^1(\Omega) \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à cette condition inf-sup, nous allons prouver que la suite $(p^n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 3 (pression). *Soit $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$. On suppose qu'il existe une constante M , strictement positive telle que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ vérifie*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3}(\Omega)^d} \leq M,$$

alors il existe une constante c ne dépendant que du domaine Ω , de α , de γ et de M , telle que si $\nu > c$, la suite $(p^n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. De plus on a

$$\|p^{n+1} - p^n\|_0 \leq K \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 + \| |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} - |\mathbf{u}^n| \mathbf{u}^n \|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d},$$

$$\text{où} \quad K = \frac{c}{\nu} < 1.$$

Démonstration. **La suite $(p^n)_n$ est de Cauchy**

D'après la formulation (1.7), on a

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \quad (\alpha(k^n) \nabla \mathbf{u}^{n+1}, \nabla \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{n+1}) + \kappa(|\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v}).$$

Soient m et n deux entiers naturels tels que $n \leq m$. Écrivons l'équation (1.7), aux étapes m et n . La différence des deux équations obtenues donne, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$).

$$\begin{aligned} \frac{b(\mathbf{v}, p^{m+1} - p^{n+1})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} &= - \left(\alpha(k^m) \nabla \mathbf{u}^{m+1} - \alpha(k^n) \nabla \mathbf{u}^{n+1}, \frac{\nabla \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \right) \\ &\quad - \kappa \left(|\mathbf{u}^{m+1}| \mathbf{u}^{m+1} - |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \right)_\Gamma \\ &= - \left(\alpha(k^m) \nabla (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^{n+1}), \frac{\nabla \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \right) - \left((\alpha(k^m) - \alpha(k^n)) \nabla \mathbf{u}^{n+1}, \frac{\nabla \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \right) \\ &\quad - \kappa \left(|\mathbf{u}^{m+1}| \mathbf{u}^{m+1} - |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \right)_\Gamma, \\ &\leq \left(\|\alpha\|_\infty \|\nabla (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^{n+1})\|_0 + \|\alpha'\|_\infty M \|k^m - k^n\|_{L^6(\Omega)} \right) \frac{\|\nabla \mathbf{v}\|_0}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \\ &\quad + \int_\Gamma \left| |\mathbf{u}^{m+1}| \mathbf{u}^{m+1} - |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} \right| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} d\tau. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^d$, sa trace sur Γ est dans $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$, qui s'injecte de façon compacte dans $L^3(\Gamma)^d$.

En utilisant l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$, la relation (1.22) et le Théorème 1, on peut écrire pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ et pour tout entier naturel $m \geq n$,

$$\begin{aligned} \frac{b(\mathbf{v}, p^{m+1} - p^{n+1})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} &\leq \frac{\|\nabla \mathbf{v}\|_0}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \left(\|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^{n+1})\|_0 + \|\alpha'\|_\infty M \|k^m - k^n\|_{L^6(\Omega)} \right) \\ &\quad + \frac{\|\mathbf{v}\|_{L^3(\Gamma)^d}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \left\| |\mathbf{u}^{m+1}| \mathbf{u}^{m+1} - |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}, \\ &\leq \left(\|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^{n+1})\|_0 + \|\alpha'\|_\infty M \|k^m - k^n\|_{L^6(\Omega)} \right) \\ &\quad + c \left\| |\mathbf{u}^{m+1}| \mathbf{u}^{m+1} - |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} \frac{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}}, \\ &\leq c' \frac{K}{1-K} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 + c \left\| |\mathbf{u}^{m+1}| \mathbf{u}^{m+1} - |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 5, et en passant au *Sup* sur tous les champs de vecteurs $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$, dans l'écriture précédente, il existe une constante β , strictement positive et ne dépendant que de la géométrie du domaine Ω , telle que

$$\begin{aligned} \beta \|p^{m+1} - p^{n+1}\|_0 &\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}} \frac{b(\mathbf{v}, p^{m+1} - p^{n+1})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \\ &\leq c'' \left(\frac{K}{1-K} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 + \left\| |\mathbf{u}^{m+1}| \mathbf{u}^{m+1} - |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} \right), \end{aligned} \tag{1.23}$$

où c'' est une constante qui dépend que de Ω , α et M .

Grâce à l'injection compacte de $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $L^3(\Gamma)$, et à la convergence de la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ vers \mathbf{u} dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, la quantité

$$\left\| |\mathbf{u}^{m+1}| \mathbf{u}^{m+1} - |\mathbf{u}^{n+1}| \mathbf{u}^{n+1} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} \text{ tend vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Il en est de même pour $\|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0$ qui tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$, car la suite $(k^n)_n$ est fortement convergente dans $H^1(\Omega)$. On conclut alors que la suite $(p^n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc elle converge fortement dans $L^2(\Omega)$, vers une fonction notée p . \square

1.2.2 Passage à la limite.

Nous allons vérifier que la limite (\mathbf{u}, p, k) , de la suite $(\mathbf{u}^n, p^n, k^n)_n$ est solution du problème (1.4)-(1.5).

Théorème 4 (Passage à la limite). *Sous les conditions du Théorème 1, la limite (\mathbf{u}, p, k) , de la suite $(\mathbf{u}^n, p^n, k^n)_n$ est une solution du problème (1.4) – (1.5).*

Démonstration. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| a(k^n; \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) - a(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right| \leq \left| a(k^n; \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) - a(k, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) \right| + \left| a(k; \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) - a(k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|.$$

Vérifions que les deux termes de droite tendent vers 0, quand $n \rightarrow +\infty$. Pour cela, appliquons le Théorème des accroissements finis à la fonction α , et l'inégalité de Hölder. On obtient

$$\left| a(k^n; \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) - a(k, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) \right| \leq \|\alpha'\|_\infty \|k^n - k\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla \mathbf{v}\|_0.$$

D'après les hypothèses du Théorème 1, la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ est bornée dans $W^{1,3}(\Omega)^d$ par M , et comme l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ est continue, alors

$$\left| a(k^n; \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) - a(k, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) \right| \leq c_0 M \|\alpha'\|_\infty \|k^n - k\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}\|_0,$$

De plus, la suite $(k^n)_n$ tend vers k , fortement dans $H^1(\Omega)$, donc

$$\left| a(k^n; \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) - a(k, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Il reste à prouver que le terme $\left(\alpha(k) |\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u})|, |\nabla \mathbf{v}| \right)$ tend vers 0. Pour ce faire, il suffit de majorer $\alpha(k)$ par $\|\alpha\|_\infty$, ensuite utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \left(\alpha(k) |\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u})|, |\nabla \mathbf{v}| \right) &\leq \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u})\|_0 \|\nabla \mathbf{v}\|_0, \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{u}^n \rightarrow \mathbf{u}$, quand $n \rightarrow +\infty$, alors

$$\left(\alpha(k) |\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u})|, |\nabla \mathbf{v}| \right) \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

On conclut alors que

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \quad a(k^n; \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) \rightarrow a(k; \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

De même, la suite $(p^n)_n$ tend vers p , fortement dans $L^2(\Omega)$, donc

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \quad b(\mathbf{v}, p^{n+1}) \text{ tend vers } b(\mathbf{v}, p).$$

Comme la trace de \mathbf{u}^n sur Γ est dans $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$, qui s'injecte dans $L^3(\Gamma)^d$, de façon compacte, alors la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ tend vers \mathbf{u} fortement dans $L^3(\Gamma)^d$, et donc la suite $(|\mathbf{u}^n|\mathbf{u}^{n+1})_n$ tend vers $|\mathbf{u}|\mathbf{u}$ fortement dans $L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d$, ce qui implique

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X} \quad \int_{\Gamma} |\mathbf{u}^n|\mathbf{u}^{n+1} \mathbf{v} d\tau \quad \text{tend vers} \quad \int_{\Gamma} |\mathbf{u}|\mathbf{u} \mathbf{v} d\tau,$$

car la trace de \mathbf{v} est dans $L^3(\Gamma)^d$.

Soit maintenant $q \in L^2(\Omega)$, on a $(\nabla \cdot \mathbf{u}^n)_n$ tend vers $\nabla \cdot \mathbf{u}$, fortement dans $L^2(\Omega)^d$, donc

$$b(\mathbf{u}^{n+1}, q) = 0 \quad \text{tend vers} \quad b(\mathbf{u}, q) = 0; \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

On déduit alors, que la limite (\mathbf{u}, p, k) de la suite $(\mathbf{u}^n, p^n, k^n)_n$, satisfait la première partie de la formulation variationnelle (1.4), celle qui correspond au problème de Stokes. Il reste maintenant à vérifier la seconde équation, celle qui correspond à l'énergie cinétique turbulente. On écrit

$$\begin{aligned} & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \\ & \left(\gamma(k^n) \nabla k^{n+1} - \gamma(k) \nabla k, \nabla \varphi \right) = \left(\gamma(k^n) \nabla (k^{n+1} - k), \nabla \varphi \right) + \left((\gamma(k^n) - \gamma(k)) \nabla k, \nabla \varphi \right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \left| (\gamma(k^n) \nabla (k^{n+1} - k), \nabla \varphi) \right| & \leq \|\nabla (k^{n+1} - k)\|_0 \|\gamma(k^n) \nabla \varphi\|_0 \\ & \leq \|\gamma\|_{\infty} \|\nabla \varphi\|_0 \|\nabla (k^{n+1} - k)\|_0. \end{aligned}$$

Or, la suite $(k^n)_n$ converge fortement vers k dans $H^1(\Omega)$, donc la quantité de droite dans l'inégalité au-dessus tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par conséquence

$$\left(\gamma(k^n) \nabla (k^{n+1} - k), \nabla \varphi \right) \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ensuite

$$\left| \left((\gamma(k^n) - \gamma(k)) \nabla k, \nabla \varphi \right) \right| \leq \|\nabla k\|_0 \|\nabla \varphi\|_{\infty} \|\gamma'\|_{\infty} \|k^n - k\|_0,$$

cette quantité tend vers 0, car $k^n \rightarrow k$, dans $L^2(\Omega)$ fort.

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$,

$$\forall \varphi \in W_0^{1,r}(\Omega), \quad \left(\gamma(k^n) \nabla k^{n+1} - \gamma(k) \nabla k, \nabla \varphi \right) \rightarrow 0.$$

De même,

$$\left(\alpha(k^n) |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - \alpha(k) |\nabla \mathbf{u}|^2, \varphi \right) = \left(\alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}|^2), \varphi \right) + \left((\alpha(k^n) - \alpha(k)) |\nabla \mathbf{u}|^2, \varphi \right).$$

Le terme de droite tend vers 0, en effet

$$((\alpha(k^n) - \alpha(k)) |\nabla \mathbf{u}|^2, \varphi) \leq \|\alpha'\|_\infty \|\mathbf{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)^d}^2 \|k^n - k\|_{L^3} \|\varphi\|_\infty.$$

On utilise alors l'injection continue de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)$ et la convergence de $(k^n)_n$ vers k dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ fort. Ceci implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((\alpha(k^n) - \alpha(k)) |\nabla \mathbf{u}|^2, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Le terme de gauche est inférieur à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}| + |\nabla \mathbf{u}|) |\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u})| |\varphi| dx \\ \leq \|\alpha\|_\infty \left(\|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^3(\Omega)^d} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d} \right) \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u})\|_0 \|\varphi\|_{L^6}. \end{aligned}$$

Comme \mathbf{u}^n est bornée dans $W^{1,3}(\Omega)^d$, ce terme tend vers 0.

(\mathbf{u}, p, k) satisfait l'équation (1.5), associée à l'énergie cinétique turbulente. On conclut enfin, que (\mathbf{u}, p, k) est une solution du problème variationnel (1.4)-(1.5). Il reste à vérifier que cette solution est unique sous des conditions adéquates. \square

Théorème 5 (Unicité). *Soit $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ et soit $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p, k)$ une solution du problème (1.4) – (1.5).*

Si $\mathbf{U} \in W^{1,3}(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega)$ et si il existe une constante strictement positive c , qui ne dépend que de Ω , α , γ , et κ , telle que

$$K = \frac{c}{\nu} < 1,$$

alors $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p, k)$ est l'unique solution du problème (1.4) – (1.5) dans $W^{1,3}(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une autre solution $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{k})$ du problème (1.4)-(1.5) et qui appartienne à l'espace $W^{1,3}(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega)$.

Dans l'équation (1.4), prenons comme fonction test le champ de vecteurs $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$, la différence des deux équations obtenues s'écrit

$$\left(\alpha(\bar{k}) \nabla(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}), \nabla(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \right) + \left((\alpha(\bar{k}) - \alpha(k)) \nabla \mathbf{u}, \nabla(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \right) + \kappa \left(|\bar{\mathbf{u}}| \bar{\mathbf{u}} - |\mathbf{u}| \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \right)_\Gamma = 0,$$

d'après le Lemme 2, la quantité $\kappa \left(|\bar{\mathbf{u}}| \bar{\mathbf{u}} - |\mathbf{u}| \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \right)_\Gamma$ est positive, donc

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\|_0^2 &\leq \left| \left((\alpha(\bar{k}) - \alpha(k)) \nabla \mathbf{u}, \nabla(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \right) \right|, \\ &\leq \|\alpha'\|_\infty c_0 c_p \|\nabla(\bar{k} - k)\|_0 \|\mathbf{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)^d} \|\nabla(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\|_0, \end{aligned}$$

comme $\|\mathbf{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)^d} \leq M$, alors

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0 \leq \frac{\|\alpha'\|_\infty c_0 c_p M}{\nu} \|\nabla(k - \bar{k})\|_0. \quad (1.24)$$

Considérons maintenant l'équation de l'énergie cinétique turbulente pour \mathbf{U} et $\bar{\mathbf{U}}$, avec $\varphi = k - \bar{k}$ comme fonction test. Après avoir effectué la différence des équations obtenues, on peut écrire

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla(k - \bar{k})\|_0 \leq & \left| \left(\alpha(k) (|\nabla \mathbf{u}|^2 - |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2), k - \bar{k} \right) \right| \\ & + \left| \left((\alpha(k) - \alpha(\bar{k})) |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2, k - \bar{k} \right) \right| \\ & + \left| \left((\gamma(k) - \gamma(\bar{k})) \nabla \bar{k}, \nabla(k - \bar{k}) \right) \right|. \end{aligned}$$

Comme dans la preuve du Lemme 3, on a des majorations de ces trois termes qui ressemblent aux relations (1.18), (1.19) et (1.20), donc

$$\begin{aligned} \|\nabla(k - \bar{k})\|_0 & \leq \left(\frac{2c_0^2 c_p^2 \|\alpha'\|_\infty \|\alpha\|_\infty}{\nu^2} + \frac{\|\alpha'\|_\infty M^2 c_0^2 c_p^2}{\nu} + \frac{\|\gamma'\|_\infty M^2 c_0 c_p c}{\nu} \right) \|\nabla(k - \bar{k})\|_0, \\ & \leq \frac{c}{\nu} \|\nabla(k - \bar{k})\|_0, \end{aligned}$$

où $c = \frac{2c_0^2 c_p^2 \|\alpha'\|_\infty \|\alpha\|_\infty}{\nu} + \|\alpha'\|_\infty M^2 c_0^2 c_p^2 + \|\gamma'\|_\infty M^2 c_0 c_p c$,

qu'on peut supposer inférieure à la viscosité turbulente ν . Ceci implique que $k = \bar{k}$, et d'après la relation (1.24), on conclut aussi que $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$.

Il reste à vérifier que $p = \bar{p}$, pour cela écrivons pour p et \bar{p} , les équations (1.4) associées, ensuite remplaçons $\bar{\mathbf{u}}$ par \mathbf{u} et \bar{k} par k , ce qui se traduit par

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \quad b(\mathbf{v}, p - \bar{p}) = 0,$$

d'après le Théorème 5, on a

$$0 = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}} \frac{b(\mathbf{v}, p - \bar{p})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \geq \beta \|p - \bar{p}\|_0,$$

d'où $p = \bar{p}$. □

Nous avons montré dans cette partie que le schéma itératif (1.7)-(1.8), que nous avons proposé converge bien vers la seule solution du problème de départ (1.3), sous l'hypothèse que la viscosité est suffisamment grande.

Dans la partie qui suit, nous proposons un modèle de fluide turbulent sur un domaine borné, la viscosité et le coefficient de diffusion vérifient l'hypothèse (1.2), à savoir

$$\begin{aligned} \alpha(\cdot) & \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad \gamma(\cdot) \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ et} \\ \forall k \in \mathbb{R}, \quad \alpha(k) & \geq \nu \text{ et } \gamma(k) \geq \nu. \end{aligned}$$

De plus, nous imposons une condition non nulle sur l'interface Γ , afin de générer l'énergie cinétique turbulente k .

1.3 Cas non homogène : $k = \lambda|\mathbf{u}|^2$ à la surface de l'océan

Dans cette partie, nous nous intéresserons au problème de départ, à savoir (1.1),

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\alpha(k)\nabla\mathbf{u}) + \text{grad } p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot (\gamma(k)\nabla k) = \alpha(k)|\nabla\mathbf{u}|^2 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0, \\ k = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \alpha(k)\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} - p\mathbf{n} + \kappa\mathbf{u}|\mathbf{u}| = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma, \\ k = \lambda|\mathbf{u}|^2 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Rappelons que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d , convexe ou de classe $C^{1,1}$ et $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_0$, où Γ est la frontière de glissement avec friction et Γ_0 celle de non-glissement. Les deux frontières sont de mesures strictement positives. $\lambda > 0$ est un coefficient petit introduit pour modéliser la génération de l'énergie cinétique turbulente à la frontière Γ . $\kappa > 0$ est le coefficient de friction et la fonction \mathbf{f} est donnée dans $L^2(\Omega)^d$.

Comme dans la section 1.2, nous associons au problème (1.1) un schéma itératif non-linéaire. La convergence est prouvée sous des conditions semblables à celles supposées dans le cas où l'énergie cinétique turbulente est nulle sur toute la frontière $\partial\Omega$. Le système (1.1) admet la formulation variationnelle suivante

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{X} \times L^2(\Omega)$, tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \quad (\alpha(k)\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + \kappa(|\mathbf{u}|\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Gamma} &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \\ \text{et } \forall q \in L^2(\Omega), \quad b(\mathbf{u}, q) &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Trouver $k \in L^2(\Omega)$, telle que

$$\forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad -\int_{\Omega} G(k)\Delta\varphi d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Gamma} G(|\mathbf{u}|^2)\partial_n\varphi d\tau + \int_{\Omega} \alpha(k)|\nabla\mathbf{u}|^2\varphi d\mathbf{x}, \quad (1.26)$$

où la fonction $G(\cdot)$ est définie dans la section 1.2, par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad G(s) = \int_0^s \gamma(\tau) d\tau.$$

La preuve de l'existence d'une solution du problème (1.25)-(1.26), est due à C. BERNARDI et AL, dans [10]. De plus l'énergie cinétique turbulente k est positive et appartient à l'espace $H^s(\Omega)$, pour tout $s < \frac{1}{2}$.

1.3.1 Schéma itératif et principaux résultats

Considérons deux réels r et r' , strictement positifs, tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ et $r > d$. Le schéma itératif considéré s'écrit

$$\begin{aligned} \text{Trouver } & (\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}, k^{n+1}) \in \mathbf{X} \times L^2(\Omega) \times W^{1,r'}(\Omega), \quad \text{tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, & \quad (\alpha(k^n)\nabla\mathbf{u}^{n+1}, \nabla\mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{n+1}) + \kappa(|\mathbf{u}^{n+1}|\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\forall q \in L^2(\Omega), \quad b(\mathbf{u}^{n+1}, q) = 0,$$

et

$$\begin{cases} k^{n+1} = 0, \text{ sur } \Gamma_0 & \text{et} & k^{n+1} = \lambda|\mathbf{u}^{n+1}|^2, \text{ sur } \Gamma, \\ \forall \varphi \in W_0^{1,r}(\Omega), & (\gamma(k^n)\nabla k^{n+1}, \nabla\varphi) = (\alpha(k^n)|\nabla\mathbf{u}^{n+1}|^2, \varphi). \end{cases} \quad (1.28)$$

L'existence d'une solution du problème (1.27)-(1.28) est due à R. LEWANDOWSKI, dans [47].

Nous allons montrer que le schéma (1.27)-(1.28) converge, et plus précisément, nous prouverons que la suite $(k^n)_n$ est contractante, que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ satisfait

$$\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \leq K\|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0,$$

et enfin, que la suite $(p^n)_n$ est convergente.

Pour la convergence de ce schéma, nous supposons en plus que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ appartient à l'espace $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Théorème 6 (Convergence). *Soit $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$. On suppose qu'il existe une constante M , strictement positive telle que les suites $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(k^n)_n$ vérifient,*

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{u}^n & \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d \quad \text{et} \\ \|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d} & \leq M \quad \text{et} \quad \|k^n\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq M. \end{aligned}$$

Alors, il existe une constante c ne dépendant que du domaine Ω , α , γ , et de M telle que si $K = \frac{c}{\nu} < 1$, les suites $(k^n)_n$ et $(\mathbf{u}^n)_n$ convergent. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \leq K\|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0, \text{ et}$$

$$\|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \leq K\|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0.$$

Démonstration. La preuve s'effectue en plusieurs étapes. L'estimation de la quantité $\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0$ se fait de la même manière que dans la section 1.2. Rappelons que la constante c_0 est celle de la continuité de H^1 dans L^6 , et c_p est la constante de Poincaré-Friedrichs. Nous avons alors

$$\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \leq \frac{c_0 c_p M \|\alpha'\|_\infty}{\nu} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0, \quad (1.29)$$

et on a aussi

$$\|\nabla\mathbf{u}^n\|_0 \leq \frac{c_p}{\nu} \|\mathbf{f}\|_0. \quad (1.30)$$

Ceci nous conduit à estimer la quantité $\|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0$.

Première étape : Estimation de $\|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0$.

Pour cela, on choisira une fonction test φ qui s'annule sur $\partial\Omega$, mais comme la quantité $k^{n+1} - k^n$ n'est pas forcément nulle sur tout $\partial\Omega$, on introduit l'opérateur de relèvement R suivant : soit R l'opérateur de relèvement harmonique continu de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega)$, défini comme la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} -\Delta R\eta = 0 & \text{dans } \Omega, \\ R\eta = \eta & \text{sur } \Gamma, \\ R\eta = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Soit c_R la constante de continuité de l'opérateur $R(\cdot)$ de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vers $\mathbf{H}^1(\Omega)$, elle ne dépend que du domaine Ω ,

$$\forall \eta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \|R\eta\|_{H^1(\Omega_i)} \leq c_R \|\eta\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (1.32)$$

Remarque 2. Si on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k^n \in W^{1,3}(\Omega)$, alors la trace de $|\mathbf{u}^n|^2$ sur Γ appartient à $W^{\frac{2}{3},3}(\Gamma)$.

En effet, $\lambda|\mathbf{u}^{n+1}|^2 = k^n \in W^{1,3}(\Omega)$, sa trace sur Γ est dans $W^{\frac{2}{3},3}(\Gamma)$, qui s'injecte dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Et puisque $k^n = 0$ sur Γ_0 , alors les trace de k^n et de $|\mathbf{u}^n|^2$ sur Γ appartiennent à $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Prenons $\varphi = (k^{n+1} - k^n) - R(k^{n+1} - k^n)$ comme fonction test. Injectons la dans l'équation d'énergie cinétique (1.28) à l'étape n , puis à l'étape $n+1$, ce qui donne

$$\begin{aligned} & \left(\gamma(k^n) \nabla k^{n+1}, \nabla((k^{n+1} - k^n) - R(k^{n+1} - k^n)) \right) \\ & \quad = \left(\alpha(k^n) |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2, (k^{n+1} - k^n) - R(k^{n+1} - k^n) \right), \\ & \left(\gamma(k^{n-1}) \nabla k^n, \nabla((k^{n+1} - k^n) - R(k^{n+1} - k^n)) \right) \\ & \quad = \left(\alpha(k^{n-1}) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, (k^{n+1} - k^n) - R(k^{n+1} - k^n) \right). \end{aligned}$$

Faisons la différence des deux équations obtenues. En développant un peu, on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\gamma(k^n) \nabla k^{n+1} - \gamma(k^{n-1}) \nabla k^n, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \\ & \quad - \left(\gamma(k^n) \nabla k^{n+1} - \gamma(k^{n-1}) \nabla k^n, \nabla R(k^{n+1} - k^n) \right) \\ & \quad = \left(\alpha(k^n) |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - \alpha(k^{n-1}) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, k^{n+1} - k^n \right) \\ & \quad \quad - \left(\alpha(k^n) |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - \alpha(k^{n-1}) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, R(k^{n+1} - k^n) \right). \end{aligned}$$

Ensuite, faisons apparaître les termes $\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})$ et $\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})$, dans l'écriture ci-dessus. On trouve

$$\begin{aligned}
& \left(\gamma(k^n) \nabla(k^{n+1} - k^n), \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \\
&= - \left(\gamma(k^n) \nabla(k^{n+1} - k^n), \nabla R(k^{n+1} - k^n) \right) \\
&\quad - \left((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \\
&\quad - \left((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n, \nabla R(k^{n+1} - k^n) \right) \\
&\quad + \left(\alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2), k^{n+1} - k^n \right) \\
&\quad + \left(\alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2), R(k^{n+1} - k^n) \right) \\
&\quad + \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, k^{n+1} - k^n \right) \\
&\quad + \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, R(k^{n+1} - k^n) \right).
\end{aligned}$$

Comme $\gamma(k^n) > \nu$, alors

$$\nu \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0^2 \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7, \quad (1.33)$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left| \left(\gamma(k^n) \nabla(k^{n+1} - k^n), \nabla R(k^{n+1} - k^n) \right) \right|, \\
I_2 &= \left| \left((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \right|, \\
I_3 &= \left| \left((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n, \nabla R(k^{n+1} - k^n) \right) \right|, \\
I_4 &= \left| \left(\alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2), k^{n+1} - k^n \right) \right|, \\
I_5 &= \left| \left(\alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2), R(k^{n+1} - k^n) \right) \right|, \\
I_6 &= \left| \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, k^{n+1} - k^n \right) \right|, \\
I_7 &= \left| \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, R(k^{n+1} - k^n) \right) \right|.
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que chaque intégrale I_j est majorée par une quantité de la forme suivante

$$\forall j \in \{1, \dots, 7\}, \quad I_j \leq c_j \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0.$$

1.3.2 Majoration des quantités I_j , pour $1 \leq j \leq 7$.

Majoration de I_1 .

Pour l'estimation de I_1 , nous avons besoin du Théorème suivant, voir V.GIRAULT-P.-A.RAVIART [39], (Corollaire 1.1, chapitre 1), et aussi P.GRISVARD [41],

Théorème 7. *Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d et à frontière lipschitzienne. Soient $s_1 \geq s$ et $s_2 \geq s$, tels que si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite*

$$s_1 + s_2 - s \geq d\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right) \text{ et } s_j - s > d\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{p}\right), \quad j = 1, 2, \quad (1.34)$$

ou bien

$$s_1 + s_2 - s > d\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right) \text{ et } s_j - s \geq d\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{p}\right), \quad j = 1, 2, \quad (1.35)$$

alors la forme bilinéaire suivante est continue

$$\begin{aligned} \psi : W^{s_1, p_1}(\Omega)^d \times W^{s_2, p_2}(\Omega)^d &\longrightarrow W^{s, p}(\Omega)^d \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

On a

$$I_1 = \left| \left(\gamma(k^n) \nabla(k^{n+1} - k^n), \nabla R(k^{n+1} - k^n) \right) \right|,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|\gamma\|_\infty \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla R(k^{n+1} - k^n)\|_0 \\ &\leq \|\gamma\|_\infty \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|R(k^{n+1} - k^n)\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

La relation (1.32), implique qu'il existe une constante c , qui ne dépend que de Ω , telle que

$$I_1 \leq c \|\gamma\|_\infty \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

$$\begin{aligned} \text{or } \|k^{n+1} - k^n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &= \lambda \| |\mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}^n|^2 \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &= \lambda \| (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

donc

$$I_1 \leq c \|\gamma\|_\infty \lambda \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \| (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (1.37)$$

Comme $\mathbf{u}^n \in W^{1, 3+\varepsilon}(\Omega)^d$, sa trace sur Γ appartient à $W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon}, 3+\varepsilon}(\Gamma)$. En appliquant le

Théorème 7 en dimension $d = 2$, et en prenant

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}, \quad p = 2, \\ s_1 &= \frac{1}{2}, \quad p_1 = 2, \\ s_2 &= 1 - \frac{1}{3+\varepsilon}, \quad p_2 = 3 + \varepsilon, \quad \text{on a} \\ \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n &= \mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma) = W^{s_1,p_1}(\Gamma), \quad \text{et} \\ \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n &= \mathbf{v} \in W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon},3+\varepsilon}(\Gamma) = W^{s_2,p_2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Pour un $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $s_2 \geq s$.

La condition (1.35) du Théorème 7 est vérifiée car

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 - s &= s_2 = 1 - \frac{1}{3+\varepsilon} = \frac{2+\varepsilon}{3+\varepsilon}, \quad \text{et} \\ 2\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right) &= \frac{2}{p_2} = \frac{2}{3+\varepsilon}, \end{aligned}$$

donc

$$s_1 + s_2 - s > 2\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} s_1 - s &= 0 \geq 2\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}\right) = 0, \\ s_2 - s &= 1 - \frac{1}{3+\varepsilon} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3+\varepsilon} - \frac{1}{2}, \quad \text{et} \\ 2\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right) &= \frac{2}{3+\varepsilon} - 1, \end{aligned}$$

donc

$$s_2 - s \geq 2\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right).$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) \right\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ \leq \left\| \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \right\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d} \left\| \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n \right\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon},3+\varepsilon}(\Gamma)^d}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (1.37), on a

$$I_1 \leq c\lambda \|\gamma\|_{\infty} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \left\| \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \right\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d} \left\| \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n \right\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon},3+\varepsilon}(\Gamma)^d}. \quad (1.38)$$

Or, l'opérateur trace est continu de $H^1(\Omega)^d$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et de \mathbf{X} dans $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$, il existe donc une constante c_1 , qui ne dépend que du domaine Ω , telle que

$$\left\| \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \right\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_1 \left\| \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \right\|_{H^1(\Omega)^d},$$

et comme $\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = \mathbf{0}$ sur Γ_0 , on a, d'après l'inégalité de Poincaré-Friedrichs,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq c_1 \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq \tilde{c}_1 \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0, \end{aligned}$$

où $\tilde{c}_1 = c_1 c_p$.

De même, l'opérateur trace est continu de $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d$ dans $W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon},3+\varepsilon}(\Gamma)$, il existe donc une constante positive c_2 , qui ne dépend que du domaine Ω , telle que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon},3+\varepsilon}(\Gamma)} &\leq c_2 \|\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n\|_{W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d}, \\ &\leq c_2 \left(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d} \right), \\ &\leq 2M c_2. \end{aligned}$$

D'après la relation (1.38) et les deux inégalités qui proviennent de la continuité de l'opérateur trace, il existe une constante notée encore c , qui ne dépend que du domaine Ω , telle que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c\lambda \|\gamma\|_\infty \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon},3+\varepsilon}(\Gamma)}, \\ &\leq c\tilde{c}_1 c_2 \lambda M \|\gamma\|_\infty \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.29), on trouve

$$I_1 \leq C_1 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0, \quad (1.39)$$

où $C_1 = \frac{cc_0 c_p \tilde{c}_1 c_2 \lambda M^2 \|\gamma\|_\infty \|\alpha'\|_\infty}{\nu}$.

Majoration de I_2 .

On a

$$I_2 = \left| \left((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n, \nabla(k^{n+1} - k^n) \right) \right|,$$

on applique le Théorème des accroissements finis à la fonction $\gamma(\cdot)$ entre k^{n-1} et k^n , on obtient

$$I_2 \leq \|\gamma'\|_\infty \left(|k^n - k^{n-1}| |\nabla k^n|, |\nabla(k^{n+1} - k^n)| \right).$$

Or $|k^n - k^{n-1}| \in H^1(\Omega)$ qui s'injecte de manière continue dans $L^6(\Omega)$, et comme la suite $(k^n)_n$ est supposée appartenir et être bornée dans l'espace $W^{1,3}(\Omega)$, en utilisant l'inégalité de Hölder on trouve

$$I_2 \leq \|\gamma'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla k^n\|_{L^3(\Omega)} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0.$$

D'après la relation (1.9) et

$$\|\nabla k^n\|_{L^3(\Omega)} \leq \|k^n\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq M,$$

on a

$$I_2 \leq c_0 M \|\gamma'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0.$$

Mais $|k^n - k^{n-1}| = 0$ sur Γ_0 , donc en utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on écrit

$$I_2 \leq c_0 c_p M \|\gamma'\|_\infty \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0.$$

En posant $C_2 = c_0 c_p M \|\gamma'\|_\infty$, on a l'estimation suivante

$$I_2 \leq C_2 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0. \quad (1.40)$$

Majoration de I_3 .

On a

$$I_3 = \left| \left((\gamma(k^n) - \gamma(k^{n-1})) \nabla k^n, \nabla R(k^{n+1} - k^n) \right) \right|.$$

L'estimation de I_3 se fait de la même manière que I_2 . Rappelons que $R(k^{n+1} - k^n) \in H^1(\Omega)$, et est nul sur Γ_0 . En utilisant le Théorème des accroissements finis, l'inégalité de Hölder, l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$, et l'hypothèse $\|k^n\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq M$, on obtient

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \|\gamma'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla(k^n)\|_{L^3(\Omega)} \|\nabla R(k^{n+1} - k^n)\|_0, \\ &\leq c_0 M \|\gamma'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla R(k^{n+1} - k^n)\|_0, \\ &\leq c_0 c_p M \|\gamma'\|_\infty \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|R(k^{n+1} - k^n)\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

comme l'opérateur $R(\cdot)$ est continue de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega)$, et d'après la relation (1.32), on a

$$I_3 \leq c_0 c_p c_R M \|\gamma'\|_\infty \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

L'opérateur trace est continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, donc

$$I_3 \leq c_0 c_p c_R M \|\gamma'\|_\infty \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{H^1(\Omega)}.$$

Encore une fois, on applique l'inégalité de Poincaré-Friedrichs à $k^{n+1} - k^n$, on trouve

$$I_3 \leq c_0 c_R c_p^2 M \|\gamma'\|_\infty \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0.$$

On pose $C_3 = c_0 c_R c_p^2 M \|\gamma'\|_\infty$, alors

$$I_3 \leq C_3 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0. \quad (1.41)$$

Majoration de I_4 .

