TP n°2 : Méthodes de quadratures pour l'intégration numérique

Cadre de travail :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il est question, connaissant la valeur que prend f en un nombre fini de points de l'intervalle $[a, b]$, de calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Pour cela on se donne tout d'abord une subdivision de l'intervalle $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b.$$

Typiquement, et dans la suite de ce TP, nous choisissons une subdivision régulière

$$x_i = a + \frac{i}{N}(b-a), \qquad i = 0, \ldots, N.$$

La relation de Chasles donne alors

$$I(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt.$$

Et c'est l'intégrale de f sur chaque petit intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ qui va être calculée au moyen de formules approchées, d'un même type sur chacun de ces intervalles.

1. **Méthodes de quadratures à 1 point :**
   Un unique point $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ est utilisé dans la formule de quadrature élémentaire.

   $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt \simeq (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

   Trois choix "naturels" se présentent pour le choix des ξ_i, qui définissent chacun une méthode d'intégration différente :

   méthode des rectangles à gauche : $\xi_i = x_i$
   méthode des rectangles à droite : $\xi_i = x_{i+1}$
   méthode du point milieu : $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

   (a) Définir la fonction $f : x \to \frac{\pi}{2} sin(\pi x/2)$ et calculer son intégrale exacte $I(f)$ sur $[0, 1]$.

   (b) Écrire la fonction `rectG` qui retournera en sortie l'intégrale approchée d'une fonction g sur l'intervalle $[0, 1]$ par la quadrature des rectangles à gauche.

   ```
   function [I]=rectG(g,N)
   // g fonction a intergrer
   // N le nombre de points de la subdivision
   // I en sortie, l integrale calculee par les rectangle a gauche
   endfunction
   ```

   (c) Écrire de même la fonction `rectM` qui retournera en sortie l'intégrale approchée par la quadrature du point milieu pour `N` points.

   (d) Comparer les deux méthodes. Pour cela on calculera pour différentes valeurs `N=50,100,...,450,500` l'erreur $E_N(f)$ relativement à la valeur exacte pour la fonction f, et on tracera en échelle logarithmique les deux courbes $E_N(f)$ en fonction de N.

(e) Quel est, à partir de la pente des courbes précédemment tracées, l'ordre de ces méthodes.

2. **Méthodes de quadratures à 2 points :**
Étant donné un réel $\theta \in [0,1]$, nous nous intéressons à la quadrature à deux points suivante

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt \simeq (x_{i+1}-x_i)\big(\theta f(x_{i+1}) + (1-\theta) f(x_i)\big)$$

(a) Lorsque $\theta = 1$ ou $\theta = 0$ quelles méthodes retrouve-t-on ?

(b) Définir une fonction `DeuxPts` qui prendra en arguments une fonction `g`, un réel `theta` et un entier naturel `N` et retournera en sortie l'intégrale de g évaluée selon cette méthode pour $\theta =$`theta` sur une subdivision régulière de $[0,1]$ contenant `N` points.

(c) Pour `N=500` puis pour `N=600` calculer respectivement les valeurs de l'erreur `Err1` et `Err2` obtenues pour différentes valeur de `theta` dans $[0,1]$. On pourra pour cela définir

```
n1=500;   n2=600;
Err1=[];  Err2=[];
THETA=[0:0.05:1];
for theta=THETA
 Err1=[Err1,abs(DeuxPts(f,theta,n1)-1)];
 Err2=[Err2,abs(DeuxPts(f,theta,n2)-1)];
end
```

(d) Tracer alors, en fonction de θ, l'ordre approximatif évalué comme suit :

$$\texttt{ordre}(\theta) \simeq -\frac{\log(\texttt{Err2}(\theta)) - \log(\texttt{Err1}(\theta))}{\log(\texttt{n2}) - \log(\texttt{n1})}$$

Que remarque-t-on ?

(e) Justifier la dénomination de *méthode des trapèzes* lorsque $\theta = 1/2$.

3. **Méthode de quadrature à 3 points :** *Méthode de Simpson d'ordre 3*
Il s'agit d'une méthode de quadrature à poids basée sur la formule suivante :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt \simeq \frac{1}{6}(x_{i+1}-x_i)\left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right)$$

(a) Définir une fonction `Simpson` qui permettra de calculer l'intégrale approchée d'une fonction `g` sur une subdivision de `N` points de $[0,1]$.

(b) Calculer l'intégrale approchée par cette méthode dans le cas d'un polynôme de degré 0,1,2 puis 3. Que peut-on remarquer ?

(c) Tracer, toujours en échelle logarithmique, $E_N(f)$ en fonction de N pour les valeurs `N` très grandes.