On a

$$I_4 = \left| \left(\alpha(k^n) (|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2), k^{n+1} - k^n \right) \right|.$$

En écrivant

$$|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2 = |\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)| |\nabla(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n)|,$$

et en utilisant l'hypothèse (1.2), on a

$$I_4 \leq \|\alpha\|_\infty \left(|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)| |\nabla(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n)|, |k^{n+1} - k^n| \right).$$

Comme $|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n)|$ est supposée dans $L^3(\Omega)^d$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n)\|_{L^3(\Omega)^d} \|k^{n+1} - k^n\|_{L^6(\Omega)}, \\ &\leq \|\alpha\|_\infty (\|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^3(\Omega)^d} + \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^3(\Omega)^d}) \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{L^6(\Omega)}, \\ &\leq \|\alpha\|_\infty (\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{W^{1,3}(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3}(\Omega)^d}) \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{L^6(\Omega)}, \\ &\leq 2M \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{L^6(\Omega)}, \\ &\leq 2Mc_0 \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{H^1(\Omega)}, \\ &\leq 2Mc_0c_p \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0. \end{aligned}$$

La relation (1.29), à savoir

$$\|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \leq \frac{c_0c_pM\|\alpha'\|_\infty}{\nu} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0,$$

implique que

$$I_4 \leq \frac{2c_0^2c_p^2M^2\|\alpha\|_\infty\|\alpha'\|_\infty}{\nu} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0.$$

On pose $C_4 = \frac{2c_0^2c_p^2M^2\|\alpha\|_\infty\|\alpha'\|_\infty}{\nu}$,

on obtient l'estimation

$$I_4 \leq C_4 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0. \quad (1.42)$$

Majoration de I_5 .

On a

$$I_5 = \left| \left(\alpha(k^n)(|\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}^n|^2), R(k^{n+1} - k^n) \right) \right|.$$

De la même façon que dans la majoration de I_4 , on a

$$I_5 \leq 2Mc_0c_p \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)\|_0 \|R(k^{n+1} - k^n)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Les inégalités (1.29) et (1.32), entraînent que

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \frac{2c_0^2c_p^2M^2\|\alpha\|_\infty\|\alpha'\|_\infty}{\nu} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|R(k^{n+1} - k^n)\|_{H^1(\Omega)}, \\ &\leq \frac{2c_0^2c_p^2c_RM^2\|\alpha\|_\infty\|\alpha'\|_\infty}{\nu} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

On utilise maintenant la continuité de l'opérateur trace de \mathbf{X} dans $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ et l'inégalité de Poincaré-Friedrichs. On obtient

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \frac{2c_0^2c_p^2c_RM^2\|\alpha\|_\infty\|\alpha'\|_\infty}{\nu} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|k^{n+1} - k^n\|_{H^1(\Omega)}, \\ &\leq \frac{2c_0^2c_p^3c_RM^2\|\alpha\|_\infty\|\alpha'\|_\infty}{\nu} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0. \end{aligned}$$

En posant $C_5 = \frac{2c_0^2c_p^3c_RM^2\|\alpha\|_\infty\|\alpha'\|_\infty}{\nu}$, on a l'estimation suivante

$$I_5 \leq C_5 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0. \quad (1.43)$$

Majoration de I_6 .

On a

$$I_6 = \left| \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, k^{n+1} - k^n \right) \right|.$$

On applique le Théorème des accroissements finis à la fonction $\alpha(\cdot)$ entre k^n et k^{n-1} , on trouve

$$I_6 \leq \|\alpha'\|_\infty \left(|k^n - k^{n-1}| |\nabla \mathbf{u}^n|^2, |k^{n+1} - k^n| \right).$$

Comme la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ est supposée appartenir à l'espace $W^{1,3}(\Omega)^d$ et y être bornée, alors $|\nabla \mathbf{u}^n|^2 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$.

On applique l'inégalité de Hölder et l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq \|\alpha'\|_\infty \|\ |\nabla \mathbf{u}^n|^2 \ \|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d} \|k^n - k^{n-1}\|_{L^6(\Omega)} \|k^{n+1} - k^n\|_{L^6(\Omega)}, \\
&\leq c_0^2 \|\alpha'\|_\infty \|\ |\nabla \mathbf{u}^n|^2 \|_{L^3(\Omega)}^2 \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|k^{n+1} - k^n\|_{H^1(\Omega)}, \\
&\leq c_0^2 \|\alpha'\|_\infty \|\mathbf{u}^n\|_{W^{1,3}(\Omega)^d}^2 \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|k^{n+1} - k^n\|_{H^1(\Omega)}, \\
&\leq c_0^2 M^2 \|\alpha'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|k^{n+1} - k^n\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on trouve

$$I_6 \leq c_0^2 c_p^2 M^2 \|\alpha'\|_\infty \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0.$$

On pose $C_6 = c_0^2 c_p^2 M^2 \|\alpha'\|_\infty$, et on a donc l'estimation suivante

$$I_6 \leq C_6 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0. \quad (1.44)$$

Majoration de I_7 .

On a

$$I_7 = \left| \left((\alpha(k^n) - \alpha(k^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}^n|^2, R(k^{n+1} - k^n) \right) \right|.$$

De la même manière, on a

$$I_7 \leq c_0 M^2 \|\alpha'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|R(k^{n+1} - k^n)\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après (1.32), l'inégalité de Poincaré-Friedrichs et la continuité de l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
I_7 &\leq c_0 c_R M^2 \|\alpha'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|k^{n+1} - k^n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \\
&\leq c_0 c_R M^2 \|\alpha'\|_\infty \|k^n - k^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|k^{n+1} - k^n\|_{H^1(\Omega)}, \\
&\leq c_0 c_R c_p^2 M^2 \|\alpha'\|_\infty \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0.
\end{aligned}$$

Soit $C_7 = c_0 c_R c_p^2 M^2 \|\alpha'\|_\infty$. Ainsi, la dernière inégalité devient,

$$I_7 \leq C_7 \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0. \quad (1.45)$$

Conclusion

Nous avons montré jusqu'à présent que chaque quantité I_j , pour $1 \leq j \leq 7$ est majorée par

$$I_j \leq C_j \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0,$$

où C_j est une constante strictement positive, ne dépendant que du domaine Ω et des données α , γ , M , ν et λ .

La relation (1.33), c'est à dire

$$\nu \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0^2 \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7,$$

implique qu'il existe une constante $c = \sum_{j=1}^{j=7} C_j$, strictement positive et ne dépend que du domaine Ω et des données α , γ , M , ν et λ , telle que

$$\|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0 \leq \frac{c}{\nu} \|\nabla(k^n - k^{n-1})\|_0.$$

Convergence

D'après l'hypothèse du Théorème 6, à savoir $K = \frac{c}{\nu} < 1$, la suite $(k^n)_n$ est donc contractante dans $H^1(\Omega)$, elle converge fortement dans $H^1(\Omega)$ vers une limite, notée k . Concernant les suites $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(p^n)_n$, leur convergence est prouvée de la même façon que dans la partie précédente.

Lemme 4. *Sous les hypothèses du Théorème 6, nous avons*

$$\lambda|\mathbf{u}|_{\Gamma}^2 = k|_{\Gamma}.$$

Démonstration. Vérifions que sur Γ , $\lambda|\mathbf{u}^n|_{\Gamma}^2$, la trace de la suite $(\lambda|\mathbf{u}^n|^2)_n$, converge vers $\lambda|\mathbf{u}|_{\Gamma}^2 = k|_{\Gamma}$.

$(k^n)_n$ converge fortement vers k dans $H^1(\Omega)$. La trace étant continue de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, donc $k|_{\Gamma}^n$ converge fortement vers $k|_{\Gamma}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Comme $k|_{\Gamma}^n = \lambda|\mathbf{u}^n|_{\Gamma}^2$, on a aussi la convergence de $\lambda|\mathbf{u}^n|_{\Gamma}^2$ vers $k|_{\Gamma}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ fort. Il reste à montrer que $k|_{\Gamma} = \lambda|\mathbf{u}|_{\Gamma}^2$. On a

$$\|\lambda|\mathbf{u}|^2 - k\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \|\lambda|\mathbf{u}^n|^2 - k\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\lambda|\mathbf{u}^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Montrons que le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Il est clair que le terme

$$\|\lambda|\mathbf{u}^n|^2 - k\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Pour l'autre quantité, on a

$$\|\lambda|\mathbf{u}^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \lambda\|(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}^n + \mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Utilisons le Théorème 7, en prenant

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}, \quad p = 2, \\ s_1 &= \frac{1}{2}, \quad p_1 = 2, \\ s_2 &= 1 - \frac{1}{3 + \varepsilon}, \quad p_2 = 3 + \varepsilon, \\ \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u} &= \mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = W^{\frac{1}{2}, 2}(\Gamma) = W^{s_1, p_1}(\Gamma), \quad \text{et} \\ \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u} &= \mathbf{v} \in W^{1 - \frac{1}{3 + \varepsilon}, 3 + \varepsilon}(\Gamma) = W^{s_2, p_2}(\Gamma), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|\lambda|\mathbf{u}^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq \lambda\|(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u}^n + \mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \\ &\leq \lambda\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\mathbf{u}^n + \mathbf{u}\|_{W^{1 - \frac{1}{3 + \varepsilon}, 3 + \varepsilon}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

L'opérateur trace est continue de $W^{1, 3 + \varepsilon}(\Omega)$ dans $W^{1 - \frac{1}{3 + \varepsilon}, 3 + \varepsilon}(\Gamma)$, donc il existe une constante c_3 , strictement positive, ne dépendant que du domaine Ω telle que

$$\begin{aligned} \|\lambda|\mathbf{u}^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq c_3 \lambda \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \cdot \|\mathbf{u}^n + \mathbf{u}\|_{W^{1, 3 + \varepsilon}(\Omega)}, \\ &\leq 2M c_3 \lambda \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

La convergence forte de $(\mathbf{u}^n)_n$ vers \mathbf{u} dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et la continuité de la trace de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, impliquent que la quantité

$$\|\lambda|\mathbf{u}^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ceci achève la preuve du Lemme 4. □

On peut conclure maintenant que la limite de la suite $(\mathbf{u}^n, p^n, k^n)_n$ est une solution du problème (1.1). Ceci achève la preuve du Théorème de convergence 6. □

Jusqu'à maintenant nous avons montré que le schéma proposé (1.27)-(1.28), converge vers une limite qui est solution du problème 1.1. Il reste à voir si cette limite est la bonne seule solution de (1.1), afin de s'assurer que notre schéma converge bien vers la solution attendue. Pour cela nous annonçons le Théorème d'unicité suivant.

Théorème 8 (Unicité). Soit $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ et soit $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p, k)$ une solution du problème (1.1).

Si $\mathbf{U} \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega)$ et si ν est assez grand, dans le sens où pour une certaine constante c , qui ne dépend que de Ω , α , γ et M , la condition suivante est satisfaite $K = \frac{c}{\nu} < 1$, alors $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p, k)$ est l'unique solution du problème (1.1).

Démonstration. La preuve du Théorème 8 se fait de la même manière que la preuve du Théorème de convergence 6.

Si on suppose qu'il existe une autre solution

$$\bar{\mathbf{U}} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{k}) \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega),$$

alors on a les inégalités suivantes

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0 \leq K \|\nabla(k - \bar{k})\|_0,$$

$$\|\nabla(k - \bar{k})\|_0 \leq K \|\nabla(k - \bar{k})\|_0,$$

$$\|p - \bar{p}\|_0 \leq K \|\nabla(k - \bar{k})\|_0 + \| |\mathbf{u}|\mathbf{u} - |\bar{\mathbf{u}}|\bar{\mathbf{u}} \|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}.$$

Comme $K < 1$, alors la seconde inégalité implique que $k = \bar{k}$. On en déduit d'après la première inéquation que $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$. Enfin, la dernière inégalité prouve que $p = \bar{p}$. \square

1.3.3 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons pu approcher la solution du problème (1.1) modélisant l'écoulement d'un fluide turbulent stationnaire et possédant une viscosité assez grande (océan par exemple), par une suite de solutions du schéma que nous avons proposé. Nous avons montré que la convergence est exponentielle, puisque la suite $(k^n)_n$ est une contraction. Nous avons pu aussi vérifier que pour des viscosités assez grandes, le problème (1.1) admet une unique solution dans l'espace $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega)$, où ε est un réel strictement positif.

Dans le chapitre suivant, nous traiterons le cas du couplage océan/atmosphère. Nous tirons parti du travail fourni dans le premier chapitre, afin de généraliser les résultats obtenus.

Chapitre 2

Couplage de deux fluides turbulents : océan/atmosphère

2.1 Position du problème

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le cas d'un seul fluide, et nous avons en quelque sorte considéré un modèle "très simple" de l'océan. Ce dernier est forcé par l'atmosphère qui joue un rôle très important. L'hypothèse de base concernant l'interface air-mer est l'hypothèse du toit rigide, qui suppose en un certain sens que la surface de l'océan est fixe. On notera par F_1 le fluide de l'océan et F_2 celui de l'atmosphère, et on supposera qu'ils sont stationnaires. Chaque fluide est défini dans un domaine Ω_i borné de \mathbb{R}^d , les deux domaines sont disjoints. Nous considérons donc un système d'équations modélisant l'écoulement stationnaire de ces deux fluides turbulents F_1 et F_2 . Les équations sont couplées par des termes non linéaires qui sont soit le coefficient de diffusion soit le second membre. Nous proposons un schéma numérique itératif, pour lequel la convergence est prouvée quand le quotient force/viscosité est assez petit. L'unicité de la solution est aussi établie sous cette condition avec l'hypothèse supplémentaire que la vitesse et l'énergie cinétique du fluide sont assez régulières. Le modèle est décrit par le système d'équations suivant (voir par exemple [10] et [9] pour plus de détails).

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot (\alpha_i(k_i)\nabla \mathbf{u}_i) + \mathbf{grad} p_i &= \mathbf{f}_i \text{ dans } \Omega_i, \\
 \nabla \cdot \mathbf{u}_i &= 0 \text{ dans } \Omega_i, \\
 -\nabla \cdot (\gamma_i(k_i)\nabla k_i) &= \alpha_i(k_i)|\nabla \mathbf{u}_i|^2 \text{ dans } \Omega_i, \\
 \mathbf{u}_i &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_i, \\
 k_i &= 0 \text{ sur } \Gamma_i, \\
 \alpha_i(k_i)\partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i - p_i \mathbf{n}_i + \kappa(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2, \\
 k_i &= \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \text{ sur } \Gamma.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dans toute la suite l'entier i appartient à $\{1, 2\}$. Rappelons que toutes les quantités et inconnues de ce système concernent l'océan F_1 pour $i = 1$ et l'atmosphère F_2 pour $i = 2$.

- On suppose dans toute la suite que chaque Ω_i est un ouvert borné convexe ou de classe $C^{1,1}$ de \mathbb{R}^d , de frontière $\partial\Omega_i = \Gamma_i \cup \Gamma$, où

- $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ est la frontière de glissement des deux fluides. Elle est modélisée par une friction κ . Cette partie du bord est l'interface air-mer que nous supposons fixe, suite à l'hypothèse du toit rigide. Γ est de mesure strictement positive, et $\partial\Gamma$ est une sous-variété lipschitzienne,
- Γ_i est la frontière de non-glissement, elle est de mesure strictement positive, et $\partial\Gamma_i$ est une sous-variété lipschitzienne,
- le point générique est noté $\mathbf{x} = (x, z)$ dans \mathbb{R}^2 et $\mathbf{x} = (x, y, z)$ dans \mathbb{R}^3 ,
- le champ de vecteurs \mathbf{u}_i désigne la vitesse du fluide F_i dans Ω_i ; comme les deux fluides sont incompressibles alors les deux vitesses sont à divergence nulle.
- Les conditions aux limites sont telles que, les deux vitesses \mathbf{u}_i sont nulles sur la frontière de non-glissement Γ_i , mais sur l'interface air-mer, elles sont non-nulles à cause de la tension du vent,
- p_i est la pression du fluide F_i ,
- k_i est l'énergie cinétique turbulente (ECT) du fluide F_i . Sur la frontière de non-glissement, on impose des valeurs positives aux deux ECT k_i , mais pour simplifier le formalisme sans changer la structure mathématique du problème, on les prendra nulles. Sur la surface air-mer, on fait l'hypothèse que l'ECT dépend uniquement de la différence entre la vitesse du fluide F_1 et la vitesse du fluide F_2 ,
- λ est une constante positive sans dimension calculée à partir de données expérimentales, elle est introduite pour modéliser la génération de l'ECT à la surface,
- κ_i est le coefficient de friction du fluide F_i , il est constant positif et sans dimension,
- la quantité $\alpha_i(k_i)$ représente la viscosité turbulente et le terme $\gamma_i(k_i)$ représente le coefficient de diffusion turbulente. Nous les supposons bornés et vérifiant

$$\alpha_i, \gamma_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall \ell \in \mathbb{R}, \alpha_i(\ell) \geq \nu \quad \text{et} \quad \gamma_i(\ell) \geq \nu, \quad (\nu \in \mathbb{R}_+^*). \quad (2.2)$$

On considère aussi le sous-espace de $\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d$, défini par

$$\mathbf{X}_i = \{ \mathbf{v}_i \in \mathbf{H}^1(\Omega_i)^d; \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma \}.$$

Le système (2.1) admet la formulation variationnelle suivante

Trouver $(\mathbf{u}_i, p_i, k_i) \in \mathbf{X}_i \times L^2(\Omega_i) \times W^{1,r'}(\Omega_i)$ tel que, pour tout $\mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i$,

$$a_i(k_i; \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) + b_i(\mathbf{v}_i, p_i) + \kappa_i (|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j), \mathbf{v}_i)_\Gamma = (\mathbf{f}_i, \mathbf{v}_i)_{\Omega_i}, \quad (2.3)$$

$$\forall q_i \in L^2(\Omega_i) \quad b_i(\mathbf{u}_i, q_i) = 0,$$

et,

$$k_i = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_i, \quad k_i = \lambda |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|^2 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad \text{et}$$

$$\forall \varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i), \quad C_i(k_i; k_i, \varphi_i) = (\alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i)_{\Omega_i}. \quad (2.4)$$

Les formes $a_i(\cdot; \cdot, \cdot)$, $b_i(\cdot, \cdot)$ et $C_i(\cdot; \cdot, \cdot)$ sont définies par

$$a_i(k_i; \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = (\alpha_i(k_i) \nabla \mathbf{u}_i, \nabla \mathbf{v}_i)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i) \nabla \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i d\mathbf{x},$$

$$b_i(\mathbf{v}_i, q_i) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}_i, q_i)_{\Omega_i} = - \int_{\Omega_i} q_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i d\mathbf{x}, \quad \text{et}$$

$$C_i(\ell_i; k_i, \varphi_i) = (\gamma_i(\ell_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} \gamma_i(\ell_i) \nabla k_i \nabla \varphi_i d\mathbf{x}.$$

La preuve de l'existence d'une solution du problème (2.3)-(2.4) est due à R.LEWANDOWSKI dans [47].

2.2 Schéma itératif et principaux résultats

Dans cette section, nous allons proposer un algorithme itératif non linéaire, que nous avons associé aux formulations (2.3)-(2.4). Moyennant des conditions supplémentaires sur la régularité de la solution et le fait de prendre des viscosités turbulentes assez grandes dans un sens que nous allons préciser, nous donnerons des estimations à chacune des suites $(\mathbf{u}_i^n)_n$, $(p_i^n)_n$ et $(k_i^n)_n$, ces estimations impliqueront des convergences fortes des suites dans les espaces adéquats, vers une limite (\mathbf{u}, p, k) . Nous vérifierons ensuite que cette limite est une solution du problèmes (2.3)-(2.4). Enfin, et sous les mêmes conditions de convergence, nous établirons un théorème d'unicité, qui montrera que notre schéma converge bien vers la solution attendue.

2.2.1 Schéma itératif

On considère le schéma suivant

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\mathbf{u}_i^{n+1}, p_i^{n+1}, k_i^{n+1}) &\in \mathbf{X}_i \times L^2(\Omega_i) \times W^{1,r'}(\Omega_i), \quad \text{tel que } \forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i, \\ (\alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_i)_{\Omega_i} + b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{n+1}) + \kappa_i (|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \mathbf{v}_i)_{\Gamma} &= (\mathbf{f}_i, \mathbf{v}_i)_{\Omega_i}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\forall q_i \in L^2(\Omega_i), \quad b_i(\mathbf{u}_i^{n+1}, q_i) = 0,$$

et,

$$\begin{aligned} k_i^{n+1} &= 0 \text{ sur } \Gamma_i, \quad k_i^{n+1} = \lambda |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2 \text{ sur } \Gamma, \\ \forall \varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i), \quad (\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i)_{\Omega_i} &= (\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2, \varphi_i)_{\Omega_i}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dans [7] et [11], C. BERNARDI et AL ont considéré un schéma semblable à celui proposé ci-dessus, la différence se trouve dans l'équation (2.5), et surtout le terme à l'interface Γ ,

$$(|\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^n| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \mathbf{v}_i)_{\Gamma_i}, \quad \text{pour } 1 \leq i \neq j \leq 2.$$

Avant de commencer à donner les principaux résultats concernant ce schéma, nous posons

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_\infty &= \max\{\|\alpha_i\|_\infty, i = 1, 2\}, \\ \|\alpha'\|_\infty &= \max\{\|\alpha'_i\|_\infty, i = 1, 2\}, \\ \|\gamma\|_\infty &= \max\{\|\gamma_i\|_\infty, i = 1, 2\}, \\ \|\gamma'\|_\infty &= \max\{\|\gamma'_i\|_\infty, i = 1, 2\}, \\ c_m &= \min\{\kappa_i, i = 1, 2\}, \\ c_M &= \max\{\kappa_i, i = 1, 2\}. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, ε désignera un réel strictement positif, (et suffisamment petit).

2.2.2 Principaux résultats

Dans cette partie, nous allons montrer que le schéma (2.5)-(2.6) converge, et plus précisément nous prouverons que la suite $(k_i^n)_n$ est contractante, que la suite $(\mathbf{u}_i^n)_n$ satisfait la relation suivante

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0.$$

Et enfin, grâce à la condition inf-sup, nous prouverons que la suite $(p^n)_n$ est de Cauchy.

Théorème 9. *Soit $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_i)^d$. On suppose qu'il existe une constante M , strictement positive telle que les suites $(k_i^n)_n$ et $(\mathbf{u}_i^n)_n$ vérifient,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{u}_i^n \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d, \text{ et}$$

$$\|\mathbf{u}_i^n\|_{W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d} \leq M \quad \text{et} \quad \|k_i^n\|_{W^{1,3}(\Omega_i)} \leq M.$$

Alors, il existe une constante c , ne dépendant que des domaines Ω_i , de α_i , de γ_i , de κ_i et de M , telle que si $K = \frac{c}{\nu} < 1$ les suites $(\mathbf{u}_i^n)_n$ et $(k_i^n)_n$ convergent. En outre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0,$$

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0.$$

Démonstration. La preuve du Théorème 9 se fait à l'aide de plusieurs estimations.

Première étape : Estimation de $\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2$.

On prend $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\kappa_i} \mathbf{u}_i^{n+1}$ comme fonction test dans (2.5), ce qui implique

$$\frac{1}{\kappa_i} \int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 dx + \int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \mathbf{u}_i^{n+1} d\tau = \frac{1}{\kappa_i} \int_{\Omega_i} \mathbf{f}_i \mathbf{u}_i^{n+1} dx.$$

En sommant sur i , on obtient

$$\sum_{i=1}^2 \frac{1}{\kappa_i} \left(\int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 dx \right) + \int_{\Gamma} |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^3 d\tau = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\kappa_i} \int_{\Omega_i} \mathbf{f}_i \mathbf{u}_i^{n+1} dx,$$

comme

$$\int_{\Gamma} |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^3 d\tau \quad \text{est positif,}$$

et d'après l'hypthèse (2.2), on trouve

$$\frac{\nu}{c_M} \sum_{i=1}^2 \|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \frac{1}{c_m} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \mathbf{f}_i \mathbf{u}_i^{n+1} dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.10), la dernière relation devient

$$\frac{\nu}{c_M} \sum_{i=1}^2 \|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \frac{1}{c_m} \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{f}_i\|_0 \|\mathbf{u}_i^{n+1}\|_0,$$

$$\text{ceci implique que } \sum_{i=1}^2 \|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \frac{c_M c_p}{c_m \nu} \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{f}_i\|_0 \|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_0.$$

En utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_0^2 \leq \frac{c_p^2 c_M^2}{c_m^2 \nu^2} \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{f}_i\|_0^2. \quad (2.7)$$

Ensuite, choisissons $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\kappa_i}(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)$, et injectons-le dans (1.7) aux étapes n et $n + 1$. La différence des deux équations ainsi obtenues est alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_i} \left(\alpha_i(k^n) \nabla \mathbf{u}_i^{n+1}, \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right) - \frac{1}{\kappa_i} \left(\alpha_i(k^{n-1}) \nabla \mathbf{u}_i^n, \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right) \\ & + \left(|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n \right)_{\Gamma} - \left(|\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^n| (\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^n), \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n \right)_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } & \frac{1}{\kappa_i} \left(\alpha_i(k^n) \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n), \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right)_{\Omega_i} \\ & + \frac{1}{\kappa_i} \left((\alpha_i(k^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) \nabla \mathbf{u}_i^n, \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right)_{\Omega_i} \\ & + \left(|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) - |\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^n| (\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_j^n), \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n \right)_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Passons ensuite à la somme sur i ,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\kappa_i} \left(\alpha_i(k_i^n) \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n), \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right)_{\Omega_i} \\ & + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\kappa_i} \left((\alpha_i(k^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) \nabla \mathbf{u}_i^n, \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right) \\ & + \left(|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) - |\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n| (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n), (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) - (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n) \right)_{\Gamma}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2, la quantité

$$\left(|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) - |\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n| (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n), (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) - (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n) \right)_{\Gamma}$$

est toujours positive, donc

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\kappa_i} \left(\alpha_i(k_i^n) \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n), \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right)_{\Omega_i} \\ & + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\kappa_i} \left((\alpha_i(k^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) \nabla \mathbf{u}_i^n, \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right) \leq 0, \end{aligned}$$

or $\frac{1}{\kappa_i} \geq \frac{1}{c_M}$, donc

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\alpha_i(k_i^n) \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n), \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right)_{\Omega_i} \\ & + \sum_{i=1}^2 \left((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) \nabla \mathbf{u}_i^n, \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right)_{\Omega_i} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

D'après l'hypothèse (2.2), le terme de gauche dans la relation (2.8) vérifie l'inéquation suivante

$$\sum_{i=1}^2 \left(\alpha_i(k_i^n) \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n), \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right)_{\Omega_i} \geq \nu \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2. \quad (2.9)$$

Quant à celui de droite, nous utilisons le Théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\alpha_i(\cdot)$ et l'inégalité de Hölder, ceci donne

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\alpha_i(k_i^{n-1}) \nabla \mathbf{u}_i^n, \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right)_{\Omega_i}, \\ & \leq \sum_{i=1}^2 \|\alpha'_i\|_{\infty} \left(|k_i^n - k_i^{n-1}| |\nabla \mathbf{u}_i^n|, |\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)| \right)_{\Omega_i}, \\ & \leq \|\alpha'\|_{\infty} \sum_{i=1}^2 \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla \mathbf{u}_i^n\|_{L^3(\Omega_i)^d} \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0, \end{aligned}$$

grâce à l'injection canonique (1.9) de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^6(\Omega_i)$, et aux hypothèses du Théorème 9, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) \nabla \mathbf{u}_i^n, \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) \right)_{\Omega_i}, \\ & \leq \|\alpha'\|_{\infty} M c_0 \sum_{i=1}^2 \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{H^1(\Omega_i)} \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0, \\ & \leq \|\alpha'\|_{\infty} M c_0 c_p \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (2.8) et (2.9), et l'inégalité suivante,

$$\begin{aligned} & \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ on a pour tout réel } \delta > 0, \quad \text{l'inégalité suivante,} \\ & \frac{1}{\delta} a^2 + \delta b^2 \geq 2ab. \end{aligned} \quad (2.10)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2 & \leq \|\alpha'\|_{\infty} M c_0 c_p \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \\ & \leq \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2 + \frac{\|\alpha'\|_{\infty}^2 M^2 c_0^2 c_p^2}{2\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2. \end{aligned}$$

Ceci se traduit par

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2 \leq \frac{\|\alpha'\|_\infty^2 M^2 c_0^2 c_p^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2. \quad (2.11)$$

Pour montrer que la suite $(\mathbf{u}_i^n)_n$ est convergente, il suffit donc de montrer que la suite $(k_i^n)_n$ est contractante, et que la suite $(\mathbf{u}_i^n)_n$ est de Cauchy. Pour cela nous allons utiliser le schéma numérique associé à l'énergie cinétique turbulente (2.6).

Deuxième étape : Estimation de $\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2$

Pour cela, on choisira une fonction test φ_i , qui s'annule sur $\partial\Omega_i$. Une fonction évidente et qui est fréquemment utilisée est

$$\varphi_i = k_i^{n+1} - k_i^n,$$

mais dans notre cas, cette fonction n'est pas forcément nulle sur tout le bord. De ce fait, nous faisons appel à un opérateur de relèvement. Soit donc R_i , l'opérateur de relèvement harmonique sur Ω_i . Le relèvement $R_i\eta$, d'une fonction $\eta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est donné par

$$\begin{aligned} -\Delta R_i(\eta) &= 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ R_i(\eta) &= 0 & \text{sur } \Gamma, \\ R_i(\eta) &= \eta & \text{sur } \Gamma_i. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ainsi, R_i est continu de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega_i)$. Soit c_{R_i} sa constante de continuité, et posons $c_R = \max\{c_{R_i}; i = 1, 2\}$,

$$\forall i \in \{1, 2\}, \text{ et } \forall \eta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \|R_i\eta\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)} \leq c_R \|\eta\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.13)$$

Or $k_i^n \in W^{1,3}(\Omega_i)$, sa trace sur Γ est alors dans $W^{\frac{2}{3},3}(\Gamma)$, qui s'injecte dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Et comme $k_i^n|_{\Gamma_i} = 0$, alors $k_i^n|_{\Gamma}$ appartient à $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Il est donc naturel de prendre $\varphi_i = (k_i^{n+1} - k_i^n) - R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)$ comme fonction test dans l'équation d'énergie cinétique turbulente (2.6), aux étapes n et $n + 1$, la différence des deux équations obtenues, donne

$$\begin{aligned} & \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1} - \gamma_i(k_i^{n-1}) \nabla k_i^n, \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \\ & - \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1} - \gamma_i(k_i^{n-1}) \nabla k_i^n, \nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \\ & = \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i^{n-1}) |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, k_i^{n+1} - k_i^n \right)_{\Omega_i} \\ & - \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i^{n-1}) |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i}. \end{aligned}$$

En faisant apparaître les termes $((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n$ et $((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n$, on déduit

$$\begin{aligned}
\nu \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 &\leq \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n), \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} = \\
&\left(\alpha_i(k_i^n) (|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2), k_i^{n+1} - k_i^n \right)_{\Omega_i} \\
&+ \left((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, k_i^{n+1} - k_i^n \right)_{\Omega_i} \\
&- \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n, \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \\
&+ \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n, \nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \\
&+ \left(\alpha_i(k_i^n) (|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2), R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \\
&- \left((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \\
&- \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n), \nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\nu \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_{0,\Omega_i}^2 \leq I_{i,1} + I_{i,2} + I_{i,3} + I_{i,4} + I_{i,5} + I_{i,6} + I_{i,7}, \quad (2.14)$$

où

$$\begin{aligned}
I_{i,1} &= \left| \left(\alpha_i(k_i^n) (|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2), k_i^{n+1} - k_i^n \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_{i,2} &= \left| \left((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, k_i^{n+1} - k_i^n \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_{i,3} &= \left| \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n, \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_{i,4} &= \left| \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n, \nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_{i,5} &= \left| \left(\alpha_i(k_i^n) (|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2), R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_{i,6} &= \left| \left((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_{i,7} &= \left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n), \nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|.
\end{aligned}$$

Pour $j \in \{1, 2, \dots, 7\}$, on pose $I_j = \sum_{i=1}^2 I_{i,j}$. On a aussi

$$\nu \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \sum_{j=1}^7 I_j. \quad (2.15)$$

Maintenant nous allons estimer les quantités I_j .

Troisième étape : Estimation des I_j

Majoration de I_1 On utilise l'inégalité de Hölder, l'injection continue (1.9) de H^1 dans L^6 et l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.10). On a donc

$$\begin{aligned} I_{i,1} &= \left| \left(\alpha_i(k_i^n)(|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2), k_i^{n+1} - k_i^n \right)_{\Omega_i} \right|, \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \int_{\Omega_i} |\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)| (|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}| + |\nabla \mathbf{u}_i^n|) |k_i^{n+1} - k_i^n| dx, \\ &\leq \|\alpha_i\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \left(\|\mathbf{u}_i^{n+1}\|_{W^{1,3}(\Omega_i)^d} + \|\mathbf{u}_i^n\|_{W^{1,3}(\Omega_i)^d} \right) \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{L^6(\Omega)}, \\ &\leq 2Mc_0 \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}, \\ &\leq 2Mc_0 c_p \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0. \end{aligned}$$

Fixons maintenant un réel δ , strictement positif et appliquons la relation (2.10) à

$$\left(2Mc_0 c_p \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \right) \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0,$$

on obtient alors

$$I_{i,1} \leq \frac{\nu}{\delta} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 + \frac{4\delta M^2 c_0^2 c_p^2 \|\alpha\|_\infty^2}{\nu} \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2,$$

$$\text{et donc } I_1 \leq \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 + \frac{4\delta M^2 c_0^2 c_p^2 \|\alpha\|_\infty^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2.$$

D'après la relation (2.11), on conclut que

$$I_1 \leq \frac{4\delta M^4 c_0^4 c_p^4 \|\alpha\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2. \quad (2.16)$$

On pose $C_1^2 = \frac{4\delta M^4 c_0^4 c_p^4 \|\alpha\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2}$.

Majoration de I_2 On a

$$I_{i,2} = \left| \left((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, k_i^{n+1} - k_i^n \right)_{\Omega_i} \right|.$$

En appliquant le Théorème des accroissements finis à la fonction $\alpha_i(\cdot)$, l'inégalité de Hölder, l'injection (1.9) de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^6(\Omega_i)$, l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.10) et la relation (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} I_{i,2} &= \left((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, k_i^{n+1} - k_i^n \right)_{\Omega_i}, \\ &\leq \|\alpha'_i\|_\infty \left(|k_i^n - k_i^{n-1}| |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, |k_i^{n+1} - k_i^n| \right)_{\Omega_i}, \\ &\leq \|\alpha'_i\|_\infty \|\nabla \mathbf{u}_i^n\|_{L^3(\Omega_i)^d}^2 \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0, \\ &\leq c_0 \|\alpha'_i\|_\infty \|\mathbf{u}_i^n\|_{W^{1,3}(\Omega_i)^d}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0 \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{H^1(\Omega_i)}, \\ &\leq c_0 c_p M^2 \|\alpha'_i\|_\infty \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0, \\ &\leq \frac{\delta M^4 c_0^2 c_p^2 \|\alpha'_i\|_\infty^2}{\nu} \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_0^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$I_2 = \sum_{i=1}^2 I_{i,2} \leq \frac{\delta M^4 c_0^2 c_p^2 \|\alpha'_i\|_\infty^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_0^2,$$

soit

$$I_2 \leq C_2^2 \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_0^2, \quad (2.17)$$

où $C_2^2 = \frac{\delta M^4 c_0^2 c_p^2 \|\alpha'_i\|_\infty^2}{\nu}$, ce qui achève la majoration de I_2 .

Majoration de I_3 . On a

$$I_{i,3} = \left| \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n, \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|.$$

De la même façon, on applique le Théorème des accroissements finis à la fonction $\gamma_i(\cdot)$, l'inégalité de Hölder, l'injection (1.9) de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^6(\Omega_i)$, l'inégalité de Poincaré-

Friedrichs (1.10), et la relation (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}
I_{i,3} &= \left| \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n, \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
&\leq \|\gamma'_i\|_\infty \left(|k_i^n - k_i^{n-1}| \|\nabla k_i^n\|, \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\| \right)_{\Omega_i}, \\
&\leq \|\gamma'_i\|_\infty \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla k_i^n\|_{L^3(\Omega_i)} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0, \\
&\leq c_0 M \|\gamma'_i\|_\infty \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{H^1(\Omega_i)} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0, \\
&\leq c_0 c_p M \|\gamma'_i\|_\infty \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0, \\
&\leq \frac{\delta c_0^2 c_p^2 M^2 \|\gamma'_i\|_\infty^2}{\nu} \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2.
\end{aligned}$$

On a donc

$$I_3 = \sum_{i=1}^2 I_{i,3} \leq \frac{\delta c_0^2 c_p^2 M^2 \|\gamma'_i\|_\infty^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2,$$

ce qui nous donne la majoration de I_3 ,

$$I_3 \leq C_3^2 \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2, \quad (2.18)$$

avec $C_3^2 = \frac{\delta c_0^2 c_p^2 M^2 \|\gamma'_i\|_\infty^2}{\nu}$.

Majoration de I_4 . On a

$$I_{i,4} = \left| \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n, \nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|.$$

Par les mêmes arguments, on applique le Théorème des accroissements finis à la fonction $\gamma_i(\cdot)$, l'inégalité de Hölder, l'injection (1.9) de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^6(\Omega_i)$, l'inégalité de Poincaré-

Friedrichs (1.10), la relation (2.10) et (2.13). On obtient alors

$$\begin{aligned}
 I_{i,4} &= \left| \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i^{n-1})) \nabla k_i^n, \nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
 &\leq \|\gamma'\|_\infty \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla k_i^n\|_{L^3(\Omega_i)} \|\nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0, \\
 &\leq \|\gamma'\|_\infty \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla k_i^n\|_{L^3(\Omega_i)} \|R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_{H^1(\Omega_i)}, \\
 &\leq c_R c_0 M \|\gamma'\|_\infty \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{H^1(\Omega_i)} \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega_i)}, \\
 &\leq c_R c_0 c_p M \|\gamma'\|_\infty \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0 \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}, \\
 &\leq c_R c_0 c_p^2 M \|\gamma'\|_\infty \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_0 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0, \\
 &\leq \frac{\delta c_0^2 c_p^2 M^2 \|\gamma'\|_\infty^2}{\nu} \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2, \\
 &\leq \frac{\delta c_R^2 c_0^2 c_p^4 M^2 \|\gamma'\|_\infty^2}{\nu} \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2,
 \end{aligned}$$

donc

$$I_4 = \sum_{i=1}^2 I_{i,4} \leq \frac{\delta c_R^2 c_0^2 c_p^4 M^2 \|\gamma'\|_\infty^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2.$$

On a aussi une majoration de I_4 ,

$$I_4 \leq \frac{\delta c_R^2 c_0^2 c_p^4 M^2 \|\gamma'\|_\infty^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2. \quad (2.19)$$

On pose $C_4^2 = \frac{\delta c_R^2 c_0^2 c_p^4 M^2 \|\gamma'\|_\infty^2}{\nu}$, pour plus de clarté.

Majoration de I_5 . On a

$$I_{i,5} = \left| \left(\alpha_i(k_i^n) (|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2), R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|.$$

En remplaçant $|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2$ par $|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)| |\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n)|$, et en utilisant l'inégalité de Hölder et les relations (2.13) et (2.11), on obtient

$$\begin{aligned}
I_{i,5} &= \left| \left(\alpha_i(k_i^n) (|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2), R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
&\leq \|\alpha\|_\infty \left(|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)| \cdot (|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}| + |\nabla \mathbf{u}_i^n|), |R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)| \right)_{\Omega_i}, \\
&\leq \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 (\|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_{L^3(\Omega_i)^d} + \|\nabla \mathbf{u}_i^n\|_{L^3(\Omega_i)^d}) \|R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_{L^6(\Omega_i)}, \\
&\leq 2Mc_0 \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \|R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_{H^1(\Omega_i)}, \\
&\leq 2Mc_0 c_R \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \\
&\leq 2Mc_0 c_R \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}, \\
&\leq 2Mc_0 c_p c_R \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0, \\
&\leq \frac{4\delta M^2 c_0^2 c_p^2 c_R^2 \|\alpha\|_\infty^2}{\nu} \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Comme } I_5 &= \sum_{i=1}^2 I_{i,5} \leq \frac{4\delta M^2 c_0^2 c_p^2 c_R^2 \|\alpha\|_\infty^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2, \\
&\leq \frac{4\delta M^4 c_0^4 c_p^4 c_R^2 \|\alpha\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2,
\end{aligned}$$

on a la majoration,

$$I_5 \leq C_5^2 \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2, \quad (2.20)$$

$$\text{où } C_5^2 = \frac{4\delta M^4 c_0^4 c_p^4 c_R^2 \|\alpha\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2}.$$

Majoration de I_6 . De la même manière qu'auparavant, on a

$$\begin{aligned}
I_{i,6} &= \left| \left((\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i^{n-1})) |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
&\leq \|\alpha'\|_\infty \left(|k_i^n - k_i^{n-1}| |\nabla \mathbf{u}_i^n|^2, |R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)| \right), \\
&\leq \|\alpha'\|_\infty \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla \mathbf{u}_i^n\|_{L^3(\Omega_i)^d}^2 \|R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_{L^6(\Omega_i)}, \\
&\leq M^2 c_0^2 \|\alpha'\|_\infty \|k_i^n - k_i^{n-1}\|_{H^1(\Omega_i)} \|R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_{H^1(\Omega_i)}, \\
&\leq M^2 c_0^2 c_p c_R \|\alpha'\|_\infty \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0 \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \\
&\leq M^2 c_0^2 c_p c_R \|\alpha'\|_\infty \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0 \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}, \\
&\leq M^2 c_0^2 c_p^2 c_R \|\alpha'\|_\infty \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0, \\
&\leq \frac{\delta M^4 c_0^4 c_p^4 c_R^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu} \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2.
\end{aligned}$$

D'après la définition de I_6 , on a la majoration

$$I_6 \leq \frac{\delta M^4 c_0^4 c_p^4 c_R^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2. \quad (2.21)$$

On pose $C_6^2 = \frac{\delta M^4 c_0^4 c_p^4 c_R^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu}$.

Majoration de I_7 . La majoration de I_7 est plus technique. On a

$$\begin{aligned}
I_{i,7} &= \left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla(k_i^{n+1} - k_i^n), \nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
&\leq \|\gamma_i\|_\infty \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0 \|\nabla R_i(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0, \\
&\leq c_R \|\gamma\|_\infty \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0 \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},
\end{aligned}$$

or

$$(k_i^{n+1} - k_i^n)|_\Gamma = \lambda(|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2)|_\Gamma,$$

$$\begin{aligned} \implies \|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &= \lambda \| |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 \|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \\ &= \lambda \left\| [(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n)][(\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n)] \right\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Donc

$$I_{i,7} \leq \lambda c_R \|\gamma\|_\infty \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0 \left\| [(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n)][(\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n)] \right\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.22)$$

Pour estimer la quantité qui est sur le bord Γ , nous utilisons le Théorème 7 en dimension $d = 2$, en prenant

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}, \quad p = 2, \\ s_1 &= \frac{1}{2}, \quad p_1 = 2, \\ s_2 &= 1 - \frac{1}{3 + \varepsilon}, \quad p_2 = 3 + \varepsilon, \\ (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n) &= \mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma) = W^{s_1,p_1}(\Gamma), \\ (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n) &= \mathbf{v} \in W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon},3+\varepsilon}(\Gamma) = W^{s_2,p_2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Pour tout ε strictement positif, on a $s_2 \geq s$.

La condition (1.35) du Théorème (7) est vérifiée car

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 - s &= 1 - \frac{1}{3 + \varepsilon}, \\ &= \frac{2 + \varepsilon}{3 + \varepsilon}, \quad \text{et} \\ 2 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p} \right) &= \frac{2}{3 + \varepsilon}, \end{aligned}$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad s_1 + s_2 - s > 2 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p} \right).$$

Et aussi

$$\begin{aligned} s_1 - s &= 0, \quad \text{et} \quad 2 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} \right) = 0, \quad \text{alors,} \\ s_1 - s &\geq 2 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} \right). \end{aligned}$$

Pour s_2 , on a

$$\begin{aligned} s_2 - s &= 1 - \frac{1}{3 + \varepsilon} - \frac{1}{2}, \\ &= \frac{2}{3 + \varepsilon} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et comme

$$2\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{3 + \varepsilon} - 1,$$

alors

$$s_2 - s \geq 2\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right).$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} &\left\| [(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n)][(\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n)] \right\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \\ &\leq \|(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n)\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|(\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n)\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon}, 3+\varepsilon}(\Gamma)^d}, \\ &\leq \left[\|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right] \\ &\quad \left[\|\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon}, 3+\varepsilon}(\Gamma)^d} + \|\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon}, 3+\varepsilon}(\Gamma)^d} \right], \\ &\leq c_t \left(\sum_{i=1}^2 \|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d} \right) \left(\sum_{i=1}^2 \|\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n\|_{W^{1, 3+\varepsilon}(\Omega_i)^d} \right), \end{aligned}$$

où $c_t = \max\{c_1, c_3\}$, tel que c_1 et c_3 représentent respectivement, les constantes de continuité des opérateurs traces de $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$ dans $\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et de $W^{1, 3+\varepsilon}(\Omega_i)^d$ dans $W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon}, 3+\varepsilon}(\Gamma)^d$, donc

$$\begin{aligned} &\left\| [(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} - \mathbf{u}_2^n)][(\mathbf{u}_1^{n+1} + \mathbf{u}_1^n) - (\mathbf{u}_2^{n+1} + \mathbf{u}_2^n)] \right\|_{\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq 4c_t M c_p \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

D'après les relations (2.22), (2.23), (2.10) et (2.11), on a

$$\begin{aligned}
I_{i,7} &\leq 4M\lambda c_R c_t c_p \|\gamma\|_\infty \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0 \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0, \\
&\leq \frac{\nu}{\delta} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 + \frac{16\delta M^2 \lambda^2 c_R^2 c_t^2 c_p^2 \|\gamma\|_\infty^2}{\nu} \left(\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0 \right)^2, \\
&\leq \frac{\nu}{\delta} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 + \frac{32\delta M^2 \lambda^2 c_R^2 c_t^2 c_p^2 \|\gamma\|_\infty^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2, \\
&\leq \frac{\nu}{\delta} \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 + \frac{32\delta M^4 \lambda^2 c_R^2 c_t^2 c_0^2 c_p^4 \|\gamma\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2.
\end{aligned}$$

En faisant la somme sur i , on obtient la majoration de $I_7 = \sum_{i=1}^2 I_{i,7}$,

$$I_7 \leq \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 + \frac{32\delta M^4 \lambda^2 c_R^2 c_t^2 c_0^2 c_p^4 \|\gamma\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2. \quad (2.24)$$

On pose $C_7^2 = \frac{32\delta M^4 \lambda^2 c_R^2 c_t^2 c_0^2 c_p^4 \|\gamma\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2}$, ce qui achève la majoration de I_7 .

Finalement, d'après (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) et (2.24) et en prenant $\delta = 14$, par exemple, nous avons la majoration suivante

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 \leq \frac{K^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2,$$

$$\text{où } K^2 = 2 \sum_{j=1}^7 C_j^2.$$

Rappelons que les constantes C_j sont de la forme $\frac{c}{\nu}$, donc on peut conclure que si la viscosité ν est assez grande, alors la constante K est strictement inférieure à 1. Ce qui prouve que la suite $(k_i^n)_n$ est contractante, donc elle converge fortement dans $H^1(\Omega_i)$ vers une limite, qu'on note k_i .

D'après la relation (2.11), nous allons montrer que la suite $(\mathbf{u}_i^n)_n$ est de Cauchy.

Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \geq n$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^m - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2 &\leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=n+1}^m \|\nabla(\mathbf{u}_i^j - \mathbf{u}_i^{j-1})\|_0^2, \\ &\leq \frac{\|\alpha'\|_\infty M^2 c_0^2 c_p^2}{\nu} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=n+1}^m \|\nabla(k_i^j - k_i^{j-1})\|_0^2, \\ &\leq \frac{\|\alpha'\|_\infty M^2 c_0^2 c_p^2}{\nu} \sum_{j=n}^m K^{j-n} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^m - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2 \leq \frac{1 - K^{m-n+1}}{1 - K} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^n - k_i^{n-1})\|_0^2. \quad (2.25)$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, la quantité $\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^m - \mathbf{u}_i^n)\|_0^2$ tend vers 0, car $K < 1$ et la suite $(k_i^n)_n$ est convergente. Ce qui prouve que la suite $(\mathbf{u}_i^n)_n$ est de Cauchy. Soit \mathbf{u}_i sa limite forte dans $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$. Ceci achève la preuve du Théorème 9. \square

Il reste à montrer que la suite $(p_i^n)_n$ est convergente, pour cela nous utilisons la condition inf-sup, Théorème 5.

Théorème 10 (pression). *Soit $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_i)^d$, on suppose qu'il existe une constante M , strictement positive telle que la suite $(\mathbf{u}_i^n)_n$ vérifie*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{u}_i^n\|_{W^{1,3}(\Omega_i)^d} \leq M,$$

alors il existe une constante c ne dépendant que du domaine Ω_i , de α_i , de γ_i et de M , telle que si $\nu > c$, la suite $(p_i^n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega_i)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|p_i^{m+1} - p_i^{n+1}\|_0^2 &\leq 8 \frac{\|\alpha\|_\infty^2 + M^2 c_0^2 c_p^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\beta^2 (1 - K)} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 \\ &\quad + \frac{4c_t^2}{\beta^2} \left\| \left| \mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1} \right| (\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}) - \left| \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} \right| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}^2, \end{aligned}$$

où $K = \frac{c}{\nu} < 1$.

Démonstration. D'après la formulation (2.5), pour tout $i \neq j \in \{1, 2\}$, et pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i$, on a

$$(\alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_i) + b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{n+1}) + \kappa_i \left(\left| \mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1} \right| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \mathbf{v}_i \right)_\Gamma = (\mathbf{f}_i, \mathbf{v}_i).$$

Soient m et n deux entiers naturels tels que $n \leq m$. Fixons un vecteur \mathbf{v}_i , non nul de \mathbf{X}_i . On écrit l'équation (2.5), aux étapes m et n . La différence des deux équations obtenues donne

$$\begin{aligned} \frac{b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{m+1} - p_i^{n+1})}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} = & \\ & - \left(\alpha_i(k_i^m) \nabla \mathbf{u}_i^{m+1} - \alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^{n+1}, \frac{\nabla \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \right)_{\Omega_i} \\ & - \kappa_i \left(|\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}| (\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}) - |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \right)_{\Gamma}. \end{aligned}$$

En faisant apparaître le terme $\alpha_i(k_i^m) - \alpha_i(k_i^n)$, la dernière équation devient

$$\begin{aligned} \frac{b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{m+1} - p_i^{n+1})}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} = & \\ & - \left(\alpha_i(k_i^m) \nabla (\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_i^{n+1}), \frac{\nabla \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \right)_{\Omega_i} - \left((\alpha_i(k_i^m) - \alpha_i(k_i^n)) \nabla \mathbf{u}_i^n, \frac{\nabla \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \right)_{\Omega_i} \\ & - \kappa_i \left(|\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}| (\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}) - |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \right)_{\Gamma}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder et le Théorème des accroissements finis, on a

$$\begin{aligned} \frac{b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{m+1} - p_i^{n+1})}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \leq & \\ \|\alpha\|_{\infty} \|\nabla (\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_i^{n+1})\|_0 & \frac{\|\nabla \mathbf{v}_i\|_0}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} + \|\alpha'\|_{\infty} \|k_i^m - k_i^n\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla \mathbf{u}_i^n\|_{L^3(\Omega_i)^d} \frac{\|\nabla \mathbf{v}_i\|_0}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \\ + \kappa_i \int_{\Gamma} & \left| |\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}| (\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}) - |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \right| \frac{|\mathbf{v}_i|}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant l'injection (1.9), de $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$ dans $L^6(\Omega_i)^d$ et l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.10), la dernière inégalité s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{m+1} - p_i^{n+1})}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \leq & \\ \left(\|\alpha\|_{\infty} \|\nabla (\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_i^{n+1})\|_0 + M c_0 c_p \|\alpha'\|_{\infty} \|\nabla (k_i^m - k_i^n)\|_0 \right) & \frac{\|\nabla \mathbf{v}_i\|_0}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \\ + \kappa_i \int_{\Gamma} & \left| |\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}| (\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}) - |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \right| \frac{|\mathbf{v}_i|}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} d\tau. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{u}_i^n \in \mathbf{H}^1(\Omega_i)$, sa trace sur Γ est dans $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, qui s'injecte de façon compacte dans $L^3(\Gamma)^d$, alors on a

$$\left| |\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}| (\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}) - |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \right| \in L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d,$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{m+1} - p_i^{n+1})}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \\ & \leq \left(\|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_i^{n+1})\|_0 + Mc_0c_p \|\alpha'\|_\infty \|\nabla(k_i^m - k_i^n)\|_0 \right) \frac{\|\nabla \mathbf{v}_i\|_0}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \\ & \quad + \left\| |\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}|(\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}) - |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}|(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} \frac{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d}}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}}. \end{aligned}$$

D'après la continuité de l'opérateur trace de $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$ dans $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et la condition inf-sup, on écrit

$$\begin{aligned} \beta_{\Omega_i} \|p_i^{m+1} - p_i^{n+1}\|_0 & \leq \frac{b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{m+1} - p_i^{n+1})}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \\ & \leq \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_i^{n+1})\|_0 + Mc_0c_p \|\alpha'\|_\infty \|\nabla(k_i^m - k_i^n)\|_0 \\ & \quad + c_t \left\| |\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}|(\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}) - |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}|(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}, \end{aligned}$$

En passant au sup sur les $\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}^1(\Omega_i)$, on obtient

$$\begin{aligned} \beta_{\Omega_i} \|p_i^{m+1} - p_i^{n+1}\|_0 & \leq \sup_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}^1(\Omega_i)} \frac{b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{m+1} - p_i^{n+1})}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)^d}} \\ & \leq \|\alpha\|_\infty \|\nabla(\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_i^{n+1})\|_0 + Mc_0c_p \|\alpha'\|_\infty \|\nabla(k_i^m - k_i^n)\|_0 \\ & \quad + c_t \left\| |\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}|(\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_j^{m+1}) - |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}|(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}. \end{aligned}$$

Ensuite, en sommant sur $i = 1, 2$, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \beta_{\Omega_i} \|p_i^{m+1} - p_i^{n+1}\|_0 & \leq \|\alpha\|_\infty \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_i^{n+1})\|_0 + Mc_0c_p \|\alpha'\|_\infty \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^m - k_i^n)\|_0 \\ & \quad + 2c_t \left\| |\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}|(\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}) - |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} \\ & \leq \sqrt{2} \|\alpha\|_\infty \left(\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{m+1} - \mathbf{u}_i^{n+1})\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} Mc_0c_p \|\alpha'\|_\infty \left(\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^m - k_i^n)\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + 2c_t \left\| |\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}|(\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}) - |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|(\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}, \end{aligned}$$

d'après la relation (2.25), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \beta_{\Omega_i} \|p_i^{m+1} - p_i^{n+1}\|_0 \\ & \leq \sqrt{2 \frac{1 - K^{m-n+1}}{1 - K}} \left(\|\alpha\|_\infty + M c_0 c_p \|\alpha'\|_\infty \right) \left(\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + 2c_t \left\| \left| \mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1} \right| (\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}) - \left| \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} \right| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}. \end{aligned}$$

Donc si on pose $\beta = \min\{\beta_i, i = 1, 2\}$, et puisque $K < 1$ et $m > n$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|p_i^{m+1} - p_i^{n+1}\|_0^2 & \leq 8 \frac{\|\alpha\|_\infty^2 + M^2 c_0^2 c_p^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\beta^2 (1 - K)} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 \\ & \quad + \frac{4c_t^2}{\beta^2} \left\| \left| \mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1} \right| (\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}) - \left| \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} \right| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Il reste à montrer que la quantité de droite de cette inégalité tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

D'après le Théorème 9, on a

$$8 \frac{\|\alpha\|_\infty^2 + M^2 c_0^2 c_p^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\beta^2 (1 - K)} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i^{n+1} - k_i^n)\|_0^2 \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Pour le terme

$$\frac{4c_t^2}{\beta^2} \left\| \left| \mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1} \right| (\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}) - \left| \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} \right| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}^2,$$

nous avons montré que la suite $(\mathbf{u}_i^n)_n$ converge fortement vers \mathbf{u}_i , dans $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$, la continuité de l'opérateur trace, de $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$ dans $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, implique que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n\|_\Gamma & \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \text{ et} \\ (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n)|_\Gamma & \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ s'injecte dans $L^3(\Gamma)^d$, de façon continue, nous avons aussi

$$\left[(\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n) | \mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n \right]_{|\Gamma} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{dans } L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

donc la suite $\left(\left[(\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n) | \mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n \right]_{|\Gamma} \right)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d$. Ceci implique que quand n tend vers $+\infty$, la quantité

$$\frac{4c_t^2}{\beta^2} \left\| \left| \mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1} \right| (\mathbf{u}_1^{m+1} - \mathbf{u}_2^{m+1}) - \left| \mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1} \right| (\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}^2 \rightarrow 0.$$

On conclut alors que la suite $(p_i^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega_i)$, donc elle y converge fortement vers une limite notée p_i . Ceci achève la preuve du Théorème 10. \square

2.2.3 Passage à la limite

Afin de s'assurer que le schéma itératif (2.5)-(2.6), que nous avons proposé au début de ce chapitre converge vers une solution du problème (2.3)-(2.4), il faut vérifier que $(\mathbf{u}_i, p_i; k_i)$ satisfait (2.3)-(2.4). Pour cela nous énonçons le théorème suivant

Théorème 11 (Passage à la limite). *Sous les conditions du Théorème 9, la limite $(\mathbf{u}_i, p_i; k_i)$ de la suite $(\mathbf{u}_i^n, p_i^n; k_i^n)_n$ est une solution de la formulation variationnelle (2.3)-(2.4).*

Démonstration. La preuve de ce Théorème se fait en trois étapes

- $(\mathbf{u}_i, p_i; k_i)$ vérifie l'équation de Stokes (2.3),
- $(\mathbf{u}_i, p_i; k_i)$ vérifie l'équation de l'énergie cinétique turbulente (2.4),
- $(\mathbf{u}_i, p_i; k_i)$ vérifie les conditions aux limites, à savoir $k_i = \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$ sur Γ .

Première étape : équation de Stokes

Nous allons montrer que $(\mathbf{u}_i, p_i; k_i)$ satisfait (2.3). Prenons un champ de vecteur $\mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i$, et vérifions que

$$a_i(k_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) + b_i(\mathbf{v}_i, p_i) + \kappa_i \left(|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j), \mathbf{v}_i \right)_{\Gamma} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{v}_i)_{\Omega_i}$$

- $a_i(k_i^n, \mathbf{u}_i^{n+1}, \mathbf{v}_i) \longrightarrow a_i(k_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)$, quand $n \rightarrow +\infty$, en effet la suite $(k_i^n)_n$ tend vers k_i dans $L^2(\Omega_i)$ fort et $\alpha_i(\cdot)$ est continue, donc

$$\alpha_i(k_i^n) \longrightarrow \alpha_i(k_i), \text{ p.p dans } \Omega_i, \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

d'autre part la suite $(\mathbf{u}_i^n)_n$ tend vers \mathbf{u}_i , fortement dans $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$, donc $(\nabla \mathbf{u}_i^n)_n$ tend vers $\nabla \mathbf{u}_i$ dans $L^2(\Omega_i)^d$ fort.

D'après la réciproque du Théorème de Lebesgue (voir [17], Th. IV.9), il existe une sous suite de $(\nabla \mathbf{u}_i^n)_n$, notée encore $(\nabla \mathbf{u}_i^n)_n$, telle que

$$\nabla \mathbf{u}_i^n \longrightarrow \nabla \mathbf{u}_i, \text{ p.p dans } \Omega_i, \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\nabla \mathbf{u}_i^n| \leq g_i,$$

où g_i est une fonction appartenant à $L^2(\Omega_i)$. Donc pour tout $\mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i$, on a

$$\alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^n \cdot \nabla \mathbf{v}_i \longrightarrow \alpha_i(k_i) \nabla \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i, \text{ p.p dans } \Omega_i, \text{ et}$$

$$|\alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^n \cdot \nabla \mathbf{v}_i| \leq \|\alpha_i\|_{\infty} |g_i| |\nabla \mathbf{v}_i| \in L^1(\Omega_i).$$

Ceci implique que

$$\int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^n \cdot \nabla \mathbf{v}_i dx \longrightarrow \int_{\Omega_i} \alpha_i(k_i) \nabla \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i dx, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

- Montrons que $b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{n+1}) \longrightarrow b_i(\mathbf{v}_i, p_i)$, quand $n \rightarrow +\infty$. Nous avons montré que la suite $(p_i^n)_n$ converge fortement dans $L^2(\Omega_i)$ vers p_i , donc pour tout $\mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} - \int_{\Omega_i} p_i^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_i \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega_i} p_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i \, d\mathbf{x}.$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \kappa_i \left(|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \mathbf{v}_i \right)_{\Gamma} = \kappa_i \left(|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j), \mathbf{v}_i \right)_{\Gamma}$, en effet la trace de \mathbf{u}_i^n sur Γ est dans $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$, qui s'injecte dans $L^3(\Gamma)^d$, de façon compacte, donc quand $n \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{u}_i^n \longrightarrow \mathbf{u}_i, \text{ fortement dans } L^3(\Gamma)^d,$$

$$\implies |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \longrightarrow |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j), \text{ dans } L^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d \text{ fort.}$$

De plus, puisque $\forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i$, sa trace $\mathbf{v}_i|_{\Gamma} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ s'injecte dans $L^3(\Gamma)^d$, alors

$$\kappa_i \int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}) \mathbf{v}_i \, d\tau \longrightarrow \kappa_i \int_{\Gamma} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \mathbf{v}_i \, d\tau.$$

On en déduit que la limite (\mathbf{u}_i, p_i, k_i) vérifie l'équation de Stokes (2.3).

- Vérifions maintenant, que pour toute fonction $q_i \in L^2(\Omega_i)$, on a $b_i(\mathbf{u}_i, q_i) = 0$. On sait que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ satisfait la relation

$$b_i(\mathbf{u}_i^{n+1}, q_i) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbf{u}_i^n \longrightarrow \mathbf{u}_i, \text{ dans } \mathbf{H}^1 \text{ fort quand } n \rightarrow +\infty,$$

$$\implies \nabla \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{u}_i, \text{ dans } L^2 \text{ fort quand } n \rightarrow +\infty,$$

$$\implies \forall q_i \in L^2(\Omega_i), \quad 0 = \int_{\Omega_i} q_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} \, d\mathbf{x} \longrightarrow \int_{\Omega_i} q_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i \, d\mathbf{x} = 0.$$

Ceci termine la preuve de la première étape.

Deuxième étape : Énergie cinétique turbulente Cette étape consiste à montrer que (\mathbf{u}_i, p_i, k_i) satisfait l'équation de l'énergie cinétique turbulente (2.4), c'est-à-dire

$$\forall \varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i), \quad (\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i)_{\Omega_i} = (\alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i)_{\Omega_i}.$$

Pour cela, on prend une fonction test φ_i dans $\mathcal{D}(\Omega_i)$, l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compacte dans Ω_i , et montrons que

- $\left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i}$, et

- $\left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow \left(\alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i}$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

Faisons la différence $(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i)_{\Omega_i} - (\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i)_{\Omega_i}$. On obtient

$$\begin{aligned} \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1} - \gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} &= \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla (k_i^{n+1} - k_i), \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \\ &\quad + \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i)) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i}. \end{aligned}$$

- Montrons que $\left(\gamma_i(k_i^n) \nabla (k_i^{n+1} - k_i), \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla (k_i^{n+1} - k_i), \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \leq \|\gamma_i\|_{\infty} \|\nabla (k_i^{n+1} - k_i)\|_0 \|\nabla \varphi_i\|_0.$$

Or la suite $(k_i^n)_n$ converge fortement vers k_i , dans $H^1(\Omega_i)$, donc

$$\|\nabla (k_i^{n+1} - k_i)\|_0 \longrightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

et donc

$$\left(\gamma_i(k_i^n) \nabla (k_i^{n+1} - k_i), \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

- maintenant, vérifions que $\left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i)) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$.

En effet en appliquant le Théorème des accroissements finis à la fonction $\gamma_i(\cdot)$, et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\left| \left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i)) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \leq \|\gamma_i'\|_{\infty} \|k_i^n - k_i\|_0 \|\nabla k_i\|_0 \|\nabla \varphi_i\|_{\infty}.$$

Comme $\|k_i^n - k_i\|_0 \longrightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$, on a,

$$\left((\gamma_i(k_i^n) - \gamma_i(k_i)) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow 0,$$

soit

$$\left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i}, \forall \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i).$$

Soit $\varepsilon > 0$, tel que pour n supérieur à un certain n_0 , on ait

$$\forall \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i), \left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} - \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.27)$$

Soit maintenant $\varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega_i)$ est dense dans $W_0^{1,r}(\Omega_i)$, il existe une suite $(\varphi_i^m)_m \in \mathcal{D}(\Omega_i)$, telle que dès que m est supérieur à un certain m_0 , on a

$$\|\varphi_i^m - \varphi_i\|_{W_0^{1,r}(\Omega_i)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'injection canonique de $W_0^{1,r}(\Omega_i)$ dans $H_0^1(\Omega)$ étant continue, on peut écrire aussi

$$\|\varphi_i^m - \varphi_i\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{dès que } m \geq m_0. \quad (2.28)$$

Utilisons maintenant l'inégalité triangulaire suivante,

$$\begin{aligned} & \left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} - \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} - \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \quad + \left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} - \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \quad + \left| \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} - \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right|. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nous allons majorer chaque terme de la relation (2.29) par une quantité en ε .

- **Première ligne de (2.29).** La convergence de la suite $(k_i^n)_n$ implique qu'il existe une constante $M_1 > 0$, indépendante de n , telle que $\|\gamma_i\|_\infty \|\nabla k_i^{n+1}\|_0 \leq M_1$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} - \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \|\gamma_i\|_\infty \|\nabla k_i^{n+1}\|_0 \|\nabla(\varphi_i^m - \varphi_i)\|_0. \end{aligned}$$

Et d'après la relation (2.28),

$$\begin{aligned} & \left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} - \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\gamma_i\|_\infty \|\nabla k_i^{n+1}\|_0, \quad \text{pour } m \geq m_0, \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} M_1 \longrightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

- **Second terme de (2.29).** Pour ce, on utilise la relation (2.27), pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_i^m \in \mathcal{D}(\Omega_i)$,

$$\left| \left(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} - \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

- **Dernier terme de (2.29).** Comme pour le premier terme de (2.29), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et la relation (2.28),

$$\begin{aligned} & \left| \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} - \left(\gamma_i(k_i) \nabla k_i, \nabla \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \|\gamma_i\|_\infty \|\nabla k_i\|_0 \|\nabla(\varphi_i^m - \varphi_i)\|_0, \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\gamma_i\|_\infty \|\nabla k_i\|_0 \longrightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$\left(\gamma_i(k_i^n) \nabla(k_i^{n+1}), \nabla \varphi_i \right) \longrightarrow \left(\gamma_i(k_i) \nabla(k_i), \nabla \varphi_i \right), \quad \forall \varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i).$$

- $\left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow \left(\alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i}$, quand $n \rightarrow +\infty$. En effet en faisant la différence, on a

$$\begin{aligned} & \left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \left(\alpha_i(k_i^n) \left| |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i|^2 \right|, |\varphi_i| \right)_{\Omega_i} + \left(|\alpha_i(k_i^n) - \alpha_i(k_i)| |\nabla \mathbf{u}_i|^2, |\varphi_i| \right)_{\Omega_i}. \end{aligned}$$

En écrivant

$$|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - |\nabla \mathbf{u}_i|^2 = \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i),$$

et en appliquant le Théorème des accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \|\alpha_i\|_{\infty} \left(|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i)| (|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}| + |\nabla \mathbf{u}_i|), |\varphi_i| \right)_{\Omega_i} + \|\alpha'_i\|_{\infty} \left(|k_i^n - k_i| |\nabla \mathbf{u}_i|^2, |\varphi_i| \right)_{\Omega_i}. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} & \left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \|\alpha_i\|_{\infty} \|\varphi_i\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_0 \|\nabla \mathbf{u}_i\|_0 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i)\|_0 \\ & \quad + \|\alpha'_i\|_{\infty} \|\varphi_i\|_{\infty} \|k_i^n - k_i\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla \mathbf{u}_i\|_{L^3(\Omega_i)}^2, \end{aligned}$$

et enfin, on applique l'injection (1.9), de $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$ dans $L^6(\Omega_i)^d$. On obtient

$$\begin{aligned} & \left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \|\alpha_i\|_{\infty} \|\varphi_i\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_0 \|\nabla \mathbf{u}_i\|_0 \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i)\|_0 \\ & \quad + c_0 M^2 \|\alpha'_i\|_{\infty} \|\varphi_i\|_{\infty} \|k_i^n - k_i\|_{H^1(\Omega_i)}, \end{aligned}$$

la suite $(\mathbf{u}_i^{n+1})_n$ est convergente dans \mathbf{H}^1 fort, donc il existe une constante $c > 0$, telle que $\|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_0 \leq c$, pour $n \geq n_0$. De plus

$$\|k_i^n - k_i\|_{H^1(\Omega_i)} \longrightarrow 0, \quad \text{et} \quad \|\nabla(\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i)\|_0 \longrightarrow 0.$$

Donc, pour tout $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$,

$$\left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, tel que pour tout n supérieur à un certain n_0 , on ait

$$\left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.30)$$

Prenons $\varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i)$. Puisque $\mathcal{D}(\Omega_i)$ est dense dans $W_0^{1,r}(\Omega_i)$, il existe une suite $(\varphi_i^m)_m \in \mathcal{D}(\Omega_i)$, telle que dès que $m \geq m_0$, on a

$$\|\varphi_i^m - \varphi_i\|_{H_0^1(\Omega_i)} \leq \|\varphi_i^m - \varphi_i\|_{W_0^{1,r}(\Omega_i)} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.31)$$

Faisons apparaître φ_i^m dans la quantité $\left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right|$. Utilisons pour cela l'inégalité triangulaire suivante,

$$\begin{aligned} & \left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2, \varphi_i^m - \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \quad + \left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i^m \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \quad + \left| \left(\alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i^m - \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right|. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} & \left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \\ & \leq \|\alpha_i\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}\|_{L^3(\Omega_i)^d}^2 \|\varphi_i^m - \varphi_i\|_{L^3(\Omega_i)} + \frac{\varepsilon}{3} + \|\alpha_i\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{u}_i\|_{L^3(\Omega_i)^d}^2 \|\varphi_i^m - \varphi_i\|_{L^3(\Omega_i)}, \\ & \leq 2cM \|\varphi_i^m - \varphi_i\|_{H_0^1(\Omega_i)} + \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

où c est la constante de l'injection de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^3(\Omega_i)$. Soit

$$\left| \left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2 - \alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \right| \leq 2cM \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

On conclut alors

$$\left(\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i} \longrightarrow \left(\alpha_i(k_i) |\nabla \mathbf{u}_i|^2, \varphi_i \right)_{\Omega_i}, \quad \forall \varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i).$$

Troisième étape : Conditions aux limites sur Γ . Il reste à montrer que $k_i = \lambda |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$ sur Γ . Comme $(k_i^n)_n$ converge fortement vers k_i dans $H^1(\Omega_i)$ et comme l'opérateur trace est continue de $H^1(\Omega_i)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, k_i^n converge fortement vers k_i

dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

D'autre part, $k_i^n = \lambda|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2$ sur Γ , donc

$$\lambda|\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2 \longrightarrow k_i, \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ fort.}$$

Montrons maintenant que $k_i = \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Pour cela, on utilise l'inégalité triangulaire suivante

$$\begin{aligned} & \|\lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 - k_i\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ & \leq \|\lambda|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 - k_i\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\lambda|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\|\lambda|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \longrightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$. Utilisons l'identité suivante

$$\begin{aligned} & \|\lambda|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ & = \lambda \left\| \left[(\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_1) - (\mathbf{u}_2^n - \mathbf{u}_2) \right] \cdot \left[(\mathbf{u}_1^n + \mathbf{u}_1) - (\mathbf{u}_2^n + \mathbf{u}_2) \right] \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 7, la dernière équation implique, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & \|\lambda|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ & \leq \lambda \left\| (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_1) - (\mathbf{u}_2^n - \mathbf{u}_2) \right\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \left\| (\mathbf{u}_1^n + \mathbf{u}_1) - (\mathbf{u}_2^n + \mathbf{u}_2) \right\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon}, 3+\varepsilon}(\Gamma)^d}, \\ & \leq \lambda \left[\|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_2^n - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right] \\ & \quad \left[\|\mathbf{u}_1^n + \mathbf{u}_1\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon}, 3+\varepsilon}(\Gamma)^d} + \|\mathbf{u}_2^n + \mathbf{u}_2\|_{W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon}, 3+\varepsilon}(\Gamma)^d} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant respectivement, les injections continues des opérateurs traces de $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$ dans $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et de $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_1)^d$ dans $W^{1-\frac{1}{3+\varepsilon}, 3+\varepsilon}(\Gamma)^d$, on obtient

$$\begin{aligned} & \|\lambda|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ & \leq c_i^2 \lambda \left[\|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_1)} + \|\mathbf{u}_2^n - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_2)} \right] \\ & \quad \left[\|\mathbf{u}_1^n + \mathbf{u}_1\|_{W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_1)^d} + \|\mathbf{u}_2^n + \mathbf{u}_2\|_{W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_2)^d} \right]. \end{aligned}$$

Or, nous avons supposé que la suite $(\mathbf{u}_i^n)_n$ est bornée dans $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d$, et satisfait $\|\mathbf{u}_i^n\|_{W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d} \leq M$, donc

$$\begin{aligned} & \|\lambda|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ & \leq 4c_i^2 M \lambda \left(\|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_1)} + \|\mathbf{u}_2^n - \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_2)} \right). \end{aligned}$$

De plus, nous avons montré que $(\mathbf{u}_i^n)_n$ converge fortement vers \mathbf{u}_i dans $\mathbf{H}^1(\Omega_i)$, ce qui implique que

$$\|\lambda|\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n|^2 - \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

d'où l'égalité $k_i = \lambda|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2$, sur Γ .

On conclut alors que la limite de la suite $(\mathbf{u}_i^n, p_i^n, k_i^n)_n$ est une solution du problème (2.3)-(2.4). Ceci achève la preuve de ce Théorème. \square

Jusqu'à présent, nous avons montré que le schéma itératif (2.5)-(2.6), converge vers une limite qui est solution du problème variationnel (2.3)-(2.4). Il reste à vérifier que cette limite est unique sous les conditions du Théorème 9.

2.2.4 Unicité

Théorème 12 (Unicité). *Soit $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega_i)^d$ et soit $\mathbf{U}_i = (\mathbf{u}_i, p_i, k_i)$ une solution du problème (2.3)-(2.4). Si $\mathbf{U} \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times W^{1,3}(\Omega_i)$ et si ν est assez grand, au sens où pour une certaine constante c , qui ne dépend que de Ω_i , $\alpha_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$, λ et κ_i , la relation $K = \frac{c}{\nu} < 1$ est satisfaite, alors $\mathbf{U}_i = (\mathbf{u}_i, p_i, k_i)$ est l'unique solution du problème (2.3) – (2.4) dans l'espace $\mathbf{U} \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times W^{1,3}(\Omega_i)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une autre solution du problème (2.3)-(2.4) dans l'espace $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times W^{1,3}(\Omega_i)$, notons-la $\bar{\mathbf{U}}_i = (\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{p}_i, \bar{k}_i)$.

Montrons les relations suivantes

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2, \quad \text{et} \tag{2.32}$$

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\|_0^2 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2.$$

Pour ce faire, nous choisissons $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i$ comme fonction test dans (2.3). La différence des deux équations obtenues s'écrit, pour tout $1 \leq i \neq j \leq 2$,

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(\bar{k}_i) \nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i), \nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i) \right)_{\Omega_i} \\ & + \left((\alpha(k_i - \bar{k}_i)) \nabla \mathbf{u}_i, \nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i) \right)_{\Omega_i} \\ & + \kappa_i \left(|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j|(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) - |\bar{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_j|(\bar{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_j), \mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i \right)_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

En faisant la somme sur i , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\alpha(\bar{k}_i) \nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i), \nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i) \right)_{\Omega_i} + \sum_{i=1}^2 \left((\alpha(k_i - \bar{k}_i)) \nabla \mathbf{u}_i, \nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i) \right)_{\Omega_i} \\ & + \left(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - |\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2|(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2), (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - (\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2) \right)_{\Gamma} = 0, \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2, le terme suivant

$$\left(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - |\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2|(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2), (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - (\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2) \right)_{\Gamma} \geq 0,$$

est toujours positif, ceci entraîne que

$$\sum_{i=1}^2 \left(\alpha(\bar{k}_i) \nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i), \nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i) \right)_{\Omega_i} + \sum_{i=1}^2 \left((\alpha(k_i - \bar{k}_i)) \nabla \mathbf{u}_i, \nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i) \right)_{\Omega_i} \leq 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\|_0^2 &\leq \|\alpha'\|_{\infty} \sum_{i=1}^2 \|k_i - \bar{k}_i\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega_i)^d} \|\nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\|_0, \\ &\leq M \|\alpha'\|_{\infty} \sum_{i=1}^2 \|k_i - \bar{k}_i\|_{L^6(\Omega_i)} \|\nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\|_0, \\ &\leq M \|\alpha'\|_{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{2}{\nu} \|k_i - \bar{k}_i\|_{L^6(\Omega_i)}^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{\nu}{2} \|\nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\|_0^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\|_0^2 \leq \frac{2M c_0^2 c_p^2 \|\alpha'\|_{\infty}}{\nu} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2.$$

On obtient donc la seconde inégalité de la relation (2.32),

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\|_0^2 \leq \frac{4\|\alpha'\|_{\infty}^2 M^2 c_0^2 c_p^2}{\nu^2} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2. \quad (2.33)$$

Pour montrer que $k_i = \bar{k}_i$, nous utilisons la même technique que pour estimer

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k^{n+1} - k^n)\|_0^2.$$

Donc, en prenant $\varphi_i = k_i - \bar{k}_i - R_i(k_i - \bar{k}_i)$ comme fonction test de l'équation d'énergie cinétique turbulente, on trouve

$$\nu \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2 \leq \sum_{j=1}^7 I_j, \quad (2.34)$$

où,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=1}^2 \left| \left(\alpha_i(\bar{k}_i)(|\nabla \mathbf{u}_i|^2 - |\bar{\mathbf{u}}_i|^2), k_i - \bar{k}_i \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_2 &= \sum_{i=1}^2 \left| \left((\alpha_i(k_i) - \alpha_i(\bar{k}_i))|\nabla \mathbf{u}_i|^2, k_i - \bar{k}_i \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_3 &= \sum_{i=1}^2 \left| \left((\gamma_i(k_i) - \gamma_i(\bar{k}_i))\nabla k_i, \nabla(k_i - \bar{k}_i) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_4 &= \sum_{i=1}^2 \left| \left((\gamma_i(k_i) - \gamma_i(\bar{k}_i))\nabla k_i, \nabla R_i(k_i - \bar{k}_i) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_5 &= \sum_{i=1}^2 \left| \left(\alpha_i(\bar{k}_i)(|\nabla \mathbf{u}_i|^2 - |\nabla \bar{\mathbf{u}}_i|^2), R_i(k_i - \bar{k}_i) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_6 &= \sum_{i=1}^2 \left| \left((\alpha_i(k_i) - \alpha_i(\bar{k}_i))|\nabla \mathbf{u}_i|^2, R_i(k_i - \bar{k}_i) \right)_{\Omega_i} \right|, \\
I_7 &= \sum_{i=1}^2 \left| \left(\gamma_i(\bar{k}_i)\nabla(k_i - \bar{k}_i), \nabla R_i(k_i - \bar{k}_i) \right)_{\Omega_i} \right|.
\end{aligned}$$

Les estimations de ces termes se font de la même manière qu'auparavant. Si on désigne par δ , un réel strictement positif, alors les relations suivantes sont satisfaites

$$\forall j \in \{1, \dots, 7\}, \quad I_j \leq C_j^2 \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2 + \frac{\nu}{\delta} \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2, \quad (2.35)$$

où les C_j sont des constantes strictement positives ne dépendant que des données

Ω_i , $\alpha_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$, λ , κ_i et M . Les constantes C_j sont alors données par

$$\begin{aligned}
 C_1^2 &= \frac{4\delta M^4 c_0^4 c_p^4 \|\alpha\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2}, \\
 C_2^2 &= \frac{\delta M^4 c_0^2 c_p^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu}, \\
 C_3^2 &= \frac{\delta c_0^2 c_p^2 M^2 \|\gamma'\|_\infty^2}{\nu}, \\
 C_4^2 &= \frac{\delta c_R^2 c_0^2 c_p^4 M^2 \|\gamma'\|_\infty^2}{\nu}, \\
 C_5^2 &= \frac{4\delta M^4 c_0^4 c_p^4 c_R^2 \|\alpha\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2}, \\
 C_6^2 &= \frac{\delta M^4 c_0^4 c_p^4 c_R^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu}, \text{ et} \\
 C_7^2 &= \frac{32\delta M^4 \lambda^2 c_R^2 c_i^2 c_0^4 c_p^4 \|\gamma\|_\infty^2 \|\alpha'\|_\infty^2}{\nu^2}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

D'après les relations (2.34) et (2.35), on conclut que

$$\sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2 \leq K \sum_{i=1}^2 \|\nabla(k_i - \bar{k}_i)\|_0^2,$$

où $K = \sum_{j=1}^7 C_j^2$.

Donc, si on suppose que la viscosité ν est assez grande, alors $K < 1$, et donc $k_i = \bar{k}_i$. De plus, d'après la relation (2.33), $\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i$. Il reste à montrer que $p_i = \bar{p}_i$. Pour cela, nous utilisons le Théorème 5, pour tout $1 \leq i \leq 2$, on a

$$\beta_i \|p_i - \bar{p}_i\|_0 \leq \sup_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{X}_i} \frac{b_i(\mathbf{v}_i, p_i - \bar{p}_i)}{\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)}}.$$

Or

$$\begin{aligned}
 b_i(\mathbf{v}_i, p_i - \bar{p}_i) &= - \left(\alpha_i(k_i) \nabla \mathbf{u}_i - \alpha_i(\bar{k}_i) \nabla \bar{\mathbf{u}}_i, \nabla \mathbf{v}_i \right)_{\Omega_i} \\
 &\quad - \left(|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) - |\bar{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_j| (\bar{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_j), \mathbf{v}_i \right)_\Gamma.
 \end{aligned}$$

Comme $k_i = \bar{k}_i$ et $\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i$, alors

$$b_i(\mathbf{v}_i, p_i - \bar{p}_i) = 0, \implies p_i = \bar{p}_i.$$

D'où l'unicité de la solution dans l'espace $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times W^{1,3}(\Omega_i)$. \square

2.2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons généralisé les résultats obtenus dans le premier chapitre, en proposant un schéma itératif, dont la solution approche au mieux la solution du problème initial. Nous avons pu rendre l'étude de la convergence de l'algorithme associé au modèle du couplage océan/atmosphère, semblable à celle considérée dans le cas d'un seul fluide, ceci est dû au Lemme 2 qui nous a permis de découpler les équations.

L'unicité de la solution dans l'espace $W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i) \times W^{1,3}(\Omega_i)$ est aussi prouvée pour des viscosités assez grandes. Par conséquent, le schéma proposé converge vers la solution désirée.

Afin de réaliser des simulations numériques du couplage océan/atmosphère, nous avons développé et intégré un code écrit en C++ [69] dans le logiciel `freefem3d`. Ce code permet la résolution des équations aux dérivées partielles par une méthode spectrale.

Deuxième partie

**Résolution des EDP par un code
spectral**

Chapitre 3

Une méthode spectrale dans des domaines à géométries complexes

3.1 Rappels sur la méthode spectrale

Introduction

La méthode spectrale utilisée dans cette thèse repose sur l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles par les polynômes de Legendre et sur l'utilisation de bases tensorisées des espaces d'approximation. Pour ces raisons, le domaine de base de ces méthodes est construit par tensorisation. Les discrétisations spectrales sont obtenues par une méthode de GALERKIN avec intégration numérique. Pour évaluer les intégrales apparaissant dans la formulation variationnelle, on utilise des formules de quadrature. Pour plus de détails sur les méthodes spectrales, on se reportera à [13], [14], [21], [36], [59]...

Une grande partie de l'analyse numérique de cette méthode repose sur le fait que la base de polynômes est orthogonale. Nous avons choisi les polynômes de Legendre, dont on rappelle d'abord les principales propriétés.

3.1.1 Rappels sur les polynômes de Legendre

Définition 1. On appelle famille des polynômes de Legendre la famille $(L_n)_n$ de polynômes sur $]-1, 1[$, deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(]-1, 1[)$ et tels que, pour tout entier positif ou nul n , le polynôme L_n soit de degré n et vérifie : $L_n(1) = 1$.

On peut aussi définir les polynômes de Legendre comme étant les solutions d'une équation différentielle, voir [14].

Proposition 1 (Équation différentielle). Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme L_n vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{d\xi}((1 - \xi^2)L_n') + n(n + 1)L_n = 0.$$

Cette équation est à la base des techniques de discrétisation spectrale.

On donne une dernière définition des polynômes de Legendre, par une relation de récurrence qui sera utilisée dans la mise en œuvre de la méthode spectrale.

Proposition 2. *La famille des polynômes de Legendre $(L_n)_n$ est donnée par les relations*

$$\begin{aligned} L_0(\xi) &= 1 \quad \text{et} \quad L_1(\xi) = \xi, \\ (n+1)L_{n+1}(\xi) &= (2n+1)\xi L_n(\xi) - nL_{n-1}(\xi), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

À titre d'exemple, on représente les onze premiers polynômes de Legendre, évalués par la relation de récurrence donnée dans la Proposition 2, en figure 4.13.

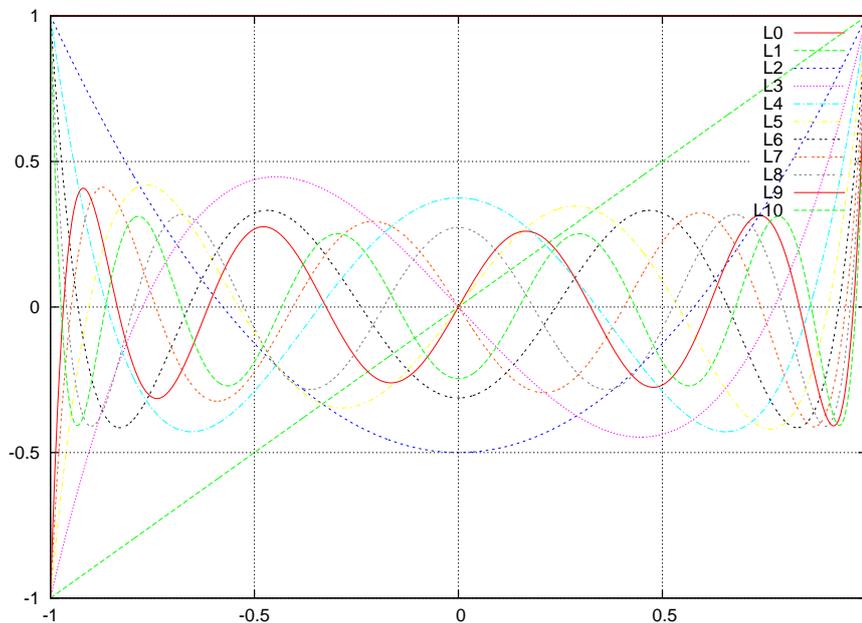


FIG. 3.1 – Les onze premiers polynômes de Legendre.

3.1.2 Intégration numérique

La construction des formules de quadrature numérique se base sur les zéros et les extrema des polynômes de Legendre en particulier et n'importe quelle famille de polynômes orthogonaux en general. Pour calculer numériquement les intégrales, nous avons utilisé les formules de quadrature de Gauss et de Gauss-Lobatto, qui sont exactes pour des polynômes de degré élevé, on réfère à [12], [28] et [29] pour leur analyse numérique complète. On désigne par $\mathbb{P}_k([-1, 1])$, k étant un entier positif, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k .

Dans la proposition suivante, on approche une intégrale sur $] - 1, 1[$ par la formule de quadrature de Gauss suivante.

Proposition 3 (Gauss). *Soit N un entier positif fixé. Il existe un unique ensemble de N points ξ_j de $] - 1, 1[$, $1 \leq j \leq N$, et un unique ensemble de N réels ω_j , $1 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme P de $\mathbb{P}_{2N-1}(] - 1, 1[)$*

$$\int_{-1}^1 P(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N P(\xi_j)\omega_j.$$

Remarque 3. *Les nœuds ξ_j , sont les zéros du polynôme L_N . Les poids ω_j , $1 \leq j \leq N$, sont positifs.*

La formule de quadrature que nous avons utilisée dans cette thèse diffère de celle citée au-dessus par le fait que les extrémités -1 et 1 de l'intervalle sont des nœuds de la formule, voir [14] (chapitre II, Lemme 3.4 et Lemme 3.5).

Proposition 4 (Gauss-Lobatto). *Soit N un entier positif fixé. On pose $\xi_0 = -1$ et $\xi_N = 1$. Il existe un unique ensemble de $N - 1$ points ξ_j de $] - 1, 1[$, $1 \leq j \leq N - 1$, et un unique ensemble de $N + 1$ réels ρ_j , $0 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme P de $\mathbb{P}_{2N-1}(] - 1, 1[)$*

$$\int_{-1}^1 P(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N P(\xi_j)\rho_j.$$

Les noeuds ξ_j , $1 \leq j \leq N - 1$, sont les zéros du polynôme L'_N . Les poids ρ_j , $0 \leq j \leq N$, sont positifs et ils sont donnés par la formule suivante,

$$\begin{aligned} \rho_0 = \rho_N &= \frac{2}{N(N+1)}, \\ \rho_j &= \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\xi_j)}, \quad \forall 1 \leq j \leq N-1. \end{aligned}$$

Le tableau 4.2, ci-dessous, représente les noeuds de Gauss-Lobatto et les poids associés, pour $N = 10$.

3.1.3 Erreur d'approximation polynômiale

Notations On pose $D =] - 1, 1[^d$.

– On note Π_N l'opérateur de projection de $L^2(D)$ sur $\mathbb{P}_N(D)$ pour le produit scalaire usuel de $L^2(D)$, définit par

$$\begin{aligned} \forall v \in L^2(D), \quad \Pi_N(v) &\in \mathbb{P}_N(D), \text{ et} \\ \forall w_N \in \mathbb{P}_N(D), \quad \int_D \Pi_N v w_N dx &= \int_D w_N v dx. \end{aligned}$$

$i =$	ξ_i	ρ_i
0	-1.000000	0.0181818
1	-0.934001	0.1096120
2	-0.784483	0.1871700
3	-0.565235	0.2480480
4	-0.295758	0.2868790
5	00.000000	0.3002180
6	0.2957580	0.2868790
7	0.5652350	0.2480480
8	0.7844830	0.1871700
9	0.9340010	0.1096120
10	1.0000000	0.0181818

TAB. 3.1 – Nœuds de Gauss-Lobatto (colonne de milieu) calculés par la méthode de dichotomie, et les poids associés (colonne de droite), pour $N = 10$.

- On note Π_N^1 l'opérateur de projection orthogonale de $H^1(D)$ sur $\mathbb{P}_N(D)$ pour le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_{H^1(D)}$, défini par

$$\forall v \in H^1(D), \quad \Pi_N^1 v \in \mathbb{P}_N^1(D), \quad \text{et}$$

$$\forall w_N \in \mathbb{P}_N(D), \quad \int_D \nabla(v - \Pi_N^1 v) \cdot \nabla w_N \, dx + \int_D (v - \Pi_N^1 v) \cdot w_N \, dx = 0.$$

Théorème 13. *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction $\varphi \in H^m(D)$, on ait*

$$\|\varphi - \Pi_N \varphi\|_{L^2(D)} \leq cN^{-m} \|\varphi\|_{H^m(D)}, \quad (3.1)$$

$$\|\varphi - \Pi_N^1 \varphi\|_{L^2(D)} \leq cN^{-m} \|\varphi\|_{H^m(D)}, \quad (3.2)$$

et

$$\|\varphi - \Pi_N^1 \varphi\|_{H^1(D)} \leq cN^{1-m} \|\varphi\|_{H^m(D)}. \quad (3.3)$$

La preuve de ce Théorème est donnée dans [14], (voir chapitre III, Théorème 1.2 pour $d = 1$, et chapitre III, Théorèmes 2.4 et 2.9 pour $d \geq 2$). Notons que pour $d \geq 2$, la preuve utilisée est basée sur un argument de tensorisation.

3.2 Méthode spectrale dans des domaines à géométries complexes

3.2.1 Description de la méthode

Dans ce chapitre, on propose une extension de la méthode spectrale dans un domaine quelconque Ω de \mathbb{R}^d . Une étude de la méthode est faite dans [14] (chapitre VI), où on s'intéresse aux cas

- où Ω est l'image du carré ou du cube par une transformation régulière, voir par exemple ORSZAG [26], et MADAY-RØNQUIST [56],
- où Ω est l'union de rectangles ou parallépipèdes rectangles, voir par exemple QUARTERONI-VALLI [66], et CANUTO-HUSSAINI-QUARTERONI-ZANG dans [23], [22] pour d'autres applications de cette méthode.

On se place tout d'abord dans un cadre abstrait permettant une analyse des problèmes variationnels et aux limites qui nous intéresseront par la suite.

Considérons donc deux espaces de Hilbert $H_0 \subset H$.

Soient a et ℓ deux formes, respectivement bilinéaire et linéaire, qui sont toutes deux continues sur H . De plus, a est coercive sur H_0 .

Les hypothèses du lemme de Lax-Milgram sont vérifiées, et donc, le problème

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in H_0, \quad & \text{telle que} \\ a(u, v) &= \ell(v) \quad \forall v \in H_0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

admet une solution unique.

Soit δ un paramètre de discrétisation. On approche l'espace H_0 par un sous-espace H_δ de dimension finie, définit par

$$H_\delta = \mathbb{P}_{N_x} \otimes \mathbb{P}_{N_y} \otimes \mathbb{P}_{N_z}, \quad (3.5)$$

où \mathbb{P}_{N_x} est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égales N_x dans la direction x , (de même pour \mathbb{P}_{N_y} et \mathbb{P}_{N_z}). On cherche alors la solution du problème discrétisé

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^\delta \in H_\delta, \quad & \text{telle que} \\ a(u^\delta, q) &= \ell(q), \quad \forall q \in H_\delta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (3.6) sont assurées par le lemme de Lax-Milgram.

3.2.2 Conditions aux limites naturelles

Considérons d'abord un problème aux limites de type ROBIN.

$$\begin{aligned} u - \Delta u &= f, & \text{dans } \Omega, \\ \alpha u + \partial_n u &= g, & \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Le problème (3.7) admet la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega), \text{ telle que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} u v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\partial\Omega} u v &= \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v. \end{aligned} \quad (3.8)$$

On approche le problème (3.8) par le problème suivant

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^\delta \in H_\delta, \text{ tel que} \\ \forall q \in H_\delta, \quad \int_{\Omega} u^\delta q + \int_{\Omega} \nabla u^\delta \cdot \nabla q + \alpha \int_{\partial\Omega} u^\delta q &= \int_{\Omega} f q + \int_{\partial\Omega} g q. \end{aligned} \quad (3.9)$$

La difficulté consiste à bien calculer les intégrales sur Ω et $\partial\Omega$. Pour calculer les intégrales sur Ω , on partitionne le domaine Ω en un nombre fini de parallélépipèdes, sur lesquels on utilise la formule de quadrature de Gauss-Lobatto. En ce qui concerne le calcul des intégrales sur le bord $\partial\Omega$, on crée un maillage de la surface par des triangles (par exemple), sur lesquels on utilise la formule de Gauss ad-hoc. Maintenant nous allons étudier les estimations erreurs *a priori*.

3.3 Estimations d'erreurs *a priori*

3.3.1 Erreur d'approximation polynômiale

Pour donner des estimations d'erreurs d'approximation polynômiale sur Ω , semblables à celles données dans le Théorème 13, nous avons besoin d'un Théorème de prolongement, que l'on trouve dans [38], (voir Théorème 7.25, page 170).

Théorème 14 (extension linéaire). *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^d , dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $C^{m-1,1}$, avec $m \geq 1$, et soit D un ouvert tel que $\bar{\Omega} \subset D$. Il existe alors un opérateur d'extension linéaire continu E de $H^m(\Omega)$ dans $H_0^m(D)$ tel que*

$$Ev|_{\Omega} = v, \quad \text{et} \\ \|Ev\|_{H^m(D)} \leq C(D, \Omega, m) \|v\|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall v \in H^m(\Omega).$$

Soient $\Pi_N^{1,\Omega}$ l'opérateur de projection de $H^1(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$, et Π_N^{Ω} l'opérateur de projection de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$.

Théorème 15. *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^d , dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $C^{m-1,1}$, avec $m \geq 1$, et soit $u \in H^m(\Omega)$, alors il existe une constante c , strictement positive, ne dépendant que de Ω et m , telle que*

$$\|u - \Pi_N^{\Omega} u\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad (3.10)$$

et

$$\|u - \Pi_N^{1,\Omega} u\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}. \quad (3.11)$$

Démonstration. Nous ne montrerons que la relation (3.11), l'autre relation s'obtient de la même manière.

Soit D un parallélépipède de \mathbb{R}^d , contenant strictement Ω , d'après le Théorème 14 d'extension linéaire, il existe un opérateur linéaire E , continu de $H^m(\Omega)$ dans $H_0^m(D)$, tel que

$$Eu|_{\Omega} = u, \quad \text{et} \\ \|Eu\|_{H^m(D)} \leq C(D, \Omega, m) \|u\|_{H^m(\Omega)}. \quad (3.12)$$

Soit $\Pi_N^{1,D}$ l'opérateur de projection de $H^1(D)$ sur $\mathbb{P}_N(D)$, alors on a

$$\begin{aligned} \|\Pi_N^{1,\Omega} u - u\|_{H^1(\Omega)} &= \|\Pi_N^{1,\Omega}(Eu) - Eu\|_{H^1(\Omega)}, \\ &\leq \|q - Eu\|_{H^1(\Omega)}, \quad (\forall q \in \mathbb{P}_N) \\ \implies \|\Pi_N^{1,\Omega} u - u\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|\Pi_N^{1,D}(Eu) - Eu\|_{H^1(\Omega)}, \quad (\text{pour } q = \Pi_N^{1,D}(Eu)) \\ &\leq \|\Pi_N^{1,D}(Eu) - Eu\|_{H^1(D)}, \quad (\text{car } \Omega \subset D). \end{aligned}$$

Comme $Eu \in H^m(D)$, et D est un parallélépipède de \mathbb{R}^d , les relations (3.2) et (3.3) du Théorème 13, entraînent qu'il existe une constante c_1 strictement positive, qui ne dépend que de m , telle que

$$\begin{aligned} \|\Pi_N^{1,D}(Eu) - Eu\|_{L^2(D)} &\leq c_1 N^{-m} \|Eu\|_{H^m(D)}, \quad \text{et} \\ \|\Pi_N^{1,D}(Eu) - Eu\|_{H^1(D)} &\leq c_1 N^{1-m} \|Eu\|_{H^m(D)}. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\Pi_N^{1,\Omega} u - u\|_{H^1(\Omega)} &\leq c_1 \sqrt{N^{-2m} + N^{2(1-m)}} \|Eu\|_{H^m(D)}, \\ &\leq 2c_1 N^{1-m} \|Eu\|_{H^m(D)}. \end{aligned}$$

Donc pour tout parallélépipède D , contenant strictement Ω , la relation (3.12) implique

$$\begin{aligned} \|\Pi_N^{1,\Omega}(u) - u\|_{H^1(\Omega)} &\leq 2C(D, \Omega, m) c_1 N^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \\ &\leq 2 \inf_{D \supset \Omega} C(D, \Omega, m) c_1 N^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \\ &\leq c N^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive, ne dépendant que de m et de Ω . \square

3.3.2 Estimations a priori

Soit A un opérateur elliptique de second ordre sur Ω , et soit B un opérateur d'ordre r ($r = 0$ ou 1) sur $\partial\Omega$, tels que

- A est de la forme

$$Au = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) u + a_0 u, \quad (3.13)$$

- et B est soit l'identité si $r = 0$, soit

$$Bu = b_0 u + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u, \quad (3.14)$$

sinon.

De plus, les a_{ij} et les b_i , vérifient les propriétés suivantes :

- a_{ij} et b_i sont des fonctions uniformément lipschitziennes,
- $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq d$, et il existe $\alpha > 0$, telle que

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (3.15)$$

- de plus, a_0 est une fonction positive, presque partout dans $\bar{\Omega}$,
- et $b_0 + \sum_{i=1}^d b_i n_i > 0$ sur $\partial\Omega$, où $n = (n_i)_{1 \leq i \leq d}$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$.

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{aligned} Au &= f && \text{dans } \Omega, \\ \gamma Bu &= g && \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où γ est l'opérateur trace sur $\partial\Omega$. On a le Théorème suivant, voir GRISVARD [41], Théorème 2.4.2.6.

Théorème 16. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d tel que $\partial\Omega$ est de classe $C^{1,1}$. Pour toutes fonctions $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, il existe une unique solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ du problème (3.16).*

On se place maintenant dans le cas particulier, où les fonctions b_i satisfont

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad \gamma b_i = \sum_{j=1}^d \gamma a_{ij} n_j, \quad \text{et} \quad \gamma b_0 \geq 0. \quad (3.17)$$

Ainsi, le problème (3.16) admet la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H^1(\Omega), \text{ telle que} \\ a(u, v) &= \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.18)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_0 uv + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} b_0 uv, \quad (3.19)$$

et

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v. \quad (3.20)$$

D'après les hypothèses (3.15) et (3.17), pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} a(u, v) &\leq \left(\sup_{x \in \Omega} |a_0(x)| + \max_{1 \leq i, j \leq d} \sup_{x \in \Omega} |a_{ij}(x)| + c^2 \sup_{x \in \Omega} |b_0(x)| \right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \text{ et} \\ \ell(v) &\leq \left(\|f\|_0 + \sup_{x \in \Omega} |b_0(x)| \|g\|_0 \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où c est la constante de continuité de l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. De plus, puisque a_0 est positive sur $\bar{\Omega}$, et b_0 est positive sur $\partial\Omega$, alors pour tout $u \in H^1(\Omega)$

$$\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u).$$

Les formes a et b sont donc continues, et en plus a est coercive. D'après le Lemme de Lax-Milgram, il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ du problème variationnel (3.18). Notons c_α et c'_α les normes de continuité et coercivité de la forme bilinéaire a , c'est-à-dire

$$c_\alpha = \inf_{u, v \in H^1(\Omega)} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}}, \quad \text{et}$$

$$c'_\alpha = \sup_{u \in H^1(\Omega)} \frac{|a(u, u)|}{\|u\|_{H^1(\Omega)}^2}.$$

On a donc les relations suivantes :

$$|a(u, v)| \leq c_\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.21)$$

et

$$a(u, u) \geq c'_\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.22)$$

On approche donc, le problème (3.18), par le problème discret suivant

$$a(u^\delta, q) = \ell(q), \quad \forall q \in H_\delta. \quad (3.23)$$

Puisque $H_\delta \subset H^1(\Omega)$, on choisit $v = q$ dans (3.18) et on retranche la formulation variationnelle au problème discret (3.23). On a donc

$$a(u - u^\delta, q) = 0, \quad \forall q \in H_\delta. \quad (3.24)$$

On peut interpréter ce problème en terme d'optimisation. u^δ , solution de (3.23), est aussi la solution du problème de minimisation suivant

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^\delta \in H_\delta, \text{ telle que,} \\ J(u^\delta) &= \min_{q \in H_\delta} J(q), \\ \text{où } J(q) &= a(u - q, u - q), \end{aligned} \quad (3.25)$$

et vérifie donc

$$a(u - u^\delta, u - u^\delta) \leq a(u - q, u - q), \quad \forall q \in H_\delta.$$

En particulier pour $q = \Pi_N^{1,\Omega} u$, la projection de u sur $H_\delta = \mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_N \otimes \mathbb{P}_N =$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal N dans chaque direction, on a

$$a(u - u^\delta, u - u^\delta) \leq a(\Pi_N^{1,\Omega} u - u^\delta, \Pi_N^{1,\Omega} u - u^\delta).$$

Donc

$$\|u - u^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{c_\alpha}{c'_\alpha} \|\Pi_N^{1,\Omega} u - u\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.26)$$

Théorème 17. *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^d , dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $C^{m-1,1}$, pour $m \geq 1$, (Ω est supposé convexe pour $m = 1$). Soient u la solution du problème (3.18), et u^δ celle de (3.23). Si $u \in H^m(\Omega)$, il existe une constante c , strictement positive, ne dépendant que de Ω , m et α , telle que*

$$\|u - u^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad (3.27)$$

et

$$\|u - u^\delta\|_0 \leq cN^{-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}. \quad (3.28)$$

Démonstration. L'estimation (3.27) est une conséquence directe de la relation (3.26) et du Théorème 15. Il reste à montrer (3.28). Pour cela, on utilise la méthode de dualité d'AUBIN-NITSCHÉ [62],

$$\|u - u^\delta\|_0 = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} g(x)(u - u^\delta)(x) dx}{\|g\|_0}. \quad (3.29)$$

Pour toute fonction $g \in L^2(\Omega)$, on considère la solution $w \in H^1(\Omega)$ du problème

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(w, v) = \int_{\Omega} g(x)v(x) dx. \quad (3.30)$$

Puisque Ω est de classe $C^{m-1,1}$, ou convexe si $m = 1$, la fonction $w \in H^2(\Omega)$ et vérifie

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\Omega)\|g\|_0. \quad (3.31)$$

Soit $w^\delta \in H_\delta$ la solution du problème

$$\forall q \in H_\delta, \quad a(w^\delta, q) = \int_{\Omega} w^\delta(x)q(x) dx. \quad (3.32)$$

D'après (3.24), pour tout $q \in H_\delta$

$$a(w - w^\delta, q) = 0. \quad (3.33)$$

Prenons $v = u - u^\delta$ dans l'équation (3.30), et utilisons la relation (3.24). On obtient

$$\int_{\Omega} g(x)(u - u^\delta)(x) dx = a(w - w^\delta, u - u^\delta).$$

Comme la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue, alors

$$\int_{\Omega} g(x)(u - u^\delta)(x) dx \leq c_\alpha \|w - w^\delta\|_{H^1(\Omega)} \|u - u^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

En appliquant la première inégalité (3.27) de ce Théorème, et la relation (3.31), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x)(u - u^\delta)(x) dx &\leq c_\alpha c^2 \left(N^{-1} \|w\|_{H^2(\Omega)} \right) \left(N^{1-m} \|u\|_{H^m(\Omega)} \right) \\ &\leq c(\Omega) c_\alpha c^2 N^{-m} \|u\|_{H^m(\Omega)} \|g\|_0. \end{aligned}$$

Donc, pour toute fonction $g \in L^2(\Omega)$, il existe une constante c , ne dépendant que de Ω , telle que

$$\frac{\int_{\Omega} g(x)(u - u^\delta)(x) dx}{\|g\|_0} \leq c N^{-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}. \quad (3.34)$$

Ce qui achève la démonstration de ce Théorème. \square

3.4 Problème aux limites de type Dirichlet

3.4.1 Pénalisation

Dans cette partie, nous considérons la prise en compte des conditions aux limites de type DIRICHLET par une technique de pénalisation. Cette technique est due à NITSCHKE au début des années 70, voir [63]. On peut aussi voir [45].

La pénalisation en volume est une technique souvent employée en mécanique des fluides, pour le traitement des obstacles. Pour imposer $u = 0$ dans $\omega \subset \Omega$, on ajoute un terme de type $\int_{\omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ aux équations de Navier-Stokes

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p = 0,$$

sous la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Cette technique est souvent utilisée pour des méthodes tensorielles (différences finies, par exemple) qui ne permettent pas une bonne approximation de la géométrie (voir [24] et [27]). On s'intéresse ici à un autre genre de pénalisation, (méthode de NITSCHKE [63]) non pas volumique, mais surfacique, qui revient dans le cas d'opérateur du second ordre à approcher une condition aux limites de type DIRICHLET par une condition de ROBIN,

$$\frac{1}{\varepsilon} u + \partial_n u = \frac{1}{\varepsilon} g, \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{remplace } u = g \text{ sur } \partial\Omega,$$

où ε est un réel positif, que l'on fera tendre vers 0. On réfère aux [3], [5] et [49], pour l'analyse mathématique de la méthode de pénalisation.

Dans ce qui suit on s'intéressera surtout aux problèmes de type DIRICHLET, puisque pour les conditions aux limites de ROBIN et NEUMANN l'opérateur n'est pas modifié et l'analyse est donc standard.

3.4.2 Problème abstrait

On considère le problème suivant

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{telle que} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.35)$$

où $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont deux formes, respectivement bilinéaire et linéaire, qui sont toutes deux continues sur $H_0^1(\Omega)$. De plus a est coercive.

La technique de pénalisation consiste à construire un autre problème aux limites, de la forme

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u_{\varepsilon} \in H^1(\Omega) \quad \text{telle que} \\ a_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) = \ell(v_{\varepsilon}) \quad \forall v_{\varepsilon} \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.36)$$

où $a_{\varepsilon}(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $H^1(\Omega)$.

Pour simplifier l'analyse, on s'intéresse au cas particulier

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.37)$$

On cherche donc $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (3.35), et $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ solution de (3.36), avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) &= a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon v, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\text{et} \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f v.$$

3.4.3 Estimations d'erreurs

Dans ce paragraphe, nous allons estimer l'erreur entre la solution du problème (3.35) et la solution du problème discrétisé

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u_\varepsilon^\delta \in H_\delta \quad \text{telle que} \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon^\delta, q) &= \ell(q) \quad \forall q \in H_\delta. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Pour cela, nous utilisons l'inégalité triangulaire suivante

$$\|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.40)$$

On sait que u_ε est la solution d'un problème aux limites de type Robin, et u_ε^δ est la solution du problème discret associé. Si en plus $u_\varepsilon \in H^m(\Omega)$, $m \geq 1$, alors on estime $\|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ grâce au Théorème 17. Il existe donc une constante c , ne dépendant que de m et Ω , telle que

$$\|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|u_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)}. \quad (3.41)$$

On va commencer par citer ce Théorème, voir par exemple [19], [50] et [57].

Théorème 18. *Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soient a et b , deux formes bilinéaires continues et positives telles que*

- $\ker a$ est un espace de dimension finie ;
- $\exists c > 0$ telle que $a(v, v) \geq c\|v\|^2$, $\forall v \in (\ker a)^\perp$;
- $\ker a \cap \ker b = \{0\}$.

Soit $\varepsilon > 0$, on définit alors la forme bilinéaire

$$a_\varepsilon = a + \frac{1}{\varepsilon} b.$$

Soit maintenant $f \in H'$ et soit $H_0 = \ker b$. On définit les deux problèmes suivants

$$\begin{aligned} \text{Trouver} \quad u \in H_0, \quad \text{tel que} \\ a(u, v) &= \langle f, v \rangle_{H', H} \quad \forall v \in H_0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \text{Trouver} \quad u_\varepsilon \in H, \quad \text{tel que} \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) &= \langle f, v \rangle_{H', H} \quad \forall v \in H. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Alors, les problèmes (3.42) et (3.43) sont bien posés, et la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement vers u quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Le résultat d'estimation d'erreur suivant est inspiré de BABUŠKA, dans [5]

Théorème 19. *Les problèmes (3.35) et (3.36) sont bien posés, et la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement vers u , quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et en plus nous avons l'estimation d'erreur suivante*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}, \quad (3.44)$$

où c est une constante indépendante de ε .

Démonstration. Vérifions tout d'abord les hypothèses du Théorème 18, dans notre cas.

- La dimension du $\ker a$ est finie. En effet, si $u \in \ker a$, alors $\|\nabla u\|_0 = 0$, donc u est une constante. On en déduit que $\ker a = \mathbb{R}$, donc de dimension 1.
- Soit $v \in \ker(a)^\perp$, donc $\int_\Omega u = 0$. Comme Ω est un ouvert borné connexe de classe C^1 , alors on peut utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir [17] chapitre IX, Commentaire A). Il existe donc une constante C telle que

$$\|u - \bar{u}\|_0 \leq C\|\nabla u\|_0 \quad \text{avec} \quad \bar{u} = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega u.$$

Mais $\bar{u} = 0$, donc

$$\|u\|_0^2 \leq C^2\|\nabla u\|_0^2, \quad \text{et aussi} \quad \|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2 \leq (1 + C^2)\|\nabla u\|_0^2.$$

On conclut alors qu'il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout u dans $(\ker a)^\perp$, on a

$$a(u, u) \geq \frac{1}{1 + C^2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

d'où la coercivité de la forme a .

- $\ker a \cap \ker b = \{0\}$. En effet, soit ξ une constante appartenant à $\ker b$. Donc elle vérifie $\int_{\partial\Omega} \xi^2 = 0$. Comme la mesure de $\partial\Omega$ est strictement positive, alors $\xi = 0$.

Toutes les hypothèses du Théorème 18 sont vérifiées. Donc la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement vers u , quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Il reste à prouver l'estimation (3.44). On cherche donc $u \in H_0^1(\Omega)$, telle que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

□

Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on peut aussi écrire

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u v = \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.45)$$

En faisant la différence entre la relation (3.45) et (3.36), on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla(u - u_{\varepsilon}) \cdot \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} (u - u_{\varepsilon}) v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En choisissant $v = u - u_{\varepsilon}$, on obtient

$$\begin{aligned} |u - u_{\varepsilon}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u - u_{\varepsilon}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} (u - u_{\varepsilon}), \\ &= \int_{\partial\Omega} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u - u_{\varepsilon}). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, il vient

$$|u - u_{\varepsilon}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u - u_{\varepsilon}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|u - u_{\varepsilon}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2,$$

soit

$$|u - u_{\varepsilon}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u - u_{\varepsilon}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2, \quad (3.46)$$

pour un ε assez petit ($\varepsilon < \frac{1}{2}$), on a

$$|u - u_{\varepsilon}|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u - u_{\varepsilon}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2. \quad (3.47)$$

Pour conclure, on applique l'inégalité suivante, qui est une variante de l'inégalité de Poincaré.

Proposition 5 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , il existe une constante $C(\Omega)$ réelle, strictement positive, ne dépendant que de Ω , telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a l'inégalité*

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \geq C(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.48)$$

On a aussi l'estimation suivante

Théorème 20. *Soient u et u_{ε} les solutions des problèmes (3.35) et (3.36). Il existe alors une constante c , ne dépendant que du domaine Ω , telle que l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|u - u_{\varepsilon}\|_0 \leq c\varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}. \quad (3.49)$$

Remarque 4. *Pour ce Théorème, il suffit que Ω soit convexe ou que $\partial\Omega$ soit de classe $C^{1,1}$.*

Démonstration. Pour la preuve de ce Théorème, on utilise la méthode de dualité d'AUBIN-NITSCHÉ [62],

$$\|u - u_\varepsilon\|_0 = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (u - u_\varepsilon)(x)g(x) dx}{\|g\|_0}. \quad (3.50)$$

Pour toute fonction $g \in L^2(\Omega)$, on considère la solution w dans $H_0^1(\Omega)$ du problème

$$\begin{aligned} -\Delta w &= g && \text{dans } \Omega, \\ w &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Cette solution vérifie la formulation variationnelle suivante

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} g(x)v(x) dx. \quad (3.52)$$

Puisque Ω est convexe ou $\partial\Omega$ est de classe $C^{1,1}$, la fonction w appartient à $H^2(\Omega)$ et vérifie

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\Omega)\|g\|_0. \quad (3.53)$$

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, l'équation (3.52) s'écrit,

$$\int_{\Omega} \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} g(x)v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w(s)}{\partial n} v(s) ds, \quad (3.54)$$

en particulier pour $v = u - u_\varepsilon$, on a

$$\int_{\Omega} \nabla w(x) \cdot \nabla (u - u_\varepsilon)(x) dx = \int_{\Omega} g(x)(u - u_\varepsilon)(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w(s)}{\partial n} (u - u_\varepsilon)(s) ds. \quad (3.55)$$

D'autre part, u et u_ε sont les solutions des problèmes (3.35) et (3.36). En prenant $v = w$ dans (3.35) et (3.36), on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx = \int_{\Omega} f(x)w(x) dx, \quad (3.56)$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla w(x) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} w(s) u_\varepsilon(s) ds = \int_{\Omega} f(x)w(x) dx.$$

Comme $w \in H_0^1(\Omega)$, la dernière équation devient

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla w(x) dx = \int_{\Omega} f(x)w(x) dx. \quad (3.57)$$

La différence des deux relations (3.56) et (3.57), donne

$$\int_{\Omega} \nabla (u - u_\varepsilon)(x) \cdot \nabla w(x) dx = 0. \quad (3.58)$$

Ainsi, d'après (3.55), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x)(u - u_{\varepsilon})(x) dx &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w(s)}{\partial n} (u - u_{\varepsilon})(s) ds, \\ &\leq \left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u - u_{\varepsilon}\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après la relation (3.46), on a aussi l'estimation de $\|u - u_{\varepsilon}\|_{L^2(\partial\Omega)}$,

$$\|u - u_{\varepsilon}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}, \quad (3.59)$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x)(u - u_{\varepsilon})(x) dx &\leq \varepsilon \left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}, \\ &\leq \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après [41], (voir Théorème I.2.19), il existe une constante $c'(\Omega)$, ne dépendant que de Ω , telle que

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c'(\Omega) \|w\|_{H^2(\Omega)}.$$

De plus, d'après la relation (3.53), la dernière inégalité devient

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c'(\Omega) c(\Omega) \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc pour toute fonction $g \in L^2(\Omega)$, on a

$$\frac{\int_{\Omega} g(x)(u - u_{\varepsilon})(x) dx}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} \leq C(\Omega) \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

On conclut alors qu'il existe une constante c , ne dépendant que de Ω , telle que

$$\|u - u_{\varepsilon}\|_0 \leq c\varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Ceci achève la preuve de ce Théorème. \square

Les estimations d'erreur entre la solution du problème (3.35) et le problème discret (3.39) sont données dans le Théorème suivant

Théorème 21. Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^d , dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $C^{m-1,1}$, avec $m \geq 1$, et soient u la solution du problème (3.35), et u_ε^δ celle du (3.39). Si $u \in H^m(\Omega)$, alors il existe une constante c , strictement positive, ne dépendant que de Ω et de m , telle que

$$\|u - u_\varepsilon^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(N^{1-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \right), \quad (3.60)$$

et

$$\|u - u_\varepsilon^\delta\|_0 \leq c \left(N^{-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \right). \quad (3.61)$$

Démonstration. Commençons par montrer que si $u \in H^m(\Omega)$, alors forcément la solution du problème (3.36), u_ε est dans $H^m(\Omega)$. Cela provient du fait que $-\Delta u_\varepsilon = f$, dans Ω , avec les conditions de Robin sur le bord $\partial\Omega$, qui est de classe $C^{m-1,1}$, et $f \in H^{m-2}(\Omega)$, $m \geq 2$. D'après les estimations (3.27), (3.28), et les Théorèmes 17, 19 et 20, il existe deux constantes c et c_1 indépendantes de ε , telles que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}, \text{ et} \\ \|u_\varepsilon^\delta - u\|_0 &\leq \|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_0 + \|u_\varepsilon - u\|_0. \end{aligned}$$

donc

$$\|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{1-m} \|u_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)} + c_1\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}, \quad (3.62)$$

et

$$\|u_\varepsilon^\delta - u\|_0 \leq cN^{-m} \|u_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)} + c_1\varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}. \quad (3.63)$$

On est donc ramené à estimer $\|u_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)}$. Pour cela nous allons utiliser GRISVARD [41], voir Remarque 2.5.1.2.

Remarque 5. Soient A et B les opérateurs définis dans la section 3.3.2, si de plus

- le bord $\partial\Omega$ de Ω est de classe $C^{m+1,1}$,
- $a_{ij} = a_{ji} \in C^{m,1}(\bar{\Omega})$, $b_i \in C^{m,1}(\bar{\Omega})$,

alors l'application

$$u \longrightarrow (Au, \gamma Bu)$$

est un isomorphisme de $W^{m+2,p}(\Omega)$ vers $W^{m,p}(\Omega) \times W^{m+1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Donc il existe une constante c' telle que

$$\|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq c' (\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} + \|g\|_{W^{m+1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)}). \quad (3.64)$$

En appliquant cette remarque à notre cas, $g = 0$ et $p = 2$, on obtient

$$\|u_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)} \leq c' \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)}.$$

D'après les relations (3.62) et (3.63), on a

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^1(\Omega)} &\leq c'cN^{1-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + c_1\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}, \text{ et} \\ \|u_\varepsilon^\delta - u\|_0 &\leq c'cN^{-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + c_1\varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

On conclut alors, qu'il existe une constante notée encore c , strictement positive ne dépendant que de Ω et de m , telle que

$$\|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(N^{1-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \right), \quad \text{et}$$

$$\|u_\varepsilon^\delta - u\|_0 \leq c \left(N^{-m} \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \right).$$

□

Ceci achève la preuve.

3.4.4 Évaluation des intégrales numériques

L'analyse numérique de la convergence de la méthode proposée repose sur le calcul exact des intégrales. On propose donc d'évaluer les intégrales de volume, puis de surface comme suit.

Intégrale numérique de volume

Étant donné un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^3 , il existe une famille $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de parallélépipèdes de \mathbb{R}^3 , telle que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i, \quad \text{et}$$

$$D_i \cap D_j = \emptyset \quad \text{pour } i \neq j.$$

Considérons par exemple, le problème variationnel suivant. Pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad (3.65)$$

on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{D_i} \nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{D_i} f v.$$

L'idée est d'approcher Ω par $\bigcup_{i=1}^M D_i$, et écrire

$$\sum_{i=1}^M \int_{D_i} \nabla u_M \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^M \int_{D_i} f v.$$

Ainsi, les intégrales $\int_{D_i} \nabla u_M \cdot \nabla v$ et $\int_{D_i} f v$ sont calculées avec la formule de Gauss-Legendre.

Comme le recouvrement par des pavés de Ω n'est pas unique, nous utilisons un algorithme de type *octree* pour découper le domaine Ω , voir la figure 3.2.

La figure 3.2 représente un domaine Ω inclu dans un parallélépipède D , on maille le domaine D . La partie en bleu désigne les mailles conservées, qui sont telles que $D \cap \Omega = D$. Celles qui sont à l'extérieur de Ω ($D \cap \Omega = \emptyset$), sont exclues. Les mailles restantes ($D \cap \Omega \neq \emptyset$ et $D \cap \Omega \neq D$) sont coupés en 8 parallélépipèdes identiques pour lesquels on applique à nouveau le processus (voir algorithme 1).

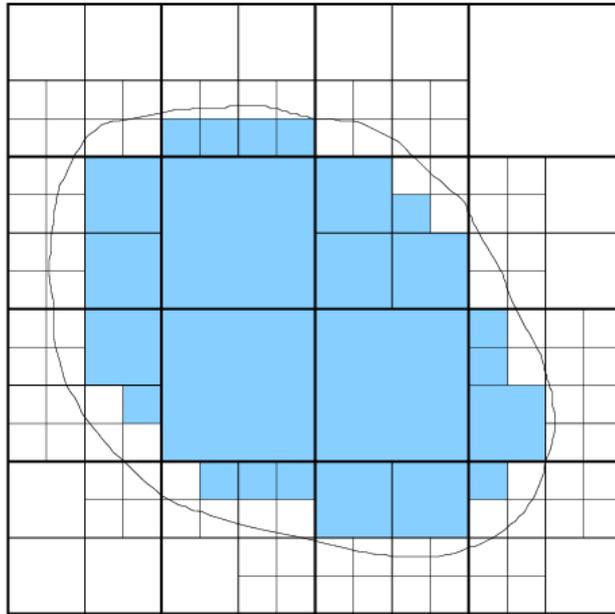


FIG. 3.2 – Exemple de partition d'un domaine Ω à l'aide d'un algorithme de type *octree*.

Intégrale numérique de surface

Pour évaluer les intégrales à la surface $\partial\Omega$, on crée un maillage en triangles de $\partial\Omega$, nous utilisons la méthode *marching tetrahedra* (voir [30]). On approche donc

$$\partial\Omega \text{ par } \cup_{i=1}^M T_i,$$

où $(T_i)_{1 \leq i \leq M}$ sont les mailles (triangles), vérifiant

$$T_i \cap T_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Algorithme 1 Octree.

On se donne Ω ouvert borné de \mathbb{R}^3 ,
 Ω_h^0 parallélépipède de \mathbb{R}^3 , tel que $D^0 \supseteq \Omega$.
 $\xi = \{\text{mailles gardées}\}$

répéter

(*) décomposition de D^N en plusieurs mailles $\implies D^N = \cup_{i=1}^8 D_i^{N+1}$
 si $D_i^{N+1} \cap \Omega = \emptyset$ on fait rien,
 si $D_i^{N+1} \cap \Omega = D_i^{N+1}$, on ajoute D_i^{N+1} dans ξ ,
 si

$$\begin{aligned} D_i^{N+1} \cap \Omega &\neq \emptyset, \\ D_i^{N+1} \cap \Omega &\neq D_i^{N+1}, \\ N &< N_{max}, \quad \text{et} \quad \xi \neq \Omega, \end{aligned}$$

faire(*) avec $D^N = D_i^{N+1}$

jusqu'à $N = N_{max}$, ou $\xi \supseteq \Omega$.

Ensuite, on approche

$$\int_{\partial\Omega} f \quad \text{par} \quad \sum_{i=1}^M \int_{T_i} f, \quad \text{pour toute fonction } f,$$

enfin, en utilisant une formule de Gauss, on évalue chaque intégrale $\int_{T_i} f$, pour $1 \leq i \leq M$,
 ce qui permet de calculer numériquement l'intégrale à la surface $\partial\Omega$.

Chapitre 4

Validation et implémentation

Dans cette thèse, nous avons mis en œuvre la méthode spectrale dans le logiciel `freefem3d`, voir <http://www.freefem.org/ff3d> et [32]. Dans ce chapitre, nous validons le code écrit, puis nous donnons quelques détails d'implémentation liés à l'architecture du code.

Remarque 6. *Le code a été écrit en 3D, mais on peut l'utiliser pour faire des calculs en 2D. Pour cela, on remplacera le domaine Ω de \mathbb{R}^2 par un domaine de type $\Omega \times]a, b[$, où $a \neq b$, et on prendra le degré de polynôme de Legendre égal à 0 dans la direction de z .*

4.1 Domaines tensoriels

4.1.1 Équations de Laplace

Conditions aux limites de Dirichlet pour un système d'équations

On s'intéresse au système d'équations suivant

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\Omega =]-2, 1[\times]1, 2[\times]-1, 0[$, et les fonctions $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ et $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ sont telles que, pour tout $(x, y) \in \Omega$, on ait

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 3\pi^2 \sin(\pi(x + y + z)), \\ f_2(x, y, z) &= \cos(\pi(x + y + z)) - 2\pi(x + y) + 3\pi^2 z + \sin(\pi(x + y + z))(3\pi^2 xy + 2\pi), \end{aligned}$$

et pour tout $(x, y) \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= \sin(\pi(x + y + z)), \\ g_2(x, y, z) &= xy \sin(\pi(x + y + z)) + z \cos(\pi(x + y + z)). \end{aligned}$$

La solution analytique de ce système est $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, telle que pour tout $(x, y) \in \Omega$, on ait

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sin(\pi(x + y + z)), \\ u_2(x, y) &= xy \sin(\pi(x + y + z)) + z \cos(\pi(x + y + z)). \end{aligned}$$

Le coefficient de pénalisation ε , que nous avons pris pour réaliser le test numérique est $\varepsilon = 10^{-7}$, le programme `freefem3d` utilisé pour résoudre ce problème est le suivant.

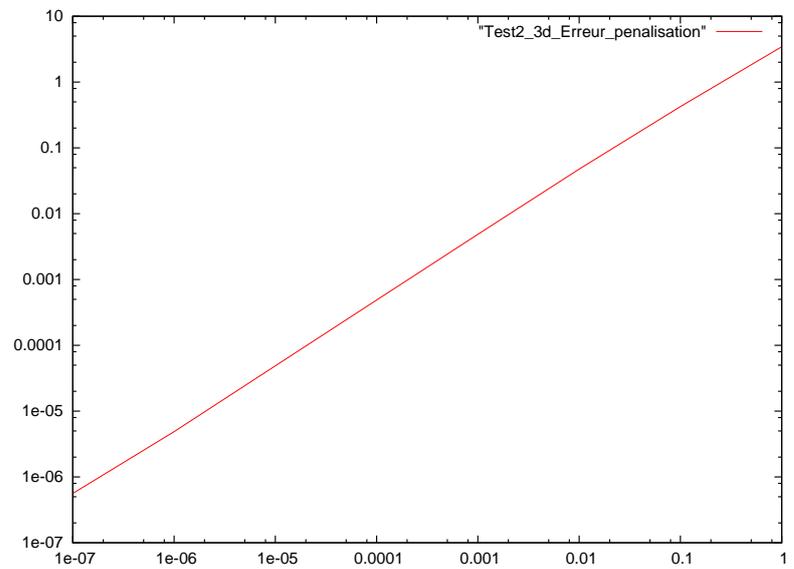
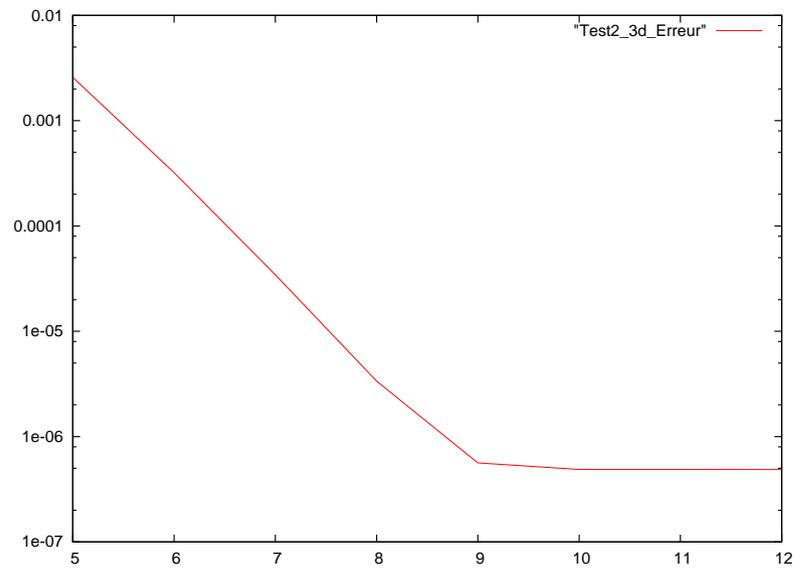
```

1 // -*- c++ -*-
2 vector a = (-2,1,-1);
3 vector b = ( 1,2, 1);
4 vector n = (5,5,5);
5 double pi= acos(-1.);
6 double Eps= 1E-7;
7 function rr      = pi*(x+y+z);
8 function u1exact = sin(rr);
9 function u2exact = x*y*sin(rr)+ z*cos(rr);
10 function f1     = 3*pi^2*sin(rr);
11 function f2     = cos(rr)*(-2*pi*(x+y) +3*pi^2*z)
12                 + sin(rr)*(3*pi^2* x*y + 2*pi);
13 ofstream fout = ofstream("Test2_3d_Erreur");
14 double i=0;
15 mesh M = spectral(n,a,b);
16 sfunction u1(M);
17 sfunction u2(M);
18 do {
19   solve(u1,u2) in M
20     cg(epsilon=1E-50,maxiter=12000)
21     {
22       test(v1,v2)
23         int(grad(u1)*grad(v1)) + int(grad(u2)*grad(v2))
24         + int[0,1,2,3,4,5](1./Eps*u1*v1)
25         + int[0,1,2,3,4,5](1./Eps*u2*v2)
26         = int(f1*v1) + int(f2*v2)
27         + int[0,1,2,3,4,5](1./Eps*u1exact*v1)
28         + int[0,1,2,3,4,5](1./Eps*u2exact*v2);
29     }
30   save(vtk,"Test2-2d",{u1,u2,u1exact,u2exact},M);
31   double l2error = sqrt(int[M]((u1-u1exact)^2 + (u2-u2exact)^2));
32   fout << x(n)
33         << " " << l2error <<"\n";
34   n = n+(1,1,1);
35   i++;
36 } while(i<8);

```

On remarque que l'erreur en norme L^2 à l'échelle logarithmique, décroît exponentiellement de $N = 5$ à $N = 9$. À partir de $N = 9$, c'est l'erreur d'approximation des conditions de Dirichlet par Robin qui devient dominante.

La tableau 4.1 montre que le taux de convergence tend vers 1, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui est compatible avec la relation (3.61).



Conditions aux limites de Neumann dans le cas scalaire

On résout ici le problème

$$\begin{aligned}
 u - \Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) &= -2\pi \sin(\pi(1 + y^2 + z^2)) \quad \text{sur } \Gamma_1, \\
 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_2, \\
 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) &= -2\pi \sin(\pi(1 + x^2 + z^2)) \quad \text{sur } \Gamma_3, \\
 \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_4,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Paramètre de pénalisation ε	Erreur $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{1exact}\ _0$	Taux de convergence
10^0	3.44613000	—
10^{-1}	0.423240000	—
10^{-2}	0.047623300	0.90568
10^{-3}	0.004860680	0.94368
10^{-4}	0.000487180	0.99024
10^{-5}	4.87285e-05	0.99891
10^{-6}	4.87945e-06	0.99996
10^{-7}	5.62129e-07	1.00670

TAB. 4.1 – Erreur en norme L^2 en fonction de ε (colonne de milieu), ainsi que le taux de convergence(colonne de droite).

où

- $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\times]0, 1[$,
- $\Gamma_0 = \{(0, y, z) \text{ tel que } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$,
- $\Gamma_1 = \{(1, y, z) \text{ tel que } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$,
- $\Gamma_2 = \{(x, 0, z) \text{ tel que } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$,
- $\Gamma_3 = \{(x, 1, z) \text{ tel que } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$,
- $\Gamma_4 = \{(x, y, 0) \text{ tel que } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$,
- $\Gamma_5 = \{(x, y, 1) \text{ tel que } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$,

La fonction f est telle que pour tout $(x, y, z) \in \Omega$

$$f(x, y, z) = \cos(\pi(x^2 + y^2 + z^2))[1 + 4\pi^2(x^2 + y^2 + z^2)] + 6\pi \sin(\pi(x^2 + y^2 + z^2)),$$

La solution analytique du problème (4.2) est

$$u(x, y) = \cos(\pi(x^2 + y^2 + z^2)), \quad \forall (x, y, z) \in \Omega.$$

Le programme `freefem3d` utilisé pour résoudre ce problème est le suivant.

C1 Neumann

```

1 // -*- c++ -*-
2 vector a = (0,0,0);
3 vector b = (1,1,1);
4 vector n = (7,7,7);
5 double pi= acos(-1.);
6 function rr      = pi*(x^2+y^2+z^2);
7 function uexact = cos(rr) ;
8 function      f = cos(rr)*(1+4*pi*rr) + 6*pi*sin(rr);
9 ofstream fout = ofstream("test3_3d_Erreur");
10 double i=0;
11 do {
12     n = n+ (1,1,1);
13     mesh M = spectral(n,a,b);
14     sfunction u(M);

```

```

15 solve(u) in M
16   cg(epsilon=1E-150, maxiter=3000)
17   {
18     test(v)
19       int(u*v)+ int(grad(u)*grad(v))
20       = int(f*v)
21       + int[1](-2*pi*sin(pi*(1+y^2+z^2))*v)
22       + int[3](-2*pi*sin(pi*(1+x^2+z^2))*v)
23       + int[5](-2*pi*sin(pi*(1+x^2+y^2))*v);
24   }
25   save(vtk,"test3_2d_Neum-scalar",{u,uexact},M);
26
27   double l2error = sqrt(int[M]((u-uexact)^2));
28   fout << x(n)
29     << " " << l2error <<"\n";
30   i++;
31
32 } while(i<9);

```

La courbe 4.1, montre que l'erreur $\|u - u_{exacte}\|_0$, à l'échelle logarithmique, entre la solution exacte et la solution approchée décroît exponentiellement en fonction des degrés des polynômes. Le figure 4.2 représente la solution approchée, calculée en prenant $N = 17$.

4.1.2 Équation de Stokes

Une solution analytique d'une équation de Stokes

On considère l'équation de Stokes suivante

$$\begin{aligned}
 -\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} p &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\
 (u_1, u_2, u_3)(x, y, z) &= (\sin(\pi(y+z)), \sin(\pi(y+z)), \sin(\pi(y+z))) \quad \text{sur } \Gamma_0, \\
 (u_1, u_2, u_3)(x, y, z) &= (\sin(\pi(1+y+z)), \sin(\pi(1+y+z)), \sin(\pi(1+y+z))) \quad \text{sur } \Gamma_1, \\
 (u_1, u_2, u_3)(x, y, z) &= (\sin(\pi(x+z)), \sin(\pi(x+z)), \sin(\pi(x+z))) \quad \text{sur } \Gamma_2, \\
 (u_1, u_2, u_3)(x, y, z) &= (\sin(\pi(1+x+z)), \sin(\pi(1+x+z)), \sin(\pi(1+x+z))) \quad \text{sur } \Gamma_3, \\
 (u_1, u_2, u_3)(x, y, z) &= (\sin(\pi(x+y)), \sin(\pi(x+y)), \sin(\pi(x+y))) \quad \text{sur } \Gamma_4, \\
 (u_1, u_2, u_3)(x, y, z) &= (\sin(\pi(x+y+1)), \sin(\pi(x+y+1)), \sin(\pi(x+y+1))) \quad \text{sur } \Gamma_5.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

où

- $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\times]0, 1[$,
- $\Gamma_0 = \{(0, y, z) \text{ tel que } 0 \leq y, z \leq 1\}$,
- $\Gamma_1 = \{(1, y, z) \text{ tel que } 0 \leq y, z \leq 1\}$,
- $\Gamma_2 = \{(x, 0, z) \text{ tel que } 0 \leq x, z \leq 1\}$,
- $\Gamma_3 = \{(x, 1, z) \text{ tel que } 0 \leq x, z \leq 1\}$,

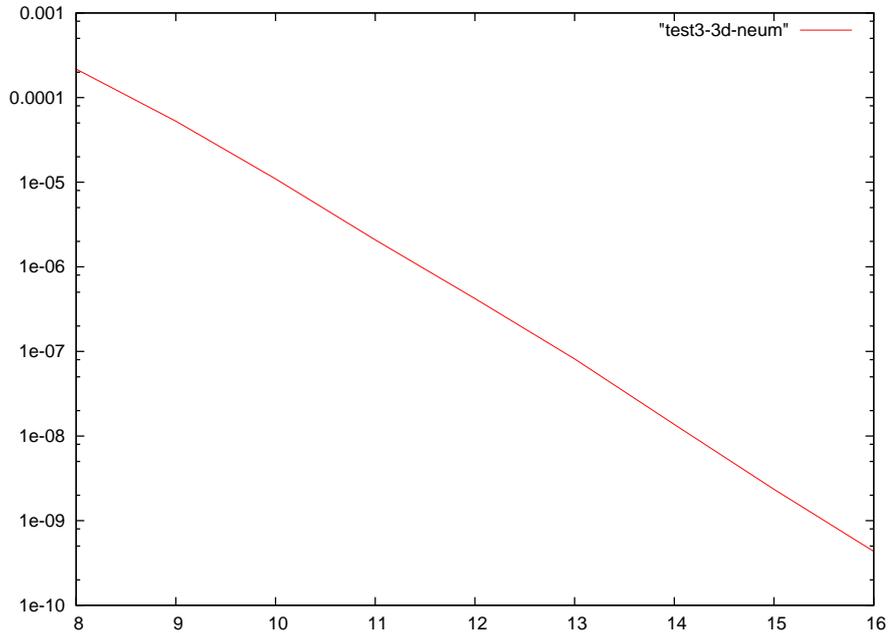


FIG. 4.1 – Erreur en norme L^2 (échelle logarithmique) en fonction de N .

- $\Gamma_4 = \{(x, y, 0) \text{ tel que } 0 \leq x, y \leq 1\}$,
- $\Gamma_5 = \{(x, y, 1) \text{ tel que } 0 \leq x, y \leq 1\}$,
- $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, tel que pour tout $(x, y, z) \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 3\pi^2 \sin(\pi(x + y + z)) - \pi \sin(\pi x), \\ f_2(x, y, z) &= 3\pi^2 \sin(\pi(x + y + z)) + \pi \sin(\pi y), \\ f_3(x, y, z) &= -6\pi^2 \sin(\pi(x + y + z)) + 6z - 2. \end{aligned}$$

La solution analytique du problème (4.3) est

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= (u_1, u_2, u_3)(x, y, z) \\ &= (\sin(\pi(x + y + z)), \sin(\pi(x + y + z)), -2\sin(\pi(x + y + z))), \\ \text{et } p(x, y, z) &= \cos(\pi x) - \cos(\pi y) + 3z^2 - 2z. \end{aligned}$$

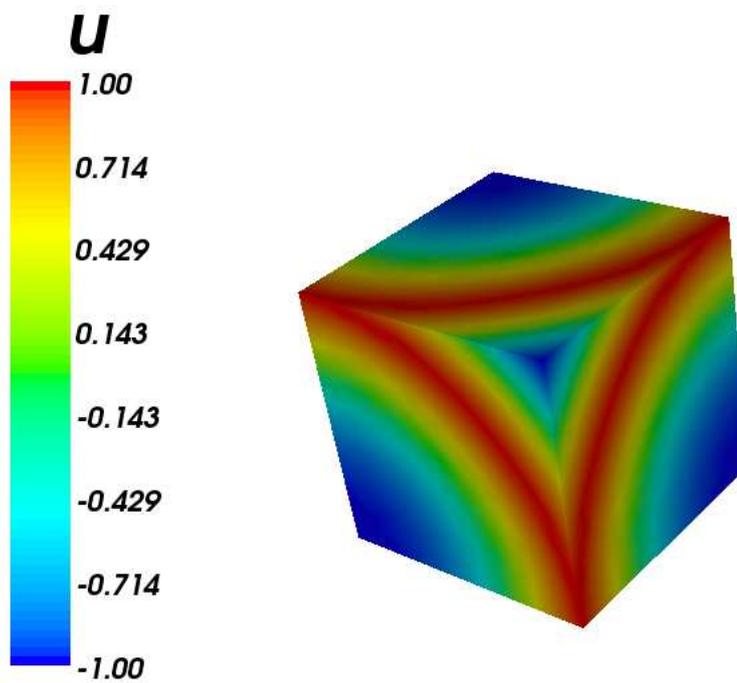
Le programme `freefem3d` utilisé pour résoudre ce problème est le suivant.

```

1 // -*- c++ -*-
2 vertex A = (0,0,0);
3 vertex B = (1,1,1);
4 vector n = (15,15,15);
5 vector n2= n-(2,2,2);

```

Stokes :solution analytique

FIG. 4.2 – La solution approchée ($N = 17$).

```
6 | mesh M = spectral(n,A,B);
```

```

7 mesh M2 = spectral(n2,A,B);
8 double pi= acos(-1.);
9 double mu=1;
10 double k=1;
11 function ue1 = sin(pi*(x+y+z));
12 function ue2 = sin(pi*(x+y+z));
13 function ue3 = -2*sin(pi*(x+y+z));
14 function pe = cos(pi*x) - cos(pi*y) + 3*z^2 - 2*z;
15 function f1 = 3*pi^2*sin(pi*(x+y+z)) - pi*sin(pi*x);
16 function f2 = 3*pi^2*sin(pi*(x+y+z)) + pi*sin(pi*y);
17 function f3 = -6*pi^2*sin(pi*(x+y+z)) + 6*z -2 ;
18 sfunction u1(M);
19 sfunction u2(M);
20 sfunction u3(M);
21 sfunction p(M2)=0;
22 double Eps = 1E-6;
23 solve(u1,u2,u3,p) in M
24 krylov(precond=none,type=gmres)
25 ,gmres(basis=200,epsilon=8E-8,maxiter=20)
26 {
27 test(v1,v2,v3,q)
28 int( grad(u1)*grad(v1) - dx(v1)*p
29 + grad(u2)*grad(v2) - dy(v2)*p
30 + grad(u3)*grad(v3) - dz(v3)*p
31 - dx(u1)*q - dy(u2)*q - dz(u3)*q
32 )
33 + int[0,1,2,3,4,5](1./Eps*u1*v1 + 1./Eps*u2*v2 + 1./Eps*u3*v3)
34 = int(f1*v1 + f2*v2 + f3*v3)
35 + int[0,1,2,3,4,5](1./Eps*ue1*v1 + 1./Eps*ue2*v2 + 1./Eps*ue3*v3)
36 ;
37 }
38 save(vtk,"stokes-3d", {[u1,u2,u3],[ue1,ue2,ue3],p,pe}, M);

```

Ainsi, on obtient les erreurs suivantes pour $N = 15$.

$$\|\mathbf{u}_{exacte} - \mathbf{u}_{app}\|_0 = 0.00119592, \quad \text{et}$$

$$\|p_{exacte} - p_{app}\|_0 = 0.0307975.$$

Cavité entraînée

On considère l'équation de Stokes suivante

$$\begin{aligned}
 -\Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} p &= \mathbf{0} && \text{dans } \Omega, \\
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega, \\
 u_1(x, y, z) &= 0 && \forall (x, y, z) \in \partial\Omega \text{ et } y \neq 1, \\
 u_1(x, 1, z) &= 1 && \forall (x, z) \text{ et } y = 1, \\
 u_2(x, y, z) &= 0 && \forall (x, y, z) \in \partial\Omega, \\
 u_3(x, y, z) &= 0 && \forall (x, y, z) \in \partial\Omega,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Nous avons imposé la vitesse $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ sur la frontière $y = 1$ et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur le reste de $\partial(\Omega)$. Pour le test numérique, on prend le coefficient de pénalisation $\varepsilon = 10^{-6}$. Le programme `freefem3d` utilisé pour résoudre ce problème est le suivant.

Cavité entraînée 3d

```

1 // -*- c++ -*-
2 vertex A = (-1,-1,-1);
3 vertex B = ( 1, 1, 1);
4 vector n = (15,15,15);
5 vector n2 = n-(2,2,2);
6 mesh M = spectral(n,A,B);
7 mesh M2 = spectral(n2,A,B);
8 double mu = 1;
9 double k = 1;
10 double Eps = 1E-6;
11 sfunction u1(M);
12 sfunction u2(M);
13 sfunction u3(M);
14 sfunction p(M2)=0;
15 solve(u1,u2,u3,p) in M
16 krylov(precond=none,type=gmres),
17 gmres(epsilon=1e-7, basis=3000, maxiter=1)
18 {
19     test(v1,v2,v3,q)
20         int( mu*grad(u1)*grad(v1) - dx(v1)*p
21             + mu*grad(u2)*grad(v2) - dy(v2)*p
22             + mu*grad(u3)*grad(v3) - dz(v3)*p
23             - k*dx(u1)*q - k*dy(u2)*q - k*dz(u3)*q
24             )
25     + int [0,1,2,3,4,5] (1./Eps*u1*v1)
26     + int [0,1,2,3,4,5] (1./Eps*u2*v2)
27     + int [0,1,2,3,4,5] (1./Eps*u3*v3)
28     = int [3] (1./Eps*v1)
29     ;
30

```

```

31 }
32 save(vtk,"cavité-entraînée-3d-Spectral", {[u1,u2,u3],p}, M);

```

Remarque 7. Comme les problèmes de Stokes et de cavité entraînée sont résolus de manière directe, à savoir sans utiliser l'algorithme de Uzawa, on obtient des problèmes mal conditionnés. Pour obtenir une meilleure convergence, nous utilisons la méthode *gmres* [67], avec une base de Krylov assez grande.

La figure 4.3 montre que nous obtenons le résultat attendu, à savoir une cavité entraînée. La figure 4.4 représente des isosurfaces de pression.

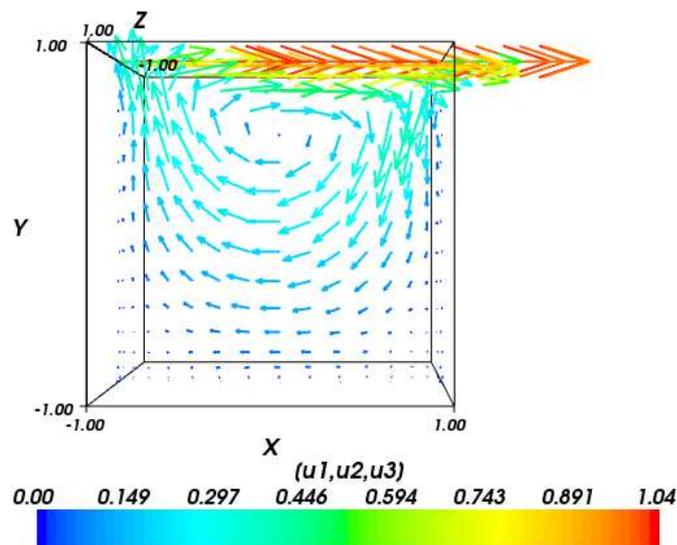


FIG. 4.3 – Cavité entraînée : coupe de la vitesse dans le plan $y = 0$. $N = 15$, et $\varepsilon = 10^{-5}$.

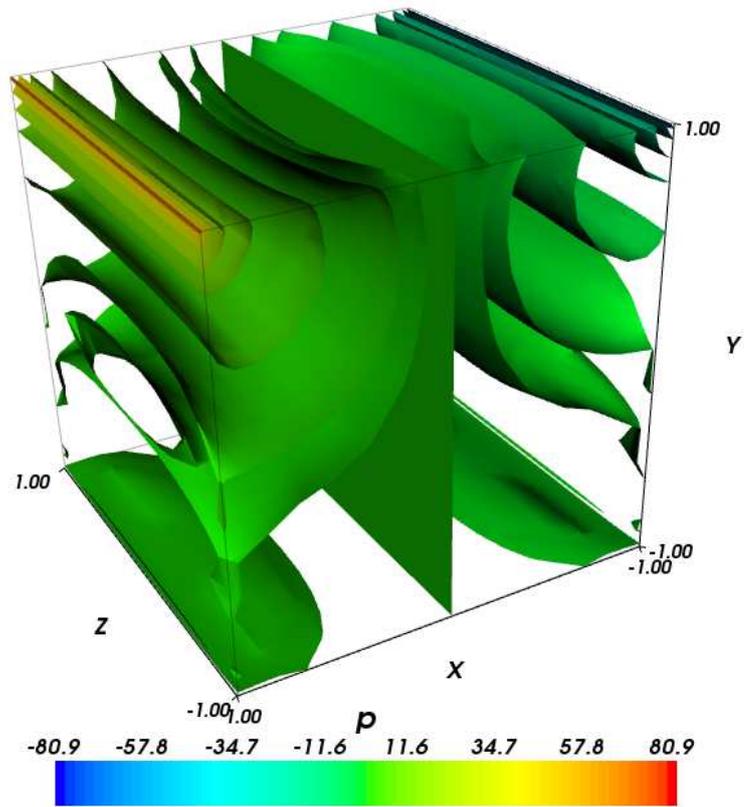


FIG. 4.4 – Cavité entraînée : isosurfaces de pression. $N = 13$, et $\varepsilon = 10^{-5}$.

4.1.3 Système de l'élasticité linéarisée

On considère une poutre constituée d'un matériau homogène isotrope, remplissant un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 , et fixée par une face latérale Γ_0 . Soient λ et μ les coefficients de Lamé du matériau qui occupe Ω . Ils vérifient

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad 2\mu + 3\lambda > 0.$$

Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ le vecteur déplacement, et soit e le tenseur des déformations, on a

$$\begin{aligned} e(\mathbf{u}) &= (\nabla \cdot \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^T) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}. \end{aligned}$$

On pose $\mathbf{X} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \text{ tel que } \mathbf{v}|_{\Gamma_0} = 0\}$. Le système tridimensionnel de l'élasticité linéarisée est donné sous forme variationnelle par

$$\text{trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{X}$$

$$2\mu \int_{\Omega} e(\mathbf{u}) \cdot e(\mathbf{v}) + \lambda \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X},$$

que l'on écrit

$$\int_{\Omega} \mu \sum_{ij} \partial_{x_i} u_j \partial_{x_i} v_j + \int_{\Omega} \mu \sum_{ij} \partial_{x_i} u_j \partial_{x_j} v_i + \int_{\Omega} \lambda \sum_{ij} \partial_{x_i} u_i \partial_{x_j} v_j = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

où \mathbf{f} est une force exercée sur la poutre. Le problème dont on approche la solution est une poutre soumise à son propre poids, donc $\mathbf{f} = (0, -1, 0)$, et fixée par la face Γ_0 définie par $x = 0$. La géométrie de cette poutre est

$$\Omega =]0, 5[\times] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[.$$

On applique des conditions de Dirichlet homogènes sur Γ_0 , et on prend $\mu = 500$ et $\lambda = 1000$. Le programme `freefem3d` implémenté pour résoudre ce problème est le suivant.

Elasticité

```

1 // -*- c++ -*-
2 vector n = (10,5,5);
3 vector a = (0,-0.5,-0.5);
4 vector b = (5, 0.5, 0.5);
5 mesh M = spectral(n,a,b);
6 double L = 1000; // Lambda
7 double Mu = 500;
8 sfunction u1(M);
9 sfunction u2(M);
10 sfunction u3(M);
11 solve (u1,u2,u3) in M
12     memory(matrix=none),
13     cg(epsilon=1E-20,maxiter=1000)
14 {
15     test(v1,v2,v3)
16         int(Mu*dx(u1)*dx(v1))+int(Mu*dx(u2)*dx(v2))+int(Mu*dx(u3)*dx(v3))
17         +int(Mu*dy(u1)*dy(v1))+int(Mu*dy(u2)*dy(v2))+int(Mu*dy(u3)*dy(v3))
18         +int(Mu*dz(u1)*dz(v1))+int(Mu*dz(u2)*dz(v2))+int(Mu*dz(u3)*dz(v3))
19
20         +int(Mu*dx(u1)*dx(v1))+int(Mu*dx(u2)*dy(v1))+int(Mu*dx(u3)*dz(v1))
21         +int(Mu*dy(u1)*dx(v2))+int(Mu*dy(u2)*dy(v2))+int(Mu*dy(u3)*dz(v2))
22         +int(Mu*dz(u1)*dx(v3))+int(Mu*dz(u2)*dy(v3))+int(Mu*dz(u3)*dz(v3))
23
24         +int(L*dx(u1)*dx(v1))+int(L*dx(u1)*dy(v2))+int(L*dx(u1)*dz(v3))
25         +int(L*dy(u2)*dx(v1))+int(L*dy(u2)*dy(v2))+int(L*dy(u2)*dz(v3))

```

```

26     +int(L*dz(u3)*dx(v1))+int(L*dz(u3)*dy(v2))+int(L*dz(u3)*dz(v3))
27
28     +int[0](1E6*u1*v1 + 1E6*u2*v2 + 1E6*u3*v3)
29
30     = int(-v3); // gravity
31 };
32 mesh T = transform(M, [x+u1,y+u2,z+u3]);
33 save(vtk,"elasticity",[u1,u2,u3],T);

```

La figure 4.5 représente la déformée de la poutre en utilisant la méthode spectrale. Une simulation en élément finis, voir figure 4.6, est réalisée afin de comparer les deux résultats,

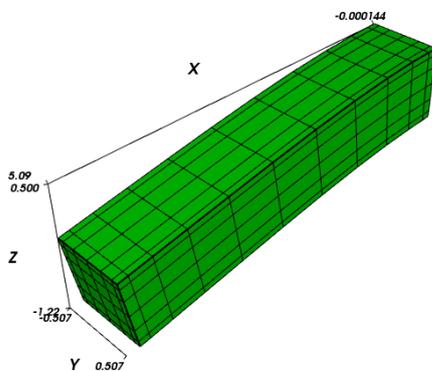


FIG. 4.5 – Déplacement de la poutre en méthode spectrale. Degrés = $10 \times 5 \times 5$.

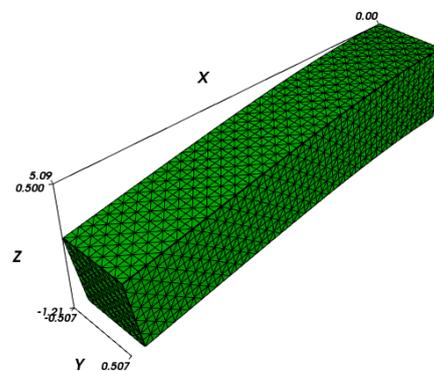


FIG. 4.6 – Déplacement de la poutre en éléments finis, le maillage utilisé est $50 \times 10 \times 10$.

Équation de la chaleur

On considère le problème suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0, & \text{dans } \Omega =]0, 4[\times]0, 1[\times]0, 1[\\ u(0, t) &= 1, & \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) &= 0, & \forall x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.5)$$

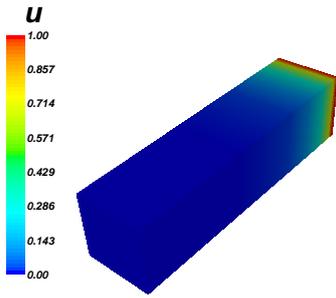
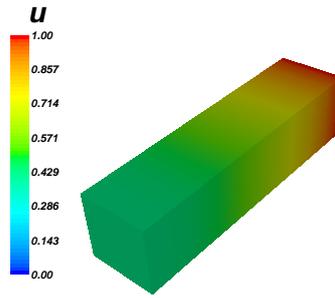
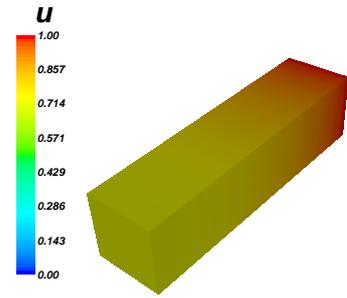
On résout ce problème en utilisant un schéma d'Euler implicite. Le programme `freefem3d` utilisé pour résoudre ce problème est

Chaleur

```

1  vector a = (0,0,0);
2  vector b = (4,1,1);
3  vector n = (10,5,5);
4  mesh M = spectral(n,a,b);
5  sfunction u0(M)=0;
6  double dt = 0.1;
7  double i = 1;
8  sfunction u(M)=0;
9
10 do{
11     solve (u) in M
12         memory(matrix=None),
13         cg(epsilon=1E-10,maxiter=1000)
14     {
15         test(v)
16         int((1/dt)*u*v) + int(grad(u)*grad(v))
17         + int[0](1E3*u*v)
18         =int((1/dt)*u0*v) + int[0](1E3*v);
19     }
20
21     u0 = u;
22     save(vtk,"chaleur-".i,u,M);
23     i = i+1;
24
25 } while(i <= 100);
26
27
```

Les figures 4.7, 4.8 et 4.9 représentent les résultats numériques aux temps 0, 5 et 10. On remarque qu'à la fin ($t=10$) u est proche de 1.

FIG. 4.7 – Résultats numériques à $t = 0, 1$.FIG. 4.8 – Résultats numériques à $t = 5, 1$.FIG. 4.9 – Résultats numériques à $t = 10$.

4.2 Domaines non tensoriels

Conditions aux limites de Dirichlet

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{dans } \Omega, \\ u &= g & \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.6}$$

où $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, tel que

$$\begin{aligned} \Omega_1 &=]-1, 0[\times]-1, 1[\times]-1, 1[, \\ \Omega_2 &=]0, 1[\times]-1, 0[\times]-1, 1[, \quad \text{et} \\ \Omega_3 &=]0, 1[\times]0, 1[\times]-1, 0[. \end{aligned}$$

Voir la figure 4.10 pour une représentation de la géométrie. Les fonctions f et g sont définies par

$$\forall (x, y, z) \in \Omega \quad \begin{aligned} f(x, y, z) &= 3\pi^2 \sin(\pi(x + y + z)), & \text{et} \\ g(x, y, z) &= \sin(\pi(x + y + z)). \end{aligned}$$

La solution exacte de ce problème est

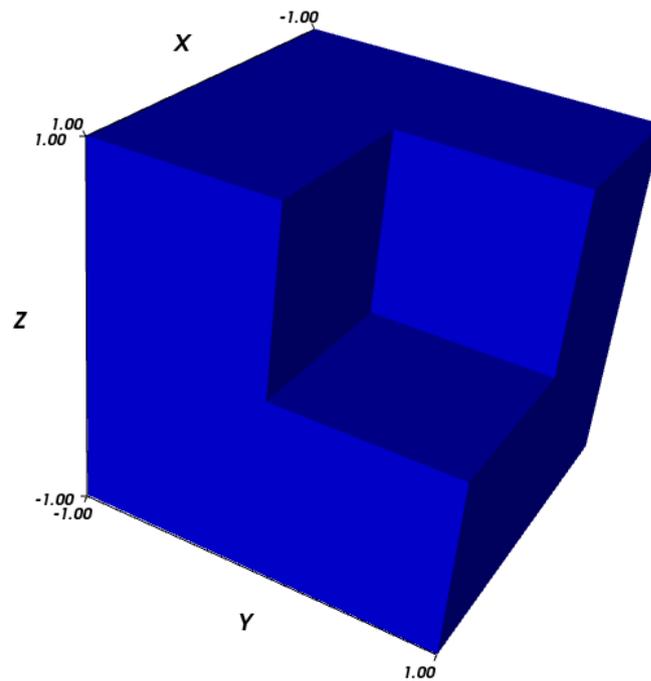
$$\forall (x, y, z) \in \Omega, \quad u(x, y, z) = \sin(\pi(x + y + z)).$$

Le programme `freefem3d` utilisé pour résoudre ce problème est le suivant

```

1  _____ laplace dans un domaine non tensoriel _____
2  vector a = (-1, -1, -1);
3  vector b = ( 1,  1,  1);
4  double N = 10;
5  vector n = ( N,  N,  N);
6  double pi = acos(-1);

```

FIG. 4.10 – Le domaine Ω .

```

6 finemesh;
7 scene S = pov("laplace.pov");
8 function uexact = sin(pi*(x+y+z));
9 function f = 3*pi^2*sin(pi*(x+y+z));
10 domain D = domain(S,outside(<0,0,0>));
11 mesh m = structured((3,3,3),a,b);
12 mesh O = octree(D,m,0);
13 save(vtk,"o",0);
14 domain D2 = domain(S,inside(<1,0,0>));
15 mesh s = surface(D2,structured((31,31,31),a,b));
16 save(vtk,"s",s);

```

```

17 save(medit,"s",s);
18 double Eps = 1E-10;
19 mesh M = spectral(n,a,b);
20 sfunction u(M);
21 solve(u) in 0
22   gmres(epsilon=1E-30,maxiter=1,basis=(N+1)^3+10),
23   krylov(type=gmres)
24 {
25   test(v)
26     int(grad(u)*grad(v))
27     + int[s](1./Eps*u*v)
28     =
29     int(f*v)
30     + int[s](1./Eps*uexact*v);
31 }
32 save(vtk,"u",{u,uexact},tetrahedrize(D,structured((20,20,20),a,b)));
33 mesh M1 = spectral(n,(-1,-1,-1),(0,1,1));
34 mesh M2 = spectral(n,(0,-1,-1),(1,0,1));
35 mesh M3 = spectral(n,(0,0,0),(1,1,-1));
36 cout << sqrt(int[M1]((u-uexact)^2)
37           +int[M2]((u-uexact)^2)
38           + int[M3]((u-uexact)^2))<< "\n";

```

La courbe 4.11 représente l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée, en norme L^2 , à l'échelle logarithmique, en fonction de N . Le paramètre de pénalisation dans ce test est $\varepsilon = 10^{-10}$.

La figure 4.12 représente la solution approchée, sur le bord $\partial\Omega$, projetée sur une grille de tétraèdres.

4.3 Implémentation

`freefem3d` [31] est un logiciel libre, écrit par Stéphane Del Pino pendant sa thèse [30]. Il a pour but la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques, paraboliques, et non linéaires. Il est basé sur la discrétisation de briques de base et piloté par un langage proche des mathématiques. Les résultats de calculs sont stockés dans des fichiers sous différents formats, citons par exemple : `.vtu` et `.bb`, qui sont respectivement les formats lisibles par les logiciels de visualisation `mayavi` [58], et `medit` [35]. `freefem3d` fait partie de la famille des logiciels `freefem` (voir par exemple [42], [43]). Il permet de générer le maillage de surface d'un objet construit par CSG (**C**onstructive **S**olid **G**eometry), par la méthode de *marching tetrahedra*, voir [30]. Il implémente en plus de la méthode des domaines fictifs, une méthode d'éléments finis de degré 0, 1 ou 2 sur plusieurs types de maillages (tétraédriques, hexaédriques, structurés ou non). Au cours de sa thèse, Jean-Baptiste Apoung Kamga [2], y a développé une méthode de Galerkin discontinue afin de résoudre les équations d'écoulement dans les milieux poreux. L'intégration des ces

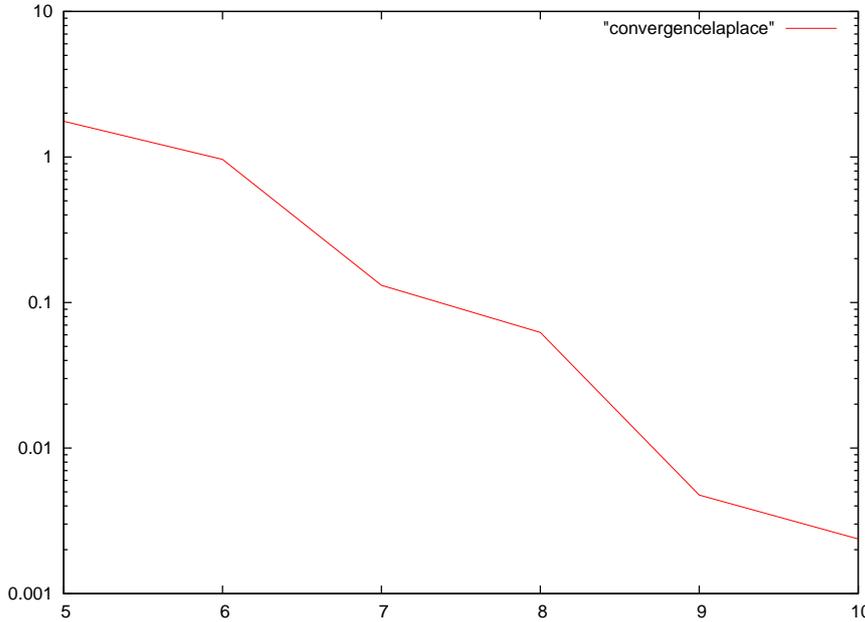


FIG. 4.11 – Erreur en norme L^2 présentée en échelle logarithmique pour , ($\varepsilon = 10^{-10}$).

méthodes dans `freefem3d` est en cours.

Dans cette thèse, nous avons mis en œuvre la méthode spectrale dans ce logiciel, donc en C++ [69]. Nous donnons maintenant quelques détails liés à l'implémentation du code dans `freefem3d`. Nous n'aborderons pas le problème du branchement de la partie numérique que nous avons développé au langage `freefem3d`, car ceci a été effectué par Stéphane Del Pino.

4.3.1 Détails de la mise en œuvre

Bien que `freefem3d` utilise des formulations fortes et faibles, on s'est contenté pour l'instant d'utiliser uniquement des formulations variationnelles, qui sont plus souples dans le logiciel. Ainsi, les formes variationnelles suivantes ont été implémentées, dans les cas scalaire et vectorielle.

- **Formes linéaires implémentées**

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx$$

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) v(x) dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} f(x) \nabla g(x) \cdot \nabla v(x).$$

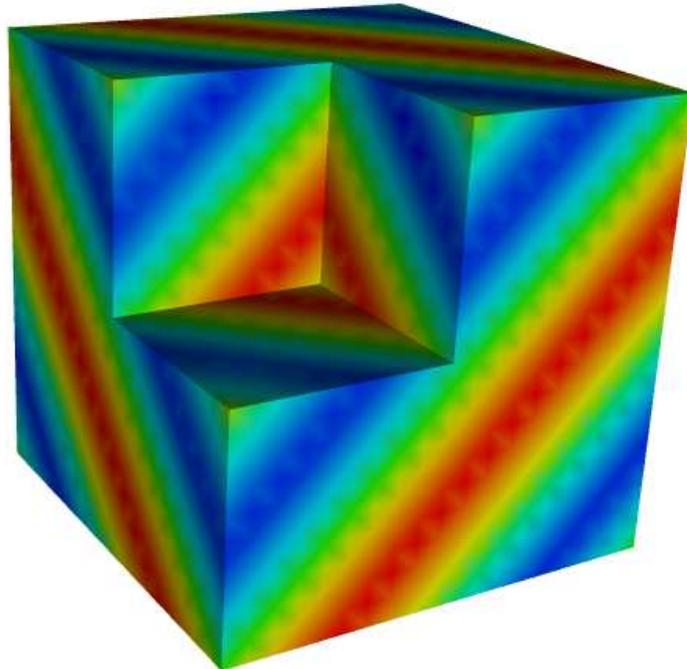


FIG. 4.12 – La solution approchée, $N = 10$, et $\varepsilon = 10^{-10}$.

- **Formes bilinéaires implémentées**

$$\int_{\Omega} \alpha(x) u(x) v(x) dx, \quad \int_{\Omega} \mu(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad \int_{\Omega} \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx,$$

$$\int_{\Omega} \nu(x) u(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx, \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \nu(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx.$$

Ces formes variationnelles permettent de décrire par exemple les problèmes scalaires ou vectoriels présentés au début de ce chapitre.

Remarque 8. *Pour les problèmes vectoriels, l'implémentation que nous avons faite permet de discrétiser différemment chaque inconnue. Par exemple, pour résoudre le problème de Stokes, on utilise $(\mathbb{P}_n)^d \otimes \mathbb{P}_k$, où la vitesse discrète est dans $(\mathbb{P}_n)^d$ et la pression est dans \mathbb{P}_k (généralement $k = N - 2$).*

Nous avons tiré partie de la structure objet du langage C++, qui nous a permis par exemple d'intégrer de manière transparente de nouveaux types de fonctions et de maillages dans `freefem3d` :

- **les fonctions spectrales** qui s'écrivent sous la forme

$$\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} u_{ijk} L_i(x) L_j(y) L_k(z), \quad \text{et}$$

- **les maillages spectraux**
 - **tensoriels** qui sont donnés par les points de Gauss-Lobatto, et
 - les maillages de type *octree*, pour gérer les géométries complexes.

Nous avons implémenté plusieurs classes dans `freefem3d`. Nous allons en citer certaines et expliquer leur rôles.

La classe `Interval`

Puisque la méthode spectrale utilisée se base sur la tensorisation des domaines, nous avons commencé par coder la classe `Interval`, qui permet de construire par la suite les domaines parallélépipédiques. Ainsi on notera $] - 1, 1[^d$, $d = 1, 2$ ou 3 , le domaine de référence.

La classe `SpectralConformTransformation`

Cette classe a été introduite dans le logiciel pour transformer un pavé de \mathbb{R}^3 (sur lequel on travaille), en domaine de référence $] - 1, 1[^3$. Notons que dans `freefem3d`, il existe une autre transformation conforme liée à la méthode des éléments finis. Celle-ci permet de transformer un interval $]a, b[$ en $]0, 1[$. La classe `SpectralConformTransformation` permet aussi de calculer le jacobien (et son inverse) de la transformation.

La classe `LegendreBasis`

La méthode spectrale implémentée dans cette thèse utilise les polynômes de Legendre. La famille formée par ces polynômes constitue une base orthogonale de l'espace $L^2(]-1, 1[)$. La base formée par les polynômes de Legendre est implémentée dans `freefem3d` grâce à la formule de récurrence suivante

$$\begin{aligned} L_0(\xi) &= 1 \quad \text{et} \quad L_1(\xi) = \xi, \\ (n+1)L_{n+1}(\xi) &= (2n+1)\xi L_n(\xi) - nL_{n-1}(\xi), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Elle permet de calculer les valeurs de tous les polynômes de la base de Legendre, ainsi que leur dérivées en un point. La figure (4.13) reproduit les onze premiers polynômes de Legendre.

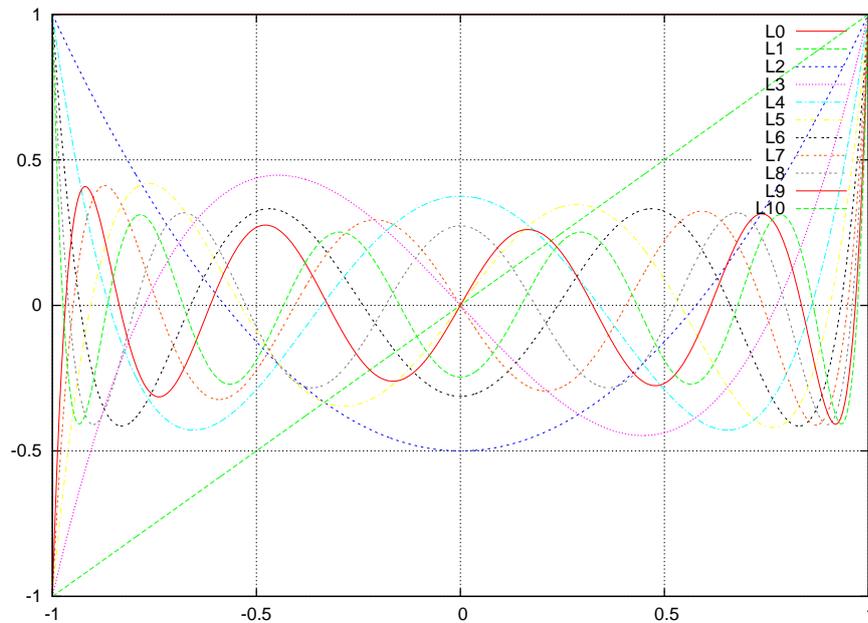


FIG. 4.13 – Les onze premiers polynômes de Legendre.

La classe GaussLobatto

Après avoir implémenté la classe `LegendreBasis` dans le logiciel `freefem3d`, nous avons écrit la classe `GaussLobatto`, qui permet le calcul des nœuds de Gauss-Lobatto $(\xi_i)_{0 \leq i \leq N}$. Comme les ξ_i , $0 \leq i \leq N$ sont les racines du polynôme $(1 - x^2)L'_N(x)$, nous avons utilisé la méthode de dichotomie pour les approcher. Nous avons comparé les nœuds calculés par la méthode de dichotomie que nous utilisons, et les nœuds calculés par le code de M. EL RHABI qu'il a développé durant sa thèse [34]. Nous trouvons les mêmes résultats. Rappelons que la méthode utilisée dans [34] est celle citée dans [14], (voir chapitre II, Remarque 3.2 et Remarque 3.6). Elle consiste à trouver les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique à diagonale nulle. Ces valeurs propres sont les nœuds recherchés. Les deux méthodes donnent les mêmes valeurs des nœuds, et on remarque que le méthode de dichotomie est plus facile à programmer que l'autre méthode.

Les poids ρ_j , $0 \leq j \leq N$, sont aussi calculés dans cette classe. On rappelle qu'ils sont

donnés par la formule suivante

$$\rho_0 = \rho_N = \frac{2}{N(N+1)},$$

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\xi_j)}, \quad \forall 1 \leq j \leq N-1.$$

Le tableau 4.2 ci-dessous représente les noeuds de Gauss-Lobatto et les poids associés, pour $N = 10$, calculés avec `freefem3d`.

i	ξ_i	ρ_i
0	-1.000000	0.0181818
1	-0.934001	0.1096120
2	-0.784483	0.1871700
3	-0.565235	0.2480480
4	-0.295758	0.2868790
5	0.000000	0.3002180
6	0.295758	0.2868790
7	0.565235	0.2480480
8	0.784483	0.1871700
9	0.934001	0.1096120
10	1.000000	0.0181818

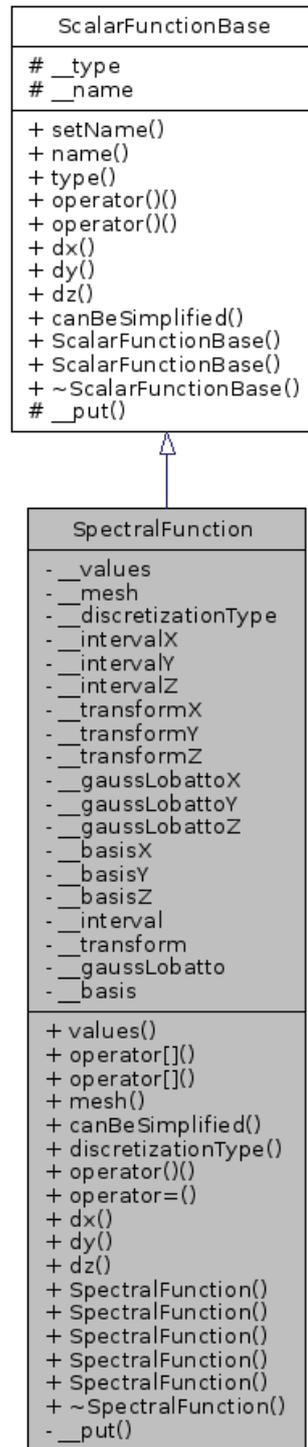
TAB. 4.2 – Nœuds de Gauss-Lobatto (colonne de milieu) calculés par la méthode de dichotomie, et les poids associés (colonne de droite), pour $N = 10$.

La classe `SpectralFunction`

Le logiciel `freefem3d` est un code permettant la résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis, donc les seules fonctions discrètes étaient de type éléments finis (`femfunction` dans le langage utilisateur. L'intégration de la méthode spectrale dans `freefem3d` nous a conduits à créer un nouveau type de fonctions : les fonctions spectrales notées `sfunction` dans les programmes `freefem3d`. Ainsi, la classe `SpectralFunction` hérite de la classe de base `ScalarFunction`, qui permet de manipuler de manière abstraite tout type de fonction scalaire (voir figure 4.14). Nous donnons maintenant quelques détails concernant cette classe.

- La fonction `()` permet d'évaluer une fonction spectrale en tout point de l'espace.
- La fonction `=` permet de calculer la projection $L^2(\Omega)$ (Ω est le parallélépipède défini par `SpectralMesh : __mesh`) d'une fonction sur la base des polynômes de Legendre.
- La fonction `dx` (de même pour les fonctions `dy` et `dz`) donne la dérivée par rapport à la variable x , d'une fonction spectrale. Ainsi si,

$$f(x, y, z) = \sum_{i,j,k}^{N_x, N_y, N_z} f_{ijk} L_i(x) L_j(y) L_k(z)$$

FIG. 4.14 – Diagramme d’héritage pour la classe `SpectralFunction`

est une `SpectraleFunction`, la valeur de sa dérivée par rapport à x en (x, y, z) est

$$f.dx(x, y, z) = \sum_{i,j,k}^{N_x, N_y, N_z} f_{ijk} L'_i(x) L_j(y) L_k(z),$$

où L'_i est la dérivée du polynôme de Legendre L_i calculée par `__basisX` qui est de type `LegendreBasis`.

- La fonction `canBeSimplified()` permet de simplifier dans le cas de la méthode des éléments finis les opérations : addition, multiplication, etc... Soient f et g deux fonctions de type `femfunction` : P1 (par exemple), définies sur le même maillage. Alors l'opération `f+g` est simplifiée automatiquement en créant une nouvelle fonction h de même type que f et g , telle que $h_i = f_i + g_i$. De même, l'opération `2*f` introduit une fonction h , telle que $h_i = 2 f_i$. Il s'agit d'une optimisation qui ne change pas le résultat.

`canBeSimplified()` n'est pas implémenté pour l'instant dans la méthode spectrale.

La classe `SpectralMesh`

La classe `SpectralMesh` est construite à partir (**dérive**) de la classe abstraite `Mesh`. Le diagramme 4.15 illustre ce propos.

Nous tenons à préciser un modèle de programmation objet que nous avons utilisé. En effet, la méthode spectrale dans les domaines tensoriels et celle dans les domaines complexes utilisent la même brique de base. Prenons l'exemple de la forme $\int_{\Omega} f(x)v(x) dx$, pour l'expliquer. Dans le cas où Ω est un pavé, on utilise le code spectral tensoriel. Et si Ω est quelconque, il est approché par une partition finie de pavés, notés D_i sur lesquels le calcul de $\int_{D_i} f(x)v(x) dx$ se fait de la même manière que dans le cas tensoriel. Il est donc souhaitable d'utiliser les mêmes lignes de code, afin

- d'éviter la réécriture du code,
- d'éviter des éventuelles erreurs, et
- de permettre qu'une optimisation unique profite aux deux méthodes.

Pour ces raisons, nous avons créé la classe `SpectralLegendreDiscretizer`, qui sera utilisée par les instances de `SpectralLegendreDiscretizationConform` et de `SpectralLegendreDiscretizationNonConform` que nous avons développées. La figure 4.16 montre le diagramme de collaboration de cette classe.

Ainsi, à chaque résolution d'équations aux dérivées partielles, la classe `SpectralLegendreDiscretizationConform` et la classe `SpectralLegendreDiscretizationNonConform` utilisent la classe `SpectralLegendreDiscretizer`, qui sait calculer les intégrales sur des pavés.

4.3.2 Conclusion et futurs développements

Comme la méthode spectrale a été bien intégrée dans `freefem3d` (spécialisation de la classe `SpectralFunction` pour la manipulation des fonctions spectrales par exemple), on peut résoudre un problème d'équations aux dérivées partielles par les méthodes d'éléments finis et spectrales, en ne changeant que quelques lignes dans le programme `freefem3d`. Ceci permet de comparer les résultats obtenus. On peut aussi, résoudre un problème par une méthode des éléments finis sur une partie Ω_1 du domaine global Ω , et par la méthode spectrale sur Ω_2 , l'autre partie de Ω (avec des conditions aux limites adéquates).

Grâce à la structure objet mise en place, il serait facile d'ajouter de nouvelles méthodes spectrales, où les inconnues sont par exemple les valeurs aux nœuds de la grille de Gauss-Lobatto (la base correspondante étant constituée par les polynômes de Lagrange en ces nœuds), ou en mélangeant les deux (Lagrange et Legendre).

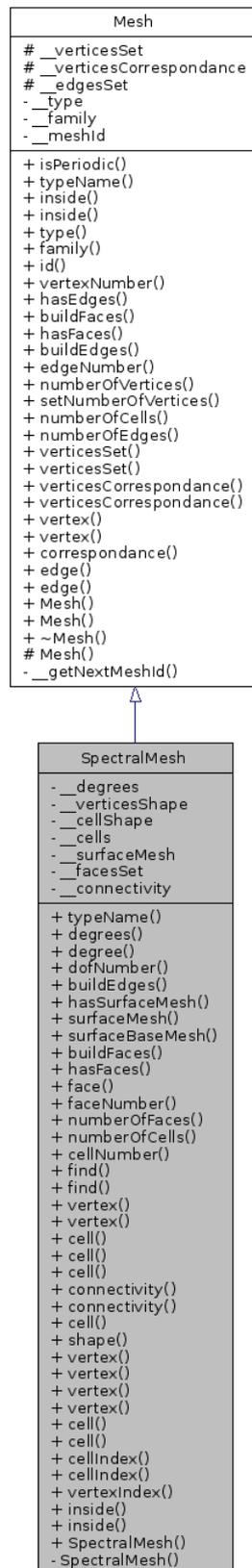


FIG. 4.15 – Diagramme d'héritage pour la classe SpectralMesh

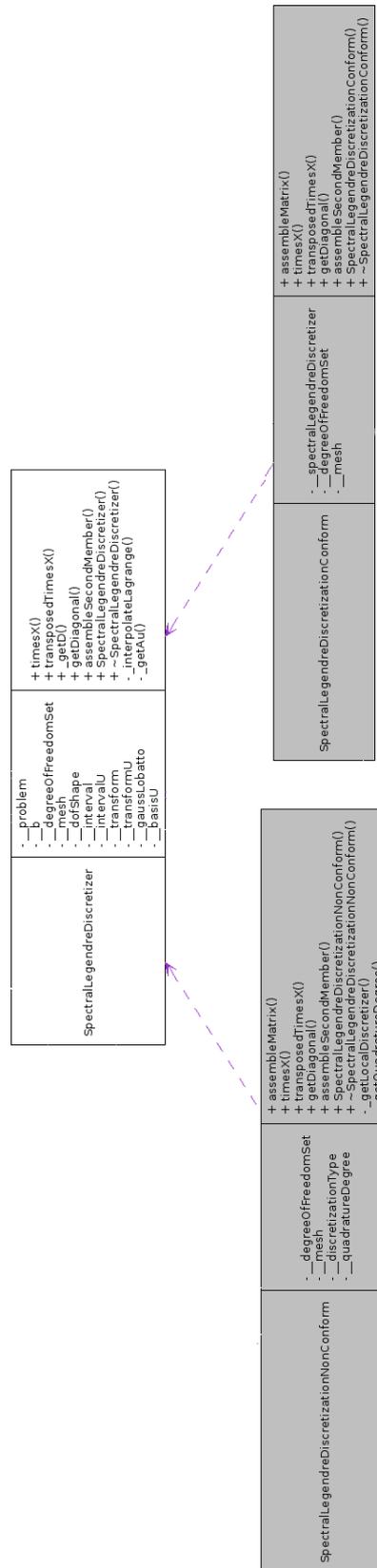


FIG. 4.16 – Diagramme de collaboration de la classe `SpectralLegendreDiscretizer`.

Chapitre 5

Simulation numérique du couplage océan/atmosphère

L'objectif de ce chapitre est d'effectuer des simulations numériques du couplage océan/atmosphère que nous avons étudié dans la première partie de cette thèse, avec le code que nous avons réalisé. Nous rappelons l'algorithme utilisé, dont la convergence a été prouvée dans le chapitre 2

Étape 1

On se donne $k_i^n \in W^{1,3}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$,

on obtient $(\mathbf{u}_i^{n+1}, p_i^{n+1}) \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times L^2(\Omega_i)$, $i = 1, 2$,

tel que pour tout $(\mathbf{v}_i, q_i) \in \mathbf{X}_i \times L^2(\Omega_i)$, on ait

$$\begin{aligned} & (\alpha_i(k_i^n) \nabla \mathbf{u}_i^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_i)_{\Omega_i} + b_i(\mathbf{v}_i, p_i^{n+1}) - b_i(\mathbf{u}_i^{n+1}, q) \\ & + \kappa_i (|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}| (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}), \mathbf{v}_i)_{\Gamma} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{v}_i)_{\Omega_i}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Étape 2

Étant donnée $(\mathbf{u}_i^{n+1}, k_i^n) \in W^{1,3+\varepsilon}(\Omega_i)^d \times W^{1,3}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$,

on obtient $k_i^{n+1} \in W^{1,3}(\Omega_i)$,

tel que pour tout $\varphi_i \in W_0^{1,r}(\Omega_i)$, on ait,

$$\begin{aligned} k_i^{n+1} &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_i, \\ k_i^{n+1} &= \lambda |\mathbf{u}_1^{n+1} - \mathbf{u}_2^{n+1}|^2, \quad \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

et,

$$(\gamma_i(k_i^n) \nabla k_i^{n+1}, \nabla \varphi_i)_{\Omega_i} = (\alpha_i(k_i^n) |\nabla \mathbf{u}_i^{n+1}|^2, \varphi_i)_{\Omega_i}. \quad (5.2)$$

Nous avons testé notre algorithme en prenant les données suivantes :

- **Domaines**
 - $\Omega_1 =]0, 5[\times]0, 1[\times]0, 1[$ pour l'atmosphère,
 - $\Omega_2 =]0, 5[\times]-1, 0[\times]0, 1[$ pour l'océan.
- **Viscosités et coefficients de diffusions turbulents** (valeurs physiques réalistes, voir [60]).
 - $\gamma_1(k_1) = 3.10^{-3} + 0,277.10^{-4}\sqrt{k_1}$,
 - $\gamma_2(k_2) = 3.10^{-2} + 0,185.10^{-5}\sqrt{k_2}$,
 - $\alpha_i(\cdot) = \gamma_i(\cdot)$, $i = 1, 2$.
- **Coefficients de friction** (valeurs physiques réalistes, voir [60]).
 - $\kappa_i = 10^{-3}$, $i = 1, 2$,
 - $\lambda = 5.10^{-2}$.

Conditions aux limites

On impose une vitesse horizontale $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$ à la frontière $y = 1$, et des conditions d'adhérence pour les deux vitesses $\mathbf{u}_i = (0, 0, 0)$, $i = 1, 2$, sur le reste de $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. En ce qui concerne les conditions aux limites pour l'énergie cinétique turbulente k_i , on prend

$$k_i = 0 \quad \text{sur le bord } \partial(\Omega_1 \cup \Omega_2), \quad \text{et}$$

$$k_i = \lambda |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \quad \text{à la surface de l'océan } \Gamma.$$

On utilise le schéma spectral associés au schéma itératif 5.1-5.2, voir par exemple [11]. La résolution se fait de manière directe (sans passer par l'algorithme d'Uzawa), en cherchant le couple discret (vitesse, pression) dans $(\mathbb{P}_N)^3 \otimes \mathbb{P}_{N-2}$. Le programme `freefem3d` utilisé pour résoudre ce problème en méthode spectrale est le suivant.

Couplage océan/atmosphère

```

1 // -*- c++ -*-
2 vertex a1 = (0,0,0);
3 vertex b1 = (5,1,1);
4 vector n1 = (25,8,8);
5 mesh M1 = spectral(n1,a1,b1); // Domaine atmosphere
6 vertex a2 = (0,-1,0);
7 vertex b2 = (5,0,1);
8 vector n2 = (25,8,8);
9 mesh M2 = spectral(n2,a2,b2); // Domaine ocean
10 vector np1 = n1-(2,2,2); // Pour la pression p1-atmosphere:
11 mesh Mp1 = spectral(np1,a1,b1);
12 vector np2 = n2-(2,2,2); // Pour la pression p1-ocaen:P_n\P_{n-2}
13 mesh Mp2 = spectral(np2,a1,b1);
14 function f1x = 0;
15 function f1y = 0;
16 function f1z = 0;
17 function f2x = 0;
18 function f2y = 0;
19 function f2z = 0;
20 // Données Physiques

```

```

21     double cf = 1E-3;
22     double lambda = 0.05;
23     double d1 = 0.277E-4;
24     double d2 = 0.185E-5;
25     double gamma01 = 3E-3;
26     double gamma02 = 3E-2;
27 // Viscosités et coefficients de diffusion turbulents
28     function alpha1 = gamma01;
29     function gamma1 = gamma01;
30     function alpha2 = gamma02;
31     function gamma2 = gamma01;
32 // Initialisation des inconnus(u,p,k): atmosphère.
33     sfunction u1x(M1) = 0;
34     sfunction u1y(M1) = 0;
35     sfunction u1z(M1) = 0;
36     sfunction p1(Mp1) = 0; // pression.
37     sfunction k1(M1) = 1; //ECT.
38 // Initialisation des inconnus(u,p,k): océan.
39     sfunction u2x(M2) = 0;
40     sfunction u2y(M2) = 0;
41     sfunction u2z(M2) = 0;
42     sfunction p2(Mp2) = 0; // pression.
43     sfunction k2(M2) = 1; // ECT.
44
45 //Pour le module du grad de la vitesse et ECT à l'interface
46     function u1nx = 0;
47     function u1ny = 0;
48     function u1nz = 0;
49     function p1n = 0;
50     function k1n = 0;
51     function u2nx = 0;
52     function u2ny = 0;
53     function u2nz = 0;
54     function p2n = 0;
55     function k2n = 0;
56 sfunction moduleDxU1(M1) = 0;
57 sfunction moduleDxU2(M2) = 0;
58 double diffu1n = 1;
59 double diffu2n = 1;
60 double diffk1n = 1;
61 double diffk2n = 1;
62 double diffu1 = 1;
63 double diffu2 = 1;
64 double diffk1 = 1;
65 double diffk2 = 1;

```

```

66 sfunction moduleU1U2(M2) = 0;
67 double eps=1E-3;
68 double P =1E4;
69 double Ep =1E3;
70 ofstream fout = ofstream("convergence_gmres1-3d");
71 double i = 0;
72 do {
73     moduleU1U2 = cf*sqrt((u1nx-u2nx)^2+(u1ny-u2ny)^2+(u1nz-u2nz)^2);
74     solve(u1x,u1y,u1z,p1) in M1
75     krylov(type=gmres,precond=none),
76     gmres(basis=700,epsilon=1E-10, maxiter=5)
77     {
78         test(v1x,v1y,v1z,q1)
79             int(alpha1*grad(u1x)*grad(v1x))
80             +int(alpha1*grad(u1y)*grad(v1y))
81             +int(alpha1*grad(u1z)*grad(v1z))
82             -int(dx(v1x)*p1+dy(v1y)*p1+dz(v1z)*p1)
83             -int(dx(u1x)*q1+dy(u1y)*q1+dz(u1z)*q1)
84             +int [2] (moduleU1U2*u1x*v1x)
85             -int [2] (moduleU1U2*u2nx*v1x)
86             +int [2] (moduleU1U2*u1z*v1z)
87             -int [2] (moduleU1U2*u2nz*v1z)
88             +int [3] (P*u1x*v1x)
89             -int [3] (P*v1x)
90             +int [0,1,4,5] (P*u1x*v1x)
91             +int [0,1,2,3,4,5] (P*u1y*v1y)
92             +int [0,1,3,4,5] (P*u1z*v1z)
93             = int(f1x*v1x+f1y*v1y+f1z*v1z);
94     }
95     solve(u2x,u2y,u2z,p2) in M2
96     krylov(type=gmres,precond=none),
97     gmres(basis=700,epsilon=1E-10, maxiter=5)
98     {
99         test(v2x,v2y,v2z,q2)
100             int(alpha2*grad(u2x)*grad(v2x))
101             +int(alpha2*grad(u2y)*grad(v2y))
102             +int(alpha2*grad(u2z)*grad(v2z))
103             -int(dx(v2x)*p2+dy(v2y)*p2+dz(v2z)*p2)
104             -int(dx(u2x)*q2+dy(u2y)*q2+dz(u2z)*q2)
105             +int [3] (moduleU1U2*u2x*v2x)
106             -int [3] (moduleU1U2*u1nx*v2x)
107             +int [3] (moduleU1U2*u2z*v2z)
108             -int [3] (moduleU1U2*u1nz*v2z)
109             +int [0,1,2,4,5] (Ep*u2x*v2x)
110             +int [0,1,2,3,4,5] (Ep*u2y*v2y)

```

```

111     +int[0,1,2,4,5] (Ep*u2z*v2z)
112     = int(f2x*v2x+f2y*v2y+f2z*v2z);
113 }
114 moduleDxU1 = dx(u1x)^2+dy(u1y)^2+dz(u1z)^2;
115 solve(k1) in M1
116   gmres(epsilon=1E-15, maxiter=10, basis=400),
117   krylov(type=gmres)
118   {
119     test(phi1)
120       int(gamma1*grad(k1)*grad(phi1))
121       + int[0,1,3,4,5] (P*k1*phi1)
122       + int[2] (1E10*k1*phi1)
123       = int(alpha1*(moduleDxU1)*phi1)
124       + int[2] (1E10*lambda*((u1x-u2x)^2+(u1y-u2y)^2+(u1z-u2z)^2)*phi1);
125   }
126 moduleDxU2 = dx(u2x)^2+dy(u2y)^2+dz(u2z)^2;
127 solve(k2) in M2
128   gmres(epsilon=1E-40, maxiter=10, basis=400),
129   krylov(type=gmres)
130   {
131     test(phi2)
132       int(gamma2*grad(k2)*grad(phi2))
133       +int[0,1,2,4,5] (P*k2*phi2)
134       + int[3] (1E10*k2*phi2)
135       =int(alpha2*(moduleDxU2)*phi2)
136       +int[3] (1E10*lambda*((u1x-u2x)^2+(u1y-u2y)^2+(u1z-u2z)^2)*phi2);
137   }
138 alpha1 = gamma01+d1*sqrt(k1+5E-3);
139 gamma1 = alpha1;
140 alpha2 = gamma02+d2*sqrt(k2+5E-3);
141 gamma2 = alpha2;
142 save (vtk,"omega1-3d-gmres.01".i, {[u1x,u1y,u1z],k1,p1}, M1);
143 save (vtk,"omega2-3d-gmres.01".i, {[u2x,u2y,u2z],k2,p2}, M2);
144 fout << i
145   << " " << sqrt(int[M1]((u1x-u1nx)^2+(u1y-u1ny)^2+(u1z-u1nz)^2))
146   << " " << sqrt(int[M2]((u2x-u2nx)^2+(u2y-u2ny)^2+(u2z-u2nz)^2))
147   << " " << sqrt(int[M1]((k1-k1n)^2))
148   << " " << sqrt(int[M2]((k2-k2n)^2))
149   << " " << sqrt(int[M1]((p1-p1n)^2))
150   << " " << sqrt(int[M2]((p2-p2n)^2)) << "\n";
151
152
153 << "\n";
154   u1nx = u1x;
155   u1ny = u1y;

```

```

156   u1nz = u1z;
157   p1n  = p1;
158   k1n  = k1;
159   u2nx = u2x;
160   u2ny = u2y;
161   u2nz = u2z;
162   p2n  = p2;
163   k2n  = k2;
164   i++;
165 } while(i<10);

```

Nous avons aussi écrit, un programme `freefem3d` qui résout le problème 5.1-5.2 par la méthode des éléments finis. Nous avons utilisé une discrétisation $Q_1 - Q_1$ stabilisée par pénalisation sur la pression. Le maillage de chaque domaine est $50 \times 20 \times 20$. Ainsi, on obtient les simulations des vitesses et énergies cinétiques turbulentes avec les deux méthodes, voir figures 5.1 à 5.10.

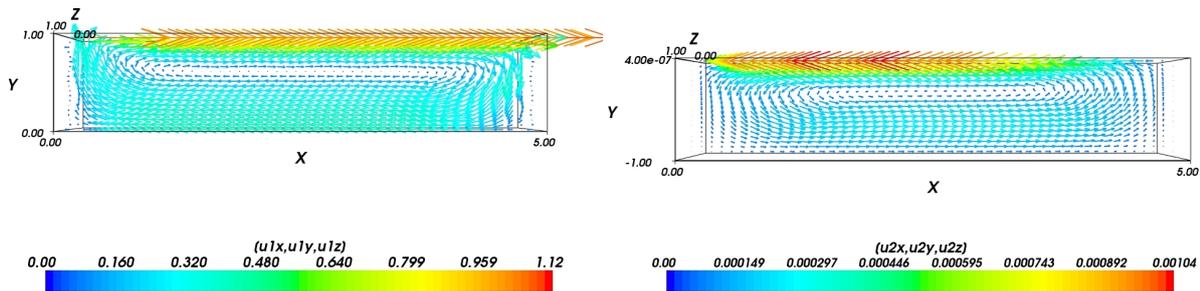


FIG. 5.1 – Vitesse atmosphérique en méthode spectrale dans le plan de coupe $z = 0$ (solution interpolée sur le maillage éléments finis).

FIG. 5.2 – Vitesse océanique en méthode spectrale dans le plan de coupe $z = 0$ (solution interpolée sur le maillage éléments finis).

Commentaires Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis et la méthode spectrale sont bien ceux attendus : on observe une cavité entraînée. Notons que les deux fluides (océan et atmosphère) tournent dans un sens opposé, voir

- figures 5.1 et 5.2, pour la méthode spectrale, et
- figures 5.5 et 5.6, pour la méthode d'éléments finis,

du fait du couplage océan/atmosphère.

Les figures 5.3 et 5.4 représentent des coupes des vitesses atmosphérique et océanique en méthode spectrale, dans le plan $x = 0$, qui mettent en lumière l'aspect tridimensionnel du problème.

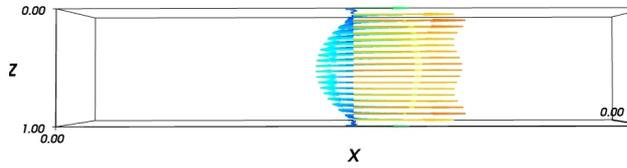


FIG. 5.3 – Vitesse atmosphérique en méthode spectrale dans le plan $x = 0$ (solution interpolée sur le maillage éléments finis).

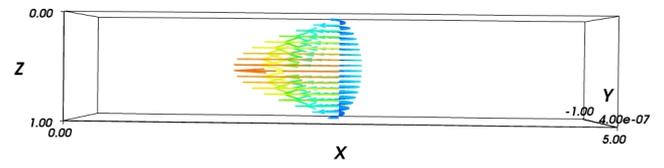


FIG. 5.4 – Vitesse océanique en méthode spectrale dans le plan $x = 0$ (solution interpolée sur le maillage éléments finis).

Ces différentes figures montrent l'efficacité de l'algorithme pour ces deux méthodes. On a en effet fait la seule hypothèse que les méthodes de résolution locales à chaque domaine devaient être des méthodes de GALERKIN.

Par ailleurs, les courbes 5.11 et 5.12 illustrent bien la convergence exponentielle du schéma proposé, en accord avec le Théorème de convergence 9 (les suites sont contractantes).

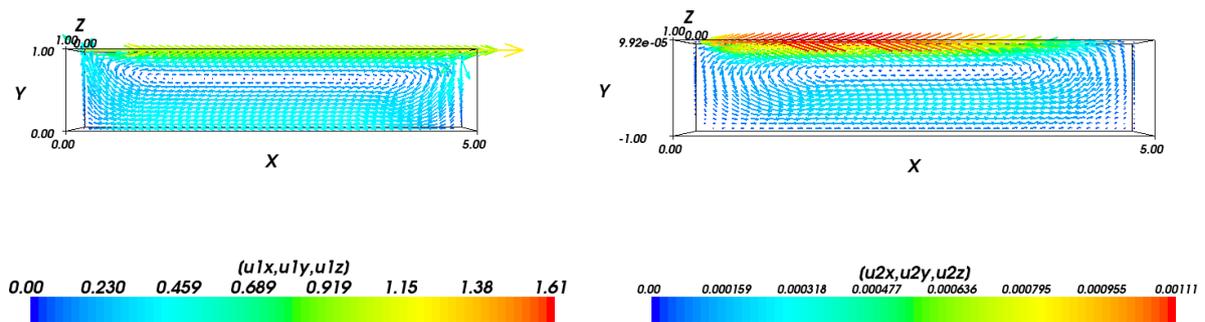


FIG. 5.5 – Vitesse atmosphérique en éléments finis dans le plan de coupe $x = 0$, le maillage utilisé est $50 \times 20 \times 20$.

FIG. 5.6 – Vitesse océanique en éléments finis dans le plan de coupe $x = 0$, le maillage utilisé est $50 \times 20 \times 20$.

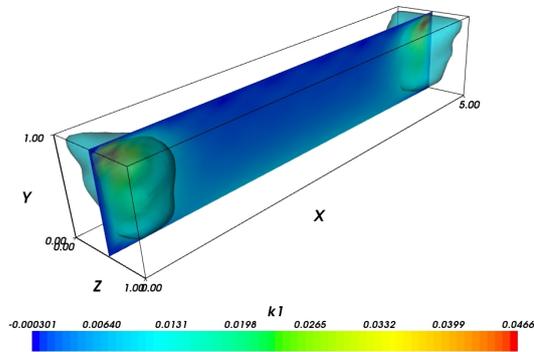


FIG. 5.7 – Énergie cinétique turbulente atmosphérique en méthode spectrale dans le plan de coupe $z = 1/2$. Valeur de l'isosurface est 10^{-2} (solution interpolée sur le maillage éléments finis).

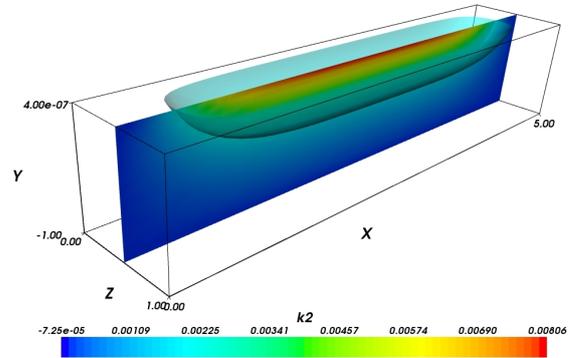


FIG. 5.8 – Énergie cinétique turbulente océanique en méthode spectrale dans le plan de coupe $z = 1/2$. Valeur de l'isosurface est $2 \cdot 10^{-3}$ (solution interpolée sur le maillage éléments finis)

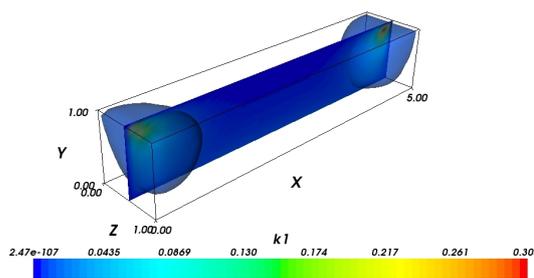


FIG. 5.9 – Énergie cinétique turbulente atmosphérique en méthode d'éléments finis dans le plan de coupe $z = 1/2$. Valeur de l'isosurface est 10^{-2} .

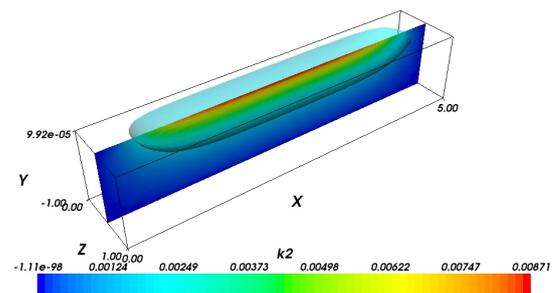


FIG. 5.10 – Énergie cinétique turbulente océanique en méthode d'éléments finis dans le plan de coupe $z = 1/2$. Valeur de l'isosurface est $2 \cdot 10^{-3}$.

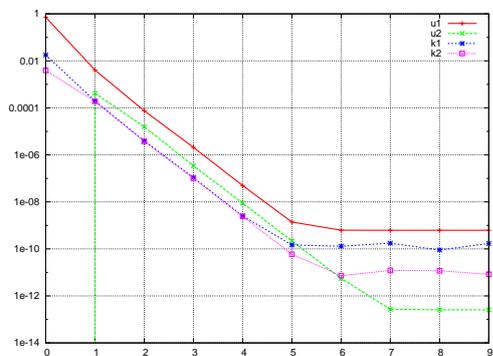


FIG. 5.11 – Méthode spectrale : convergence en échelle logarithmique de $\|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n\|_{L^2}$, et $\|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{L^i}$, $i \in \{1, 2\}$

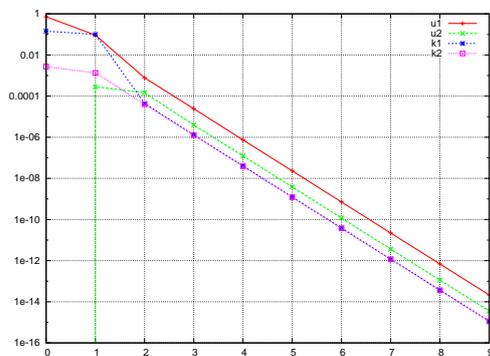


FIG. 5.12 – Méthode des éléments finis : convergence en échelle logarithmique de $\|\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n\|_{L^2}$, et $\|k_i^{n+1} - k_i^n\|_{L^2}$, $i \in \{1, 2\}$

Annexe A

Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup sur l'opérateur de divergence

STÉPHANE DEL PINO, ULRICH RAZAFISON et DRISS YAKOUBI

Introduction

On rappelle d'abord le Théorème de la condition inf-sup pour l'opérateur de divergence, voir par exemple V.GIRAULT-P.-A.RAVIART [39], BABUŠKA [4], et F. BREZZI [18].

Théorème 1. *Soit Ω un ouvert connexe, borné à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^d . Alors il existe une constante β_Ω , strictement positive et ne dépendant que du domaine Ω , telle que*

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \beta_\Omega \|q\|_0,$$

où

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \text{ tel que } \int_\Omega q(x) dx = 0 \right\}, \quad \text{et}$$

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{v}(x) q(x) dx.$$

Dans cette annexe, nous allons donner une caractérisation de la constante de la condition inf-sup de l'opérateur de divergence. Dans [64], M. A. OL'SHANSKIĬ et E. V. CHIZHONKOV ont montré que si $\Omega = \{(x_1, x_2), \text{ tel que } 0 < x_i < L_i, 1 \leq i \leq 2\}$, où L_1, L_2 désignent respectivement la longueur et la largeur du rectangle Ω , alors la meilleure constante de la condition inf-sup β_Ω satisfait la relation

$$\beta_\Omega = O\left(\frac{L_2}{L_1}\right), \quad \text{quand } \frac{L_1}{L_2} \rightarrow +\infty.$$

Dans notre papier, nous considérons un domaine connexe, borné et à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, et nous donnons un encadrement de β_Ω en fonction de la norme d'un relèvement harmonique.

La suite de cette annexe est la partie écrite en Français de la note soumise aux comptes rendus de l'académie des sciences .

A.1 Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup sur l'opérateur de divergence

On considère un ouvert ω connexe, borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Nous noterons $b_\omega(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire qui à tout couple $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ associe le réel

$$b_\omega(\mathbf{u}, p) = - \int_\omega \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{A.1})$$

Nous rappelons la condition inf-sup qui a été établie indépendamment par I. BABUŠKA [4] et par F. BREZZI [18] dans un cadre abstrait (voir aussi V.GIRAULT-P.-A.RAVIART [39]).

Théorème 2 (Condition inf-sup). *Soit ω un ouvert connexe, borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Il existe une constante $\beta = \beta(\omega) > 0$ qui ne dépend que du domaine ω , telle que*

$$\inf_{q \in L_0^2(\omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q)}{\|q\|_{L^2(\omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}} = \beta. \quad (\text{A.2})$$

Ici $L_0^2(\omega)$ désigne l'espace $\{q \in L^2(\omega), \int_\omega q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0\}$.

Le but de cette Note est de donner une borne inférieure pour la constante $\beta(\omega)$, qui ne dépend que de la norme du relèvement harmonique sur ω et du $\sup_{\Omega \supset \bar{\omega}} \beta(\Omega)$.

A.2 Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de cette Note.

Théorème 3 (Borne inférieure). *Soit ω un ouvert connexe, borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Alors, pour tout Ω ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière lipschitzienne tel que $\Omega \supset \bar{\omega}$, on a*

$$\beta(\omega) \geq \frac{\beta(\Omega)}{1 + \|R_h\|}, \quad (\text{A.3})$$

où R_h est l'opérateur de relèvement harmonique sur ω .

La suite de cette Note prouve cette minoration de $\beta(\omega)$.

Soit tout d'abord $q_\omega \in L_0^2(\omega)$. D'après la définition de $\beta(\omega)$, pour établir (A.3), il suffit de montrer que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega)} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)} \|q_\omega\|_{L^2(\omega)}} \geq \frac{\beta(\Omega)}{1 + \|R_h\|}. \quad (\text{A.4})$$

Soient maintenant $\mathbf{v}_\Omega \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d$ et \mathbf{v}_ω sa restriction sur ω : $\mathbf{v}_\omega = \mathbf{v}_\Omega|_\omega$ ($\mathbf{v}_\omega = \mathbf{v}_\Omega$ presque partout dans ω). Par construction, on a $\mathbf{v}_\omega \in \mathbf{H}^1(\omega)^d$. Nous considérons par ailleurs la fonction q_Ω définie de la façon suivante :

$$q_\Omega = \begin{cases} \alpha q_\omega & \text{sur } \omega, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

où α est une constante réelle que nous choisirons ultérieurement. Notons que, par construction, q_Ω appartient à $L_0^2(\Omega)$ et

$$\|q_\Omega\|_{L^2(\Omega)} = |\alpha| \|q_\omega\|_{L^2(\omega)}. \quad (\text{A.6})$$

La preuve de (A.4) est composée de trois étapes.

A.2.1 Première étape : calcul de $b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)$.

Nous distinguons ici deux cas : selon que \mathbf{v}_ω est nul ou non sur ω .

Le cas $\mathbf{v}_\Omega|_\omega = \mathbf{v}_\omega \neq \mathbf{0}$

Soit R un opérateur de relèvement linéaire continu de $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)^d$ dans $\mathbf{H}^1(\omega)^d$ de norme égale à c_R . On a alors

$$\|R\gamma\mathbf{v}_\omega\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d} \leq c_R \|\gamma\mathbf{v}_\omega\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)^d} \leq c_R c_\gamma \|\mathbf{v}_\omega\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d},$$

où c_γ est la norme de l'opérateur de trace γ de $\mathbf{H}^1(\omega)^d$ dans $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)^d$. On note $c = c_R c_\gamma$ et on pose $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\omega - R\gamma\mathbf{v}_\omega$. Par construction $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega)^d$ et on a

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d} \leq \|\mathbf{v}_\omega\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d} + \|R\gamma\mathbf{v}_\omega\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d} \leq (1 + c) \|\mathbf{v}_\omega\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}.$$

De plus, comme \mathbf{v}_ω est la restriction de \mathbf{v}_Ω sur ω , on a $\|\mathbf{v}_\omega\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d} \leq \|\mathbf{v}_\Omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}$, et donc on obtient

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d} \leq (1 + c) \|\mathbf{v}_\Omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}. \quad (\text{A.7})$$

Estimons maintenant $b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)$. D'après (A.1), on a

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = - \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{v}_\Omega q_\Omega \, d\mathbf{x} = - \int_\omega \nabla \cdot \mathbf{v}_\Omega q_\Omega \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega \setminus \omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_\Omega q_\Omega \, d\mathbf{x}.$$

Grâce à la définition (A.5), on peut écrire

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = - \int_\omega \nabla \cdot \mathbf{v}_\omega \alpha q_\omega \, d\mathbf{x},$$

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = -\alpha \int_\omega \nabla \cdot (\mathbf{v} + R\gamma\mathbf{v}_\omega) q_\omega \, d\mathbf{x}.$$

Finalement, on a

$$b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega) = \alpha b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega) - \alpha \int_\omega R\gamma\mathbf{v}_\omega q_\omega \, d\mathbf{x}.$$

Nous choisissons à présent α pour que la quantité $b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)$ soit inférieure à la quantité $\alpha b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)$. Pour cela, il suffit de prendre

$$\text{si } \int_{\omega} \nabla \cdot R\gamma \mathbf{v}_{\omega} q_{\omega} d\mathbf{x} \neq 0, \quad \alpha = \frac{\int_{\omega} \nabla \cdot R\gamma \mathbf{v}_{\omega} q_{\omega} d\mathbf{x}}{\left| \int_{\omega} \nabla \cdot R\gamma \mathbf{v}_{\omega} q_{\omega} d\mathbf{x} \right|}, \quad \text{et}$$

$$\text{si } \int_{\omega} \nabla \cdot R\gamma \mathbf{v}_{\omega} q_{\omega} d\mathbf{x} = 0, \quad \alpha = 1.$$

Notons que dans les deux cas, la constante α vérifie $|\alpha| = 1$, et on a

$$\frac{b_{\Omega}(\mathbf{v}_{\Omega}, q_{\Omega})}{\|\mathbf{v}_{\Omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \leq \alpha \frac{b_{\omega}(\mathbf{v}, q_{\omega})}{\|\mathbf{v}_{\Omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \leq \frac{|b_{\omega}(\mathbf{v}, q_{\omega})|}{\|\mathbf{v}_{\Omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}}.$$

D'après la relation (A.7), on obtient

$$\frac{b_{\Omega}(\mathbf{v}_{\Omega}, q_{\Omega})}{\|\mathbf{v}_{\Omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \leq (1+c) \frac{|b_{\omega}(\mathbf{v}, q_{\omega})|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}}.$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $\mathbf{v}_{\Omega} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d$, avec $\mathbf{v}_{\Omega}|_{\omega} \neq \mathbf{0}$, on en déduit que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_{\Omega} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v}_{\Omega}|_{\omega} \neq \mathbf{0}}} \frac{b_{\Omega}(\mathbf{v}_{\Omega}, q_{\Omega})}{\|\mathbf{v}_{\Omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \leq (1+c) \sup_{\substack{\mathbf{v}_{\Omega} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v}_{\Omega}|_{\omega} \neq \mathbf{0}}} \frac{|b_{\omega}(\mathbf{v}, q_{\omega})|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}},$$

donc

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_{\Omega} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v}_{\Omega}|_{\omega} \neq \mathbf{0}}} \frac{b_{\Omega}(\mathbf{v}_{\Omega}, q_{\Omega})}{\|\mathbf{v}_{\Omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \leq (1+c) \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega)^d} \frac{|b_{\omega}(\mathbf{v}, q_{\omega})|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}}. \quad (\text{A.8})$$

Nous étudions maintenant le cas $\mathbf{v}_{\omega} = \mathbf{0}$.

Le cas : $\mathbf{v}_{\Omega}|_{\omega} = \mathbf{v}_{\omega} = \mathbf{0}$

Le calcul de b_{Ω} donne :

$$b_{\Omega}(\mathbf{v}_{\Omega}, q_{\Omega}) = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\Omega} q_{\Omega} d\mathbf{x} = - \int_{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\Omega} q_{\Omega} d\mathbf{x} - \int_{\Omega \setminus \omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\Omega} q_{\Omega} d\mathbf{x}.$$

D'après la définition (A.5) et comme $\mathbf{v}_{\omega} = \mathbf{0}$,

$$b_{\Omega}(\mathbf{v}_{\Omega}, q_{\Omega}) = - \int_{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\omega} \alpha q_{\omega} d\mathbf{x} = 0.$$

On obtient donc

$$0 = \sup_{\substack{\mathbf{v}_{\Omega} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v}_{\Omega}|_{\omega} = \mathbf{0}}} \frac{b_{\Omega}(\mathbf{v}_{\Omega}, q_{\Omega})}{\|\mathbf{v}_{\Omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \leq (1+c) \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega)^d} \frac{|b_{\omega}(\mathbf{v}, q_{\omega})|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}}. \quad (\text{A.9})$$

Les relations (A.8) et (A.9) donnent l'inégalité suivante :

$$\sup_{\mathbf{v}_{\Omega} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d} \frac{b_{\Omega}(\mathbf{v}_{\Omega}, q_{\Omega})}{\|\mathbf{v}_{\Omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \leq (1+c) \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega)^d} \frac{|b_{\omega}(\mathbf{v}, q_{\omega})|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}}. \quad (\text{A.10})$$

A.2.2 Deuxième étape : minoration de $\beta(\omega)$

D'après la définition de $\beta(\Omega)$, on a

$$\sup_{\mathbf{v}_\Omega \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d} \frac{b_\Omega(\mathbf{v}_\Omega, q_\Omega)}{\|\mathbf{v}_\Omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \geq \beta(\Omega) \|q_\Omega\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à (A.10), on obtient donc

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}} \geq \frac{\beta(\Omega)}{1+c} \|q_\Omega\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{A.11})$$

En utilisant (A.11) et (A.6), et comme $|\alpha| = 1$, on en déduit la minoration de $\beta(\omega)$ suivante :

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\mathbf{v}, q_\omega)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d} \|q_\omega\|_{L^2(\omega)}} \geq \frac{\beta(\Omega)}{1+c},$$

où $c = c_R c_\gamma = \|\gamma\| \|R\|$ ne dépend que du domaine ω . Il reste maintenant à caractériser la constante c .

A.2.3 Troisième étape : caractérisation de la constante c .

Comme dans ce qui précède, l'opérateur de relèvement est quelconque, afin de choisir le plus petit c possible, on peut prendre $c = \|\gamma\| \inf_{R \in \mathbf{H}} \|R\|$, où

$$\|\gamma\| = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\omega)^d} \frac{\|\gamma \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)^d}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}}, \quad \|R\| = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)^d} \frac{\|R \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\omega)^d}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)^d}},$$

et $\mathbf{H} = \{R : \text{relèvement linéaire continu de } \mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)^d \text{ dans } \mathbf{H}^1(\omega)^d\}$.

Si on prend $\|\gamma \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)^d} = \inf \{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}, \gamma \mathbf{w} = \gamma \mathbf{v} \text{ sur } \partial\Omega\}$, alors $c = \inf_{R \in \mathbf{H}} \|R\|$. De plus, on a $\inf_{R \in \mathbf{H}} \|R\| = \|R_h\|$, où R_h est le relèvement harmonique, donc le plus petit c est $c = \|R_h\|$. Ceci termine la preuve de (A.4). ■

A.3 Une remarque sur la condition inf-sup en utilisant la semi-norme

Soit Ω un ouvert, connexe, borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Dans cette section, on définit la constante $\beta(\Omega) > 0$ vérifiant la condition inf-sup comme suit :

$$\beta(\Omega) = \inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d} \frac{b_\Omega(\mathbf{v}, q)}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}}, \quad (\text{A.12})$$

où $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}$ désigne la semi-norme de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)^d$.

Remarque 9. Soient \mathbf{a} un vecteur quelconque non nul de \mathbb{R}^d , λ un réel et $\Phi_{\lambda,\mathbf{a}}$ l'application suivante :

$$\begin{aligned}\Phi_{\lambda,\mathbf{a}} : \Omega &\rightarrow \Omega_{\lambda,\mathbf{a}}, \\ \mathbf{x} &\rightarrow \Phi_{\lambda,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{A.13}$$

On a alors

$$\beta(\Omega_{\lambda,\mathbf{a}}) = \beta(\Omega).$$

Autrement dit, en utilisant la définition (A.12), la constante $\beta(\Omega)$ vérifiant la condition inf-sup est invariante par translation et par homothétie du domaine Ω .

On introduit la constante $c_p(\Omega) > 0$ vérifiant $\|\mathbf{v}_\Omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d} \leq c_p(\Omega)|\mathbf{v}_\Omega|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}$. En utilisant la définition (A.12) de β , à la place de (A.2), on peut montrer que la remarque 9 permet d'encadrer la constante $\beta(\omega)$:

Corollaire 4. Soit ω un ouvert, connexe, borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Alors pour tout Ω ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière lipschitzienne, on a

$$c_p(\omega)(1 + \|\tilde{R}_h\|)\beta(\Omega) \geq \beta(\omega) \geq \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1 + \|R_h\|)},$$

où R_h et \tilde{R}_h sont respectivement les opérateurs de relèvement harmonique sur ω et Ω .

Annexe B

Une condition de type inf-sup

Dans cette annexe, nous allons montrer le Théorème suivant ,

Théorème 5 (inf-sup). *Soit Ω un ouvert connexe, borné et à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^d , alors il existe une constante $\beta^1(\Omega) > 0$, telle que*

$$\forall q \in L^2(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \geq \beta^1(\Omega) \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{B.1})$$

De plus, pour tout ouvert borné et à frontière lipschitzienne Ω_0 de \mathbb{R}^d , tel que $\bar{\Omega} \subseteq \Omega_0$, nous avons l'inégalité suivante

$$\beta^1(\Omega) \geq \beta(\Omega_0) \sqrt{\frac{\text{mes}(\Omega_0) - \text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega_0)}}, \quad (\text{B.2})$$

où $\beta(\Omega_0)$ est la meilleure constante strictement positive vérifiant la condition inf-sup du Théorème 1, et $\beta^1(\Omega)$ la meilleure constante strictement positive vérifiant l'inégalité (B.1).

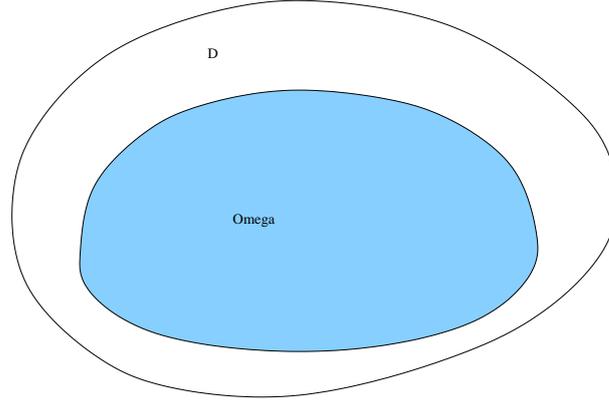
Démonstration. Soit $q \in L^2(\Omega)$, et soit Ω_0 , un domaine borné à frontière lipschitzienne, tel que $\Omega \subsetneq \Omega_0$, voir figure B.1. Construisons une fonction q_0 définie et intégrable sur Ω_0 , telle que

$$\int_{\Omega} q(x) dx = 0.$$

On choisit q_0 de la façon suivante

$$\begin{cases} q_0 = q + a, & \text{dans } \Omega, \\ q_0 = -\frac{1}{r} \int_{\Omega} (q + a) = \text{constante} & \text{dans } \Omega_0 \setminus \Omega, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

où a est une constante réelle que nous allons choisir par la suite, et $r = \text{mes}(\Omega_0 \setminus \Omega)$.

FIG. B.1 – Un domaine Ω_0 englobant Ω .

On pose $s = \text{mes}(\Omega)$, et on note par

$$b_0(\mathbf{v}_0, q_0) = - \int_{\Omega_0} (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) q_0 \quad \forall \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega_0)^d, \text{ et}$$

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^d.$$

Calculons $\int_{\Omega_0} q_0 \, dx$.

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} q &= \int_{\Omega} (q + a) + \int_{\Omega_0 \setminus \Omega} \left[-\frac{1}{r} \int_{\Omega} (q + a) \right], \\ &= \int_{\Omega} (q + a) - \frac{1}{r} \int_{\Omega} (q + a) \int_{\Omega_0 / \Omega} dx, \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après la condition inf-Sup (voir Théorème 1), il existe une constante $\beta(\Omega_0) > 0$, ne dépendant que de Ω_0 , telle que

$$\sup_{\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_0)} \frac{b_0(\mathbf{v}_0, q_0)}{\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)}} \geq \beta(\Omega_0) \|q_0\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{B.4})$$

Maintenant, nous allons chercher pour quelles valeurs de la constante a , l'égalité suivante sera satisfaite

$$b_0(\mathbf{v}_0, q_0) = b(\mathbf{v}, q), \quad \text{où } \mathbf{v} \text{ est un vecteur à choisir dans } \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Comme $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_0)$, sa restriction sur Ω appartient à l'espace $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Prenons donc

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0|_{\Omega} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

de plus on a l'inégalité suivante

$$\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)} \geq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (\text{B.5})$$

Calcul de $b_0(\mathbf{v}_0, q_0)$.

On a

$$\begin{aligned} b_0(\mathbf{v}_0, q_0) &= - \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 q_0, \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} [q + a] dx - \int_{\Omega_0 \setminus \Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 q_0 dx, \\ &= b(\mathbf{v}, q) - a \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \frac{1}{r} \int_{\Omega} [q + a] \int_{\Omega_0 \setminus \Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 dx. \end{aligned}$$

Soit n le vecteur normal extérieur à Ω , alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot n d\tau \quad \text{et,} \\ \int_{\Omega_0 \setminus \Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 dx &= \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{v}_0 \cdot n d\tau - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot n d\tau, \\ &= - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot n d\tau, \quad \text{car } \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} b_0(\mathbf{v}_0, q_0) &= b(\mathbf{v}, q) - \left[a + \frac{1}{r} \int_{\Omega} (q + a) dx \right] \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot n d\tau, \\ &= b(\mathbf{v}, q) - \left[a + \frac{as}{r} + \frac{1}{r} \int_{\Omega} q dx \right] \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot n d\tau. \end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité souhaitée, à savoir

$$b_0(\mathbf{v}_0, q_0) = b(\mathbf{v}, q), \quad (\text{B.6})$$

il suffit que la constante a vérifie l'équation

$$a + \frac{as}{r} + \frac{1}{r} \int_{\Omega} q dx = 0.$$

Or cette équation a pour unique solution

$$a = -\frac{1}{r+s} \int_{\Omega} q dx. \quad (\text{B.7})$$

D'après les relations (B.5) et (B.6), on a

$$\frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \frac{b_0(\mathbf{v}_0, q_0)}{\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)}},$$

en passant au sup sur tous les $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_0)$, on obtient

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \sup_{\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega_0)} \frac{b_0(\mathbf{v}_0, q_0)}{\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_0)}},$$

en utilisant la relation (B.4), on déduit que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \geq \beta(\Omega_0) \|q_0\|_{L^2(\Omega_0)}. \quad (\text{B.8})$$

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que $\|q_0\|_{L^2(\Omega_0)} \geq \delta \|q\|_{L^2(\Omega)}$, ($\delta > 0$).

Calculons $\|q_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2$.

On a

$$\begin{aligned} \|q_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega} |q + a|^2 dx + \int_{\Omega_0 \setminus \Omega} \left[-\frac{1}{r} \int_{\Omega} (q + a) dx \right]^2 dx, \\ &= \int_{\Omega} |q|^2 dx + \int_{\Omega} |a|^2 dx + 2 \int_{\Omega} a q dx \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\left(\int_{\Omega} q dx \right)^2 + \left(\int_{\Omega} a dx \right)^2 + 2 \left(\int_{\Omega} q dx \right) \left(\int_{\Omega} a dx \right) \right], \\ &= \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + a^2 s + 2a \int_{\Omega} q dx + \frac{1}{r} \left[\left(\int_{\Omega} q dx \right)^2 + a^2 s^2 + 2as \int_{\Omega} q dx \right], \\ &= \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{s}{(s+r)^2} \left(\int_{\Omega} q dx \right)^2 - \frac{2}{s+r} \left(\int_{\Omega} q dx \right) \int_{\Omega} a dx \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\left(\int_{\Omega} q dx \right)^2 + \frac{s^2}{(s+r)^2} \left(\int_{\Omega} q dx \right)^2 - \frac{2s}{s+r} \left(\int_{\Omega} q dx \right) \int_{\Omega} a dx \right], \\ &= \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\int_{\Omega} q dx \right)^2 \left(\frac{s}{(s+r)^2} - \frac{2}{s+r} + \frac{1}{r} + \frac{s^2}{r(s+r)^2} - \frac{2s}{r(s+r)} \right), \\ &= \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{r+s} \left(\int_{\Omega} q dx \right)^2, \quad \text{on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz,} \\ &\geq \frac{r}{r+s} \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{\text{mes}(\Omega_0) - \text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega_0)} \|q\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après la relation (B.8), on obtient

$$\forall q \in L^2(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^d} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^d}} \geq \beta(\Omega_0) \sqrt{\frac{\text{mes}(\Omega_0) - \text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega_0)}} \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{B.9})$$

Comme $\beta^1(\Omega)$ est la meilleure constante strictement positive qui satisfait la relation (B.9), alors

$$\beta^1(\Omega) \geq \beta(\Omega_0) \sqrt{\frac{\text{mes}(\Omega_0) - \text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(\Omega_0)}}, \quad \forall \Omega \subsetneq \Omega_0.$$

□

Bibliographie

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press , New York, San Francisco, London, (1975).
- [2] J.-B. Apoung Kamga. *Éléments finis discontinus et zoom numérique, applications aux écoulements dans les milieux poreux*. Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris 2006.
- [3] J.-P. Aubin. Approximation des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs non linéaires. *J. Math. Anal. Appl.*, 30 :510–521, 1970.
- [4] I. Babuška. The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers. *Numer. Math.*, 20 :179–192, 1972/73.
- [5] I. Babuška. The Finite Element Method with Penalty. *Math. Comp.*, 27 :221–228, 1973.
- [6] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, and J. L. Vázquez. An L^1 -Theory of Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 22(2) :241–273, 1995.
- [7] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, M. Gómez Mármol, R. Lewandowski, and F. Murat. A model for two coupled turbulent fluids. III. Numerical approximation by finite elements. *Numer. Math.*, 98(1) :33–66, 2004.
- [8] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, F. Hecht, and R. Lewandowski. Automatic insertion of a turbulence model in the finite element discretization of the Navier-Stokes Equations. *Preprint du Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie*, 2007.
- [9] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, R. Lewandowski, and F. Murat. Existence d’une solution pour un modèle de deux fluides turbulents couplés. *C.R. Acad. Sc. Paris 328 série I*, 993-998, 1999.
- [10] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, R. Lewandowski, and F. Murat. A model for two coupled turbulent fluids. I. Analysis of the system. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XIV (Paris, 1997/1998)*, volume 31 of *Stud. Math. Appl.*, pages 69–102. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [11] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, R. Lewandowski, and F. Murat. A model for two coupled turbulent fluids. II. Numerical analysis of a spectral discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(6), 2002.

- [12] C. Bernardi and Y. Maday. Some spectral approximations of one-dimensional fourth-order problems, in : P. Nevai and A. Pinkus, eds. In *Progress in approximation theory*, pages 43–116. Academic Press, Boston, MA, 1991.
- [13] C. Bernardi and Y. Maday. *Spectral Methods*. North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [14] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, volume 45 of *Collection "Mathématiques et Applications"*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [15] D. Blanchard and H. Redwane. Solutions renormalisées d'équations paraboliques à deux non linéarités. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319(8) :831–835, 1994.
- [16] L. Boccardo and T. Gallouët. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *J. Funct. Anal.*, 87(1) :149–169, 1989.
- [17] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications*. Collection "Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise". Masson, Paris, 1983.
- [18] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *R.A.I.R.O. Anal.Numer.*, 8 (R-2) :129–151, (1974).
- [19] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [20] F. Brossier and R. Lewandowski. Impact of the variations of the mixing length in a first order turbulent closure system. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 36(2) :345–372, 2002.
- [21] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [22] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods*. Scientific Computation. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Fundamentals in single domains.
- [23] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods, Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Scientific Computation. Springer, Berlin, 2007.
- [24] G. F. Carey and R. Krishnan. Penalty approximation of Stokes flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 35(2) :169–206, 1982.
- [25] T. Chácon Rebollo. Oscillations due to the transport of microstructures. *SIAM J. Appl. Math.*, 48(5) :1128–1146, 1988.
- [26] H. Chen, S. A. Orszag, and I. Staroselsky. Macroscopic description of arbitrary Knudsen number flow using Boltzmann-BGK kinetic theory. *J. Fluid Mech.*, 574 :495–505, 2007.
- [27] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, 1978.
- [28] M. Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1984.
- [29] P. J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press Inc., Orlando, FL, second edition, 1984.

- [30] S. Del pino. *Une méthode d'éléments finis pour la résolution d'EDP dans des domaines décrits par géométrie constructive*. Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris 2002.
- [31] S. Del Pino and P. Olivier. freefem3d. Technical report, <http://www.freefem.org/ff3d>.
- [32] S. Del pino and O. Pironneau. A fictitious domain based general pde solver. *conf. METSO-ECCOMAS., in "Numerical Methods for Scientific Computing" E.Heikkola ed. CIMNE , Barcelona, 2003.*
- [33] S. Del Pino, U. Razafison, and D. Yakoubi. une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup sur l'opérateur de divergence. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, submitted, 2007.
- [34] M. El Rhabi. *Analyse numérique et discrétisation par éléments spectraux avec joints des équations tridimensionnelles de l'électromagnétisme*. Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris 2002.
- [35] P. Frey. Medit, voir <http://www.ann.jussieu.fr/frey/logiciels/medit.html>.
- [36] D. Funaro. *Polynomial approximation of differential equations*, volume 8 of *Lecture Notes in Physics. New Series m : Monographs*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [37] T. Gallouët and R. Herbin. Existence of a solution to a coupled elliptic system. *Appl. Math. Lett.*, 7(2) :49–55, 1994.
- [38] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [39] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [40] D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications*. SIAM Publications, Philadelphia, Pa., 1977.
- [41] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [42] F. Hecht, A. Lehyaric, O. Pironneau, and O. Otsuka. freefem++ manual finite. Technical report, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 2006.
- [43] F. Hecht and O. Pironneau. freefem++, voir <http://www.freefem.org/ff++>.
- [44] J.-M. Hervouet. *Hydrodynamique des écoulements à surface libre : Modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. 2003.
- [45] M. Juntunen and R. Stenberg. Nitsches Method For General Boundary Conditions. *Helsinki University of Technology, Institute of Mathematics, Research Reports*, A530, 2007.
- [46] J. Lederer and R. Lewandowski. A RANS 3D model with unbounded eddy viscosities. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 24 :413–441, 2007.

- [47] R. Lewandowski. *Analyse mathématique et océanographie*. Collection "Recherches en mathématiques Appliquées", Masson, 1997.
- [48] R. Lewandowski. The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy viscosity. *Nonlinear Anal.*, 28(2) :393–417, 1997.
- [49] J.-L. Lions. Problèmes aux limites non homogènes à données irrégulières : Une méthode d'approximation. In *Numerical Analysis of Partial Differential Equations (C.I.M.E. 2 Ciclo, Ispra, 1967)*, pages 283–292. Edizioni Cremonese, Rome, 1968.
- [50] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [51] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problème aux limites non homogènes et applications, Volume 1*. Dunod, Paris, 1968.
- [52] J.-L. Lions, R. Temam, and S. Wang. Models for the coupled atmosphere and ocean. (CAO I,II). *Comput. Mech. Adv.*, 1(1) :120, 1993.
- [53] J.-L. Lions, R. Temam, and S. H. Wang. Modèles et analyse mathématiques du système océan/atmosphère. I. Structure des sous-systèmes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 316(1) :113–119, 1993.
- [54] J.-L. Lions, R. Temam, and S. H. Wang. Modèles et analyse mathématiques du système océan/atmosphère. II. Couplage. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 316(2) :211–215, 1993.
- [55] J.-L. Lions, R. Temam, and S. H. Wang. Problème à frontière libre pour les modèles couplés de l'océan et de l'atmosphère. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(12) :1165–1171, 1994.
- [56] Y. Maday and E. M. Rønquist. Optimal error analysis of spectral methods with emphasis on nonconstant coefficients and deformed geometries. In *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations (Como, 1989)*, pages 91–115. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [57] B. Maury. Numerical Analysis of a Finite Element/Volume Penalty Method, to appear in the. *Proceedings pour les 60 ans de O. PIRONNEAU*, 2007.
- [58] mayavi. Mayavi, <http://mayavi.sourceforge.net/>.
- [59] B. Mercier. *An Introduction to the Numerical Analysis of Spectral Methods*, volume 318 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [60] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Analysis of the $k-\epsilon$ model*. Collection "Recherches en mathématiques Appliquées", Masson, 1994.
- [61] F. Murat. Équations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure. *Actes du 26ème Congrès National d'Analyse Numérique, Les Karellis, France*.
- [62] J. Nitsche. Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens. *Numer. Math.*, 11 :346–348, 1968.
- [63] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36 :9–15, 1971. Collection of articles dedicated to Lothar Colatz on his sixtieth birthday.

- [64] M. A. Ol'shanskiĭ and E. V. Chizhonkov. On the best constant in the inf-sup condition for elongated rectangular domains. *Mat. Zametki*, 67(3) :387–396, 2000.
- [65] S. A. Orszag. Comparaison of pseudospectral and spectral approximations. *Stud. Appl. Math.* 51 (1972), 253-259.
- [66] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999.
- [67] Y. Saad and M. H. Schultz. GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7(3) :856–869, 1986.
- [68] G. Stampacchia. Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Presses de l'Université de Montréal*.
- [69] B. Stroustrup. *The C++ programming language*. Addison-Wesley, 3rd edition, 1997.
- [70] R. Temam. *Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes Equations*. North-Holland, Amsterdam, (1977